

2^η ΕΡΓΑΣΙΑ

Άσκηση 1.

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων συναρτήσεων σε χαρτί μιλιμετρέ αφού πρώτα φτιάξετε τους πίνακες των τιμών τους.

$$\alpha) y = \frac{1}{x}, \beta) y = \frac{1}{x-1}, \gamma) y = \frac{x}{x-1}, \delta) y = -\frac{1}{(x-1)^2}, \epsilon) y = \frac{x^2}{x-1}$$

Να προσδιοριστούν γραφικά και με υπολογισμό οι ασύμπτωτες όπου υπάρχουν.

(Μονάδες 5)

Άσκηση 2.

α) Να οριστεί το λ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x - 1, & x < 2 \\ \lambda x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

β) Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x+3|}, & x \neq -3 \\ 1, & x = -3 \end{cases}$$

$$\gamma) \text{ Έστω η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \sin x + \alpha \cos x + 1, & 0 \leq x \end{cases}$$

Για ποιές τιμές των α, β η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} ;

(Μονάδες 10)

Άσκηση 3.

Να υπολογιστούν τα κάτωθι όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}, \text{ για } x \neq 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4 + 1)^{\frac{1}{4}} - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}, \text{ για } x \neq 0$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

(Μονάδες 10)

Άσκηση 4.

$$A) \text{ Να αποδειχθεί ότι: } \sin \theta \sin \phi = \frac{\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)}{2}.$$

B) Να αποδειχθεί ότι: $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.

Γ) Δίνεται η συνάρτηση: $I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin([\pi a \sin \theta]/\lambda)}{[\pi a \sin \theta]/\lambda} \right]^2$, $0 < \theta < \pi$

I) Για ποια τιμή του $\sin \theta$ προκύπτει $I(\theta) = 0$.

II) Να βρείτε όλες τις τιμές της γωνίας $\theta > 0$ για τις οποίες $I(\theta) = 0$.

III) Να επαληθεύσετε ότι $I(\theta) \rightarrow I_0$ όταν $[\pi a \sin \theta]/\lambda$ τείνει στο μηδέν.

Σημείωση: Η ανωτέρω συνάρτηση είναι πολύ χρήσιμη στη Φυσική γιατί δίνει την ένταση φωτός μήκους κύματος λ όταν περιθλάται μέσω σχισμής πλάτους a ενώ θ είναι η γωνία διάδοσης του φωτός μετά την διέλευσή του από τη σχισμή, σε σχέση με την αρχική διεύθυνση διάδοσής του.

(Μονάδες 10)

Άσκηση 5.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης: $y = \sin(x^2) + \sin^2 x$

β) Επίσης της: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

γ) Αν $y = f(x)$ να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ όταν

I) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$ και II) $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$

δ) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της: $y = f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

ε) Να δείξετε ότι η $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ είναι λύση της εξίσωσης: $4y''' - 12y'' - 15y' - 4y = 0$

Υπόδειξη: Υπολογίστε την πρώτη, δεύτερη και τρίτη παράγωγο και αντικαταστήστε στην εξίσωση.

(Μονάδες 15)

Άσκηση 6.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sin x \sin 3x dx$

β) $\int \frac{2x-3}{x^2-x-2} dx$

γ) $\int \frac{2x^3-8x^2+9x+1}{x^2-4x+4} dx$

δ) $\int e^x \cos x dx$

ε) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx$

στ) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$

ζ) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

(Μονάδες 15)

Άσκηση 7.

α) Εάν $f(t)=\sin 2t\hat{i}+\cos 2t\hat{j}+\sqrt{t}\hat{k}$, να βρείτε την $f'(t)$ και την $f''(t)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t)=A \sin \omega t\hat{i}+B \cos \omega t\hat{j}$, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0$$

γ) Βρείτε τη διανυσματική συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f'(t)=\hat{i}+t^3\hat{j}+(\frac{1}{1+t^2})\hat{k} \text{ και } f(0)=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

(Μονάδες 5)

Άσκηση 8.

Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-5}{x-3}$

(Μονάδες 5)

Άσκηση 9.

1.) Να ευρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται:

α) Από την $f(x)=4x^2+2$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

β) Από τις $f(x)=2-x^2$ και $g(x)=x^2$

γ) Από την ευθεία $y=x+2$ και την καμπύλη $y=x^2$

δ) Από την $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1, 2]$.

2) Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{3}$ και $\int_1^2 f(x)dx = \frac{31}{3}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τον άξονα των x , την καμπύλη $f(x)$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

Σε κάθε περίπτωση να κάνετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις.

(Μονάδες 15)

Άσκηση 10

A) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2,4)$ και εφάπτεται της ευθείας $3x+4y-12=0$. Να υπολογιστούν επίσης οι συντεταγμένες του σημείου επαφής.

B) Δίδεται η έλλειψη: $9x^2+16y^2=576$. Να βρεθούν τα μήκη του μεγάλου και μικρού ημιάξονα, η εκκεντρότης, οι συντεταγμένες των εστιών.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μια κορυφή το σημείο $A(6,0)$ και της οποίας μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση: $4x-3y=0$. Βρείτε επίσης την εστιακή απόσταση γ και την εκκεντρότητα της υπερβολής.

(Μονάδες 10)