ΘΕΜΑ 1

Έστω τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ και $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

A. Δείξτε ότι τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα. Βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}'$ και $\hat{j}'$ στις διευθύνσεις των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ και βρείτε ένα τρίτο διάνυσμα $\hat{k}'$ έτσι ώστε τα $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ και $\hat{k}'$ να αποτελούν δεξιόστροφη τριάδα ορθογωνίων διανυσμάτων.

B. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ως προς το σύστημα των $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ και $\hat{k}'$.

Λύση

A. $\vec{A}\cdot\vec{B} = 4 - 2 - 2 = 0$, $\hat{i}' = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{3}$, $\hat{j}' = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}$,

$$\vec{k}' = \hat{i}' \times \hat{j}' = \frac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{3} \times \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3} = \frac{-3\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}}{9} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

B. $\vec{C}\cdot\hat{i}' = \dfrac{11}{3}$, $\vec{C}\cdot\hat{j}' = \dfrac{2}{3}$, $\vec{C}\cdot\hat{k}' = -\dfrac{1}{3}$

Άρα $\vec{C} = \dfrac{11\hat{i}' + 2\hat{j}' - \hat{k}'}{3}$

ΘΕΜΑ 2

A. Αν ισχύει η σχέση $x^y = y^x$ βρείτε την έκφραση του $\dfrac{dy}{dx}$ ως συνάρτηση των (x, y). (υποθέτουμε ότι το x περιορίζεται σε εκείνες τις τιμές για τις οποίες έχει νόημα η y)

B. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x\sin y + y\sin x = 0.7629$ στο σημείο $(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6})$

Λύση :

A.

Από τη σχέση $x^y = y^x \Rightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y\ln x)' = (x\ln y)' \Rightarrow y'\ln x + y\frac{1}{x} = \ln y + xy'\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\ln x - xy'\frac{1}{y} = \ln y - y\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{\ln y - y/x}{\ln x - x/y}$$

B.

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε

$$\text{siny+xcosy}\frac{\text{dy}}{\text{dx}}+\sin x\frac{\text{dy}}{\text{dx}}+y\cos x=0\Rightarrow$$

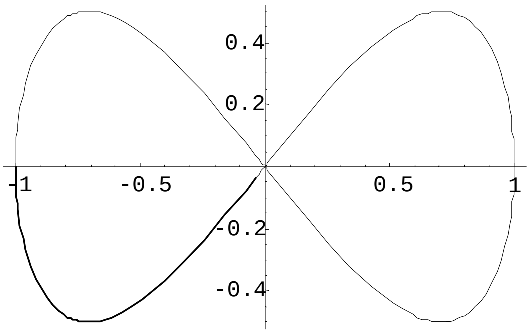
$$\frac{\text{dy}}{\text{dx}}\text{(xcosy+sinx)=-siny-ycosx}\Rightarrow\frac{\text{dy}}{\text{dx}}=\frac{\text{-siny-ycosx}}{\text{xcosy+sinx}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}}=-0.6273$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : y-0.524=-0.627(x-0.785)

ΘΕΜΑ 3

A. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: $\int x^3e^{2x}dx$ και $\int\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

B. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη: $y^2=x^2-x^4$



Λύση

A) $\int x^3e^{2x}dx=\int x^3\frac{d(e^{2x})}{2}=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}3x^2dx$

$\int e^{2x}x^2dx=\int x^2\frac{d(e^{2x})}{2}=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}2xdx=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\int xe^{2x}dx$

$\Rightarrow\int x^3e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}\int x\,d(e^{2x})=$

$\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{4}\int e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}\int d(e2x)=$

$(\frac{x^3}{2}-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8})e^{2x}+C$

$x^3+x^2-6x=x(x^2+x-6)=x(x-2)(x+3)$

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$$
$$A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) = x+1 \Rightarrow$$
$$A(x^2-2x+3x-6) + Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - 2Cx = x+1 \Rightarrow$$
$$x^2(A+B+C) + x(A+3B-2C) - 6A = x+1 \Rightarrow$$
$$A+B+C=0,\ A+3B-2C=1,\ -6A=1$$

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{6},\ B = \frac{3}{10},\ C = \frac{-2}{15}$$
$$\Rightarrow \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} = \frac{-1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{-1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$$

Β) $y^2 = x^2 - x^4 = x^2(1-x^2) \Rightarrow y = \pm x\sqrt{1-x^2},\ x^2 \le 1$

Λόγω συμμετρίας τα 4 εμβαδά που ορίζονται από την καμπύλη και τους άξονες είναι ίσα, συνεπώς το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{1/2}d(x^2)}{2} = -2\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}d(1-x^2) =$$

$$-2\left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{(\frac{3}{2})}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}\left[0-1^{3/2}\right] = \frac{4}{3}$$