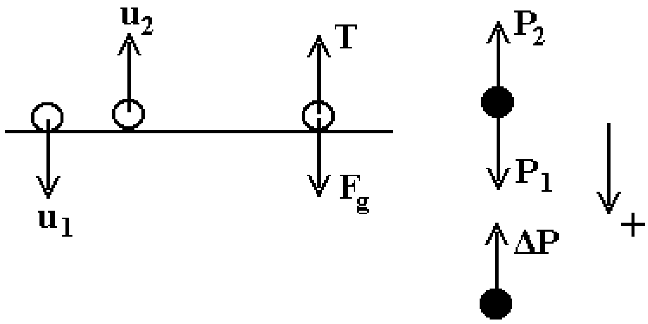
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2004

$2^{η}$ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Σφαίρα μάζας m=2Kg προσκρούει με κατακόρυφη ταχύτητα u_1=10m/s σε οριζόντιο δάπεδο και αναπηδά με ταχύτητα u_2=6m/s. Η διάρκεια επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι Δt=0.1s. Να υπολογιστεί α) η μεταβολή της ορμής της σφαίρας και β) η μέση δύναμη, που δέχεται η σφαίρα από το δάπεδο. (Δίνεται g=10m/s^2).



__Λύση__

α) Λόγω του νόμου της διατήρησης της ορμής θα έχουμε $\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$. Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$ και η σχέση γράφεται $\Delta P= -P_2-(+P_1)= -mu_2-mu_1= -32$Kgm/s. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η $\Delta\mathbf{P}$ είναι αντίθετη της φοράς του $\mathbf{P}_1$ (την οποία θεωρήσαμε θετική).

β) Στη διάρκεια επαφής της με το δάπεδο, η σφαίρα δέχεται μια μέση δύναμη από το δάπεδο T ($F_g=mg$ είναι η δύναμη βαρύτητας) , οπότε $\sum\mathbf{F}=\mathbf{F}_g+\mathbf{T}\rightarrow \sum F=F_g-T$.

Ισχύει ότι $\sum\mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{P}}{dt}\rightarrow\sum F=\dfrac{-32\,\text{Kgm/s}}{0.1\text{s}}=-320\,\text{N}$. Επομένως, η μέση δύναμη

$T=F_g-\sum F=2\cdot 10-(-320)=340\,\text{N}$.

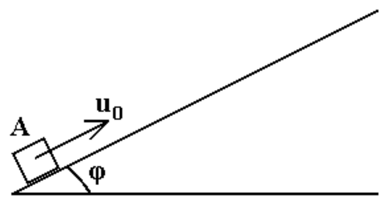
2. Με ποιο τρόπο θα μπορέσει να κινηθεί ένας άνθρωπος, που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο;

__Λύση:__

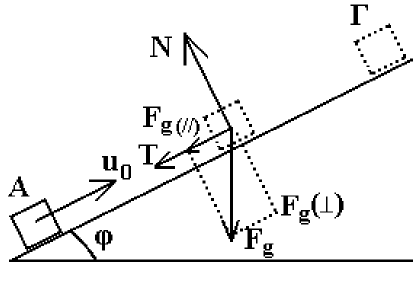
Θα πρέπει να ρίξει ένα σώμα που κρατά, σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη που θέλει να κινηθεί. Τότε, για το μονωμένο σύστημα άνθρωπος–σώμα θα ισχύει η αρχή διατήρηση της ορμής $\mathbf{P}_{αρχ}-\mathbf{P}_{τελ}=0\rightarrow$

$m_{αρχ}u_{αρχ}-m_{τελ}u_{τελ}=0\rightarrow u_{αρχ}=\dfrac{m_{τελ}u_{τελ}}{m_{αρχ}}$.

3. Σώμα εκτοξεύεται ως προς την κλίση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ=45^o και με ταχύτητα u_0=15m/s. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ=0.8, να υπολογισθεί α) το διάστημα s, που θα διανύσει το σώμα ανεβαίνοντας και β) το μέτρο της ταχύτητας u με την οποία θα διέλθει το σώμα από το σημείο βολής. (Δίνονται g=10m/s^2, ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{στ}$=0.9).



__Λύση:__



α) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση A. Υποθέτουμε ότι μετά την εκτόξευση, το σώμα θα φθάσει στην ανώτερη θέση $Γ$.

Από το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε ότι:

$K(Γ)-K(A)=W_{Fg}+W_T+W_N$, (1)

όπου $W_{Fg(//)}=-mgs\cdot\sin\varphi$ και $W_{Fg(\perp)}=0$, $W_T=-T\cdot s=-\mu N\cdot s=-\mu mg\cos\varphi\cdot s$ και W_N=0 επειδή $\mathbf{N}\perp\mathbf{s}$.

$K(Γ)=0$ και $K(A)=\dfrac{1}{2}mu_0^2$ (2).

Αν αντικαταστήσω τη σχέση (2) στην (1) προκύπτει

$$-\frac{1}{2}mu_0^2 = -mgs\cdot\sin\phi - \mu mgs\cdot\cos\phi \to \ s = \frac{u_0^2}{2g(\sin\phi + \mu\cos\phi)} = \frac{225}{20(0.707+0.8\cdot 0.707)} = 8.84\,\text{m}\,.$$

β) Κατεβαίνοντας το σώμα από το σημείο *Γ* προς το *Α* θα ισχύει αναλογικά

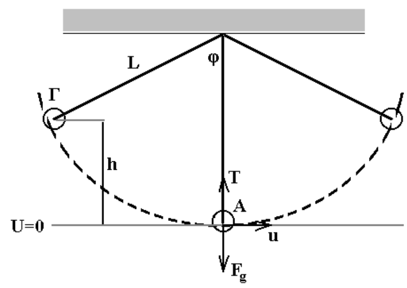
$K'(A) - K'(\Gamma) = W'_{\mathrm{Fg}} + W'_{\mathrm{T}} + W'_{\mathrm{N}}$, (3)

$$\frac{1}{2}mu^2 - 0 = mgs\cdot\sin\phi - \mu mgs\cdot\cos\phi \to$$

$$u = \sqrt{2gs(\sin\phi - \mu\cos\phi)} = \sqrt{20\cdot 8.84(0.707 - 0.8\cdot 0.707)} = 5\,\text{m/s}\,.$$

<u>Παρατήρηση:</u> για να μπορέσει να κατέβει το σώμα θα πρέπει $F_{g(//)} > T_{max}$ όπου ή T_{max} είναι η δύναμη τριβής με φορά αντίθετη προς την κίνηση του σώματος. Προκύπτει η ανισότητα $mg\sin\varphi > \mu_\sigma mg\cos\varphi$ ή $\tan\varphi > \mu_\sigma$, η οποία πράγματι ισχύει επειδή $\tan\varphi = \tan 45 = 1$ και $\mu_\sigma = 0.9$.

4. Σφαιρίδιο που αιωρείται από λεπτό και αβαρές νήμα ηρεμεί αρχικά στη θέση *Α*. Φέρεται στη θέση *Γ* και αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σφαιριδίου και η τάση του νήματος τη στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση *Α*. (Δίνονται m=1Kg, g=10m/s^2, L=1m, φ=45^o).



<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε το επίπεδο που βρίσκεται το σημείο *Α* ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Λόγω της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας θα πρέπει $E(\Gamma)=E(A) \to K(\Gamma)+U(\Gamma)=K(A)+U(A)$ ή

$0 + mgh = \frac{1}{2}mu^2 + 0 \to u = \sqrt{2gh}$. Επειδή $h=L-L\cos\varphi$ προκύπτει τελικά ότι $u = \sqrt{2gL(1-\cos\phi)} =$

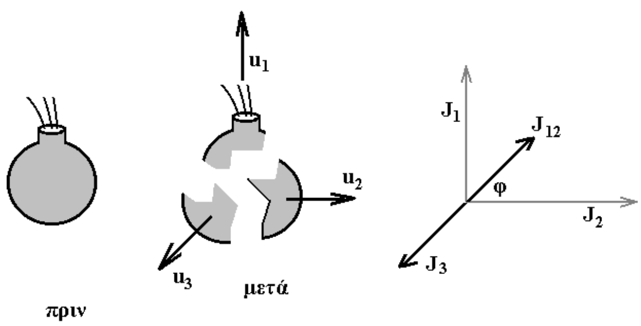
$u = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1(1-\cos 45)} = 2.42\,\text{m/s}$. Όταν το σφαιρίδιο εκτελεί προσεγγιστικά κυκλική κίνηση, επομένως η συνισταμένη ακτινικών δυνάμεων θα είναι η κεντρομόλος δύναμη. Στο σημείο *Α* θα ισχύει ότι

$$\sum F = \frac{mu^2}{L} \to T - F_g = \frac{mu^2}{L} \to T = mg + \frac{mu^2}{L} \to \ T = 1\cdot 10 + \frac{1\cdot 5.86}{1} = 15.86\,\text{N}\,.$$

5. Βόμβα είναι ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κάποια στιγμή εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Τα δυο κομμάτια με μάζες m_1=2Kg και m_2=3Kg κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με ταχύτητες μέτρων u_1=40m/s και u_2=20m/s αντίστοιχα. Αν το τρίτο κομμάτι έχει μάζα m_3=5Kg, να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητάς του.

<u>Λύση:</u>

Από την αρχή της διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι $\mathbf{J}_{ολ}$=σταθ. $\to$ $\mathbf{J}_{πριν}=\mathbf{J}_{μετα}$. Αλλά $\mathbf{J}_{πριν}=0$, ενώ για το σύστημα των τριών σωμάτων ισχύει $\mathbf{J}_{μετα}=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2+\mathbf{J}_3=0$, όπου $\mathbf{J}_1=m_1\mathbf{u}_1=2\cdot 40=80$Kgm/s και $\mathbf{J}_2=m_2\mathbf{u}_2=3\cdot 20=60$Kgm/s. Για το σύστημα των δυο σωμάτων m_1 και m_2 ισχύει



$$\mathbf{J}_{1,2} = \sqrt{\mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2} = \sqrt{6400+3600} = 100\,\text{Kgm/s}$$

και $\tan\phi = \dfrac{J_1}{J_2} = \dfrac{80}{60} = 1.33$ ή φ=53° 8΄. Για το σύστημα δυο σώματα–τρίτο σώμα ισχύει $\mathbf{J}_3$+$\mathbf{J}_{1,2}$=0, άρα

J_3=100Kgm/s $\to$ $J_3 = m_3 u_3 \to u_3 = \dfrac{J_3}{m_3} = \dfrac{100}{5} = 20\,\text{m/s}$.

6. Δύο τροχοί με ακτίνες R_1= 0.25m και R_2= 0.5m συνδέονται με ιμάντα. Αν ο μικρός τροχός συνδεθεί με κινητήρα που τον περιστρέφει με συχνότητα 120 στροφές το λεπτό, να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής του μεγάλου τροχού.

Λύση:

Κατ' αρχήν, έχουμε: $f_1 = 120\dfrac{\text{στρ}}{\text{min}} = 120\dfrac{\text{στρ}}{60\text{s}} = 2\dfrac{\text{στρ}}{\text{s}} = 2\,\text{Hz}$. Αφού οι δύο τροχοί συνδέονται με ιμάντα, τα σημεία της περιφέρειάς τους θα κινούνται με κοινή γραμμική ταχύτητα. Έτσι,

$\upsilon_1 = \upsilon_2 \Rightarrow 2\pi R_1 f_1 = 2\pi R_2 f_2 \Rightarrow f_2 = \dfrac{R_1}{R_2} f_1 = \dfrac{0.25}{0.5} 2\,\text{Hz} = 1\,\text{Hz}$ (**60 στροφές το λεπτό).**

7. Ένα σώμα βάλλεται από το έδαφος με γωνία *φ* ως προς τον ορίζοντα και αρχική ταχύτητα υ_0. Το *Α* είναι το υψηλότερο σημείο της τροχιάς του, ενώ τα σημεία *Β* και *Γ* βρίσκονται στο ίδιο ύψος (χαμηλότερα του *Α*). Το σώμα προσκρούει στο έδαφος στο σημείο *Δ*. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές:

(α) Η ταχύτητα στο *Α* είναι μηδέν.

(β) Η κεντρομόλος επιτάχυνση στο *Α* είναι *g*.

(γ) Η ταχύτητα στο σημείο *Β* είναι ίση με αυτή στο σημείο *Γ*.

(δ) Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο *Β* είναι ίση με την αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο *Δ*.

(ε) Οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας στα σημεία *Β* και *Γ* είναι ίσες.

(στ) Η ολική ενέργεια του σώματος στο σημείο *Α* είναι ίση με την κινητική ενέργεια του σώματος στο σημείο *Δ*.

Λύση:

(α) Λάθος: Η ταχύτητα στο Α δεν είναι μηδέν αλλά ίση με τη σταθερή οριζόντια συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας.

(β) Σωστό: Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας και επειδή στο *Α* η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα, η κεντρομόλος επιτάχυνση ισούται με *g*.

(γ) Λάθος: Το μέτρο της ταχύτητας στα σημεία *Β* και *Γ* είναι το ίδιο, αλλά η διεύθυνση της ταχύτητας είναι διαφορετική.

(δ) Σωστό: Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας δε μεταβάλλεται.

(ε) Λάθος: Το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας στα σημεία *Β* και *Γ* είναι το ίδιο, αλλά η διεύθυνση του διανύσματος είναι διαφορετική.

(στ) Σωστό: Η ολική ενέργεια στο σημείο *Α* είναι ίση με την ολική ενέργεια στο σημείο *Δ*, όπου η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι μηδέν.

8. Υλικό σημείο κινείται στον άξονα *Ox* υπό την επίδραση δύναμης $F= -kx^3$ όπου *x* η συντεταγμένη του σημείου. α) Πόσο είναι το έργο της δύναμης μεταξύ των θέσεων *x=α και x=β*; β) Το έργο τούτο είναι ίσο με το έργο που παράγεται μεταξύ των θέσεων *x=α+λ* και *x=β+λ*; γ) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος αν δια *x*=0 ισχύει *U* =0;

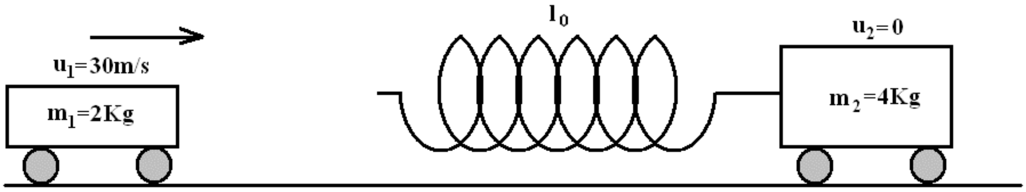
Λύση:

α) $W_1=\int\limits_a^b F\cdot \mathrm{d}x=-\int\limits_a^b kx^3\,\mathrm{d}x=-\left.\dfrac{kx^4}{4}\right|_a^b=-\dfrac{1}{4}kb^4+\dfrac{1}{2}ka^4$.

β) $W_2=\int\limits_{a+\lambda}^{b+\lambda} F\cdot \mathrm{d}x=-\int\limits_{a+\lambda}^{b+\lambda} kx^3\,\mathrm{d}x=-\left.\dfrac{kx^4}{4}\right|_{a+\lambda}^{b+\lambda}=-\dfrac{1}{4}k(b+\lambda)^4+\dfrac{1}{2}k(a+\lambda)^4$ άρα $W_1\neq W_2$.

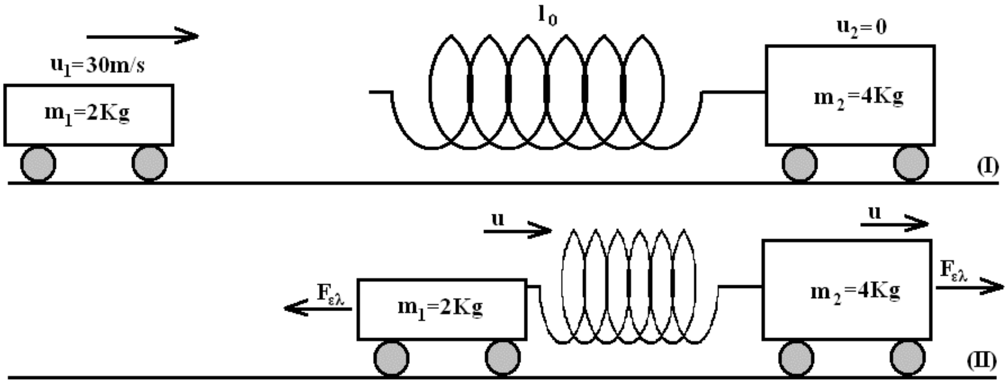
γ) $U_0-U=\int F\cdot \mathrm{d}x=-\int\limits_0^x kx^3\,\mathrm{d}x=-\left.\dfrac{kx^4}{4}\right|_0^x$. Για x=0, U=0 και U_0=0 και επομένως $U=+\dfrac{1}{4}kx^4$.

9. Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο βρίσκεται ακίνητη η μάζα =4Kg στην οποία είναι δεμένη η μια άκρη του ελατηρίου σταθεράς k=3N/m. Η μάζα m_1=2Kg κινείται με ταχύτητα μέτρου u_1=30m/s στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Να μελετήσετε την κίνηση των δυο μαζών και να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $E_\Delta(\varepsilon\lambda)=f(t)$, $F_{\varepsilon\lambda}=f(l)$ και $E_\Delta(\varepsilon\lambda)=f(l)$.



Λύση

α) Η μάζα m_1 φθάνει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου με ταχύτητα $\mathbf{u}_1$ και αρχίζει να το συμπιέζει. Συμπιεσμένο το ελατήριο ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου $F_{\varepsilon\lambda}=k\Delta l$. Η μάζα m_1 επιβραδύνεται, όχι ομαλά επειδή η δύναμη $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει αντίθετη φορά της ταχύτητάς της και είναι μεταβλητή. Η μάζα m_2 επιταχύνεται (όχι ομαλά). Εφόσον $\mathbf{u}_1>\mathbf{u}_2$, τα δυο σώματα πλησιάζουν μεταξύ τους και το ελατήριο θα συμπιέζεται. Αφού η $\mathbf{u}_1$ θα ελαττώνεται και η $\mathbf{u}_2$ θα αυξάνει, σε κάποια στιγμή θα γίνουν ίσες. Στη θέση αυτή θα έχουμε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου. Στην επόμενη ακριβώς στιγμή τα σώματα απομακρύνονται μεταξύ τους και το ελατήριο τείνει να αποκτήσει το φυσικό του μήκος.



Καθ' όλη τη διάρκεια, το σύστημα μαζών–ελατηρίου είναι μονωμένο και ισχύει ο νόμος της διατήρησης της ορμής και της μηχανικής ενέργειας (εφόσον τριβές δεν υπάρχουν).

Από τα διαγράμματα (I) και (II) έχουμε $\mathbf{J}_{(I)}=\mathbf{J}_{(II)}$ $\rightarrow$ $m_1u_1+0=m_1u+m_2u$ ή

$u=\dfrac{m_1u_1}{m_1+m_2}\rightarrow u=\dfrac{2\cdot 30}{2+4}=10\ \mathrm{m/s}$. Επίσης έχουμε $E_{\mu\eta\chi}^{(\mathrm{I})}=E_{\mu\eta\chi}^{(\mathrm{II})}\rightarrow$

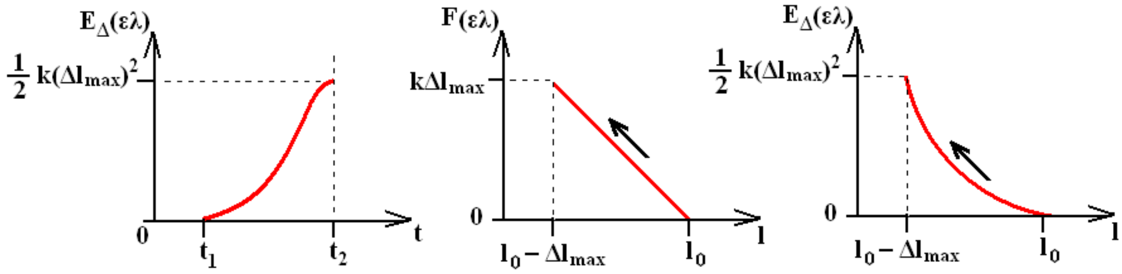
$E_{\kappa\iota\nu}^{(\mathrm{I})}(m_1)+E_{\kappa\iota\nu}^{(\mathrm{I})}(m_2)+E_{\delta\upsilon\nu}^{(\mathrm{I})}(\varepsilon\lambda)=E_{\kappa\iota\nu}^{(\mathrm{II})}(m_1)+E_{\kappa\iota\nu}^{(\mathrm{II})}(m_2)+E_{\delta\upsilon\nu}^{(\mathrm{II})}(\varepsilon\lambda)\rightarrow$ ή

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}2\cdot 900 = \frac{1}{2}2\cdot 100 + \frac{1}{2}4\cdot 100 + \frac{1}{2}300\cdot \Delta l_{max}^2 \rightarrow$$

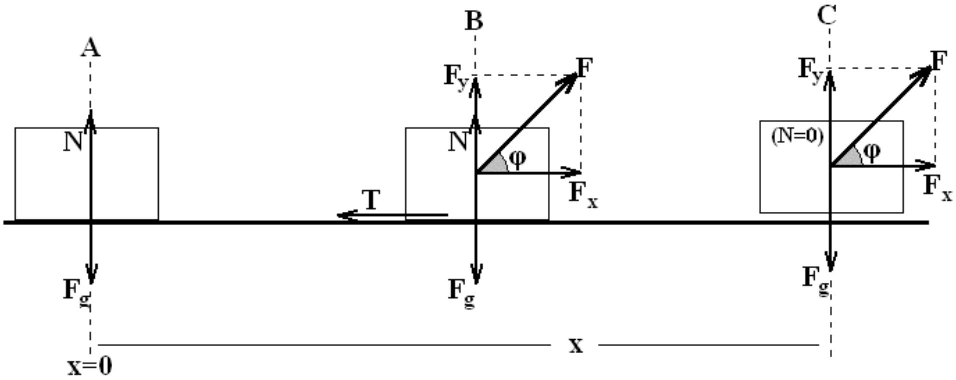
$$\Delta l_{max}^2 = \frac{9-1-2}{1.50} = 4 \rightarrow \Delta l_{max} = 2\text{ m} .$$

β) Αν τη στιγμή t_1 η μάζα m_1 έρχεται σε επαφή με το ελατήριο και τη στιγμή t_2 στο ελατήριο έχουμε τη μέγιστη συμπίεση, τότε οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται ως εξής.



10. Σε κιβώτιο μάζας *m*=10Kg, που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται μεταβλητή δύναμη F που έχει σταθερή διεύθυνση και σχηματίζει με το επίπεδο γωνία φ=30°. Η δύναμη έχει μέτρο που εκφράζεται από τη σχέση *F*=20+20*x* από την αρχική θέση του κιβωτίου και *x* είναι ο οριζόντιος άξονας του επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής μ=0.1, να υπολογιστεί το έργο W_F της δύναμης *F* και το έργο της δύναμης τριβής W_T από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που το κιβώτιο χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο. (Δίνεται *g*=10m/s²).

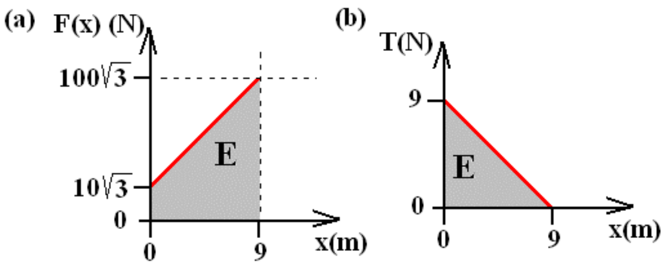
Λύση:



Το κιβώτιο αρχικά ηρεμεί στη θέση *A*. Με την εφαρμογή της δύναμης **F** και σε μια τυχαία θέση *B* η δύναμη **F** αναλύεται σε δυο συνιστώσες F_x, F_y όπου $F_x = F\cos\phi = (10+10x)\sqrt{3}$ και $F_y = F\sin\phi = (10+10x)$ [Προσοχή, ο αριθμός 10 δεν είναι αδιάστατο μέγεθος]! Το κιβώτιο θα χάσει την επαφή του με το επίπεδο στη θέση *C* όπου F_y=F_g (επειδή *N*=0) ή 10+10x=100 → *x*=9m. [Υπόδειξη: οι μονάδες στην προηγούμενη σχέση είναι F_y(N)=10(N)+10(N/m)·x(m)=100(N)].

Για όσο διάστημα, το κιβώτιο βρίσκεται σε επαφή με το επίπεδο θα ισχύει:

$T=\mu N=\mu(F_g-F_y)$ ή $T=0.1(100-10-10x)=9-x$.



Όταν το κιβώτιο χάσει την επαφή με το επίπεδο, τότε θα ισχύει *T*=0 επειδή *N*=0.

Το έργο που θα έχει καταναλωθεί από τη δύναμη **F** θα είναι $W_F=W_{Fx}$=εμβαδόν$F_x(x)$=

$$= \frac{1}{2}90\sqrt{3}\cdot(9-0)+10\sqrt{3}(9-0) = \frac{110\sqrt{3}}{2}(9-0) = 495\sqrt{3}\ \text{Joule} = 857.4\ \text{Joule}$$

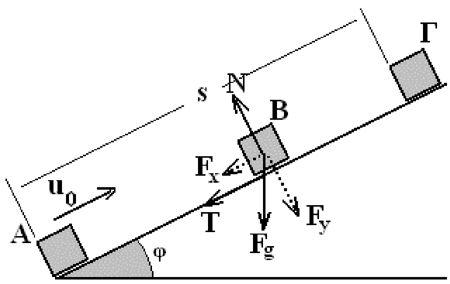
(βλέπε Σχήμα a).

Το έργο που θα έχει καταναλωθεί από τη δύναμη τριβής **T** θα είναι W_T=–εμβαδόν$T(x)$=

$= -\frac{1}{2}9\cdot 9 = -40.5\ \text{Joule}$ (βλέπε Σχήμα b).

11. Σώμα βάλλεται προς τα πάνω κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ=45^o και με ταχύτητα u_0=15m/s. Αν ο συντελεστής ολίσθησης είναι μ=0.8, να υπολογίσετε α) το διάστημα *s* που θα διανύσει το σώμα ανεβαίνοντας, β) το μέτρο της ταχύτητας *u* με την οποία θα επιστρέψει το σώμα στο σημείο βολής. (Δίνεται *g*=10m/s^2).

<u>Λύση:</u>



α) Το σώμα ξεκινά από τη θέση *Α* και φθάνει στη θέση *Γ*. Από το θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΘΔΜΕ) έχουμε

$E_M^{(A)} = E_M^{(\Gamma)} \to E_K^{(\Gamma)} - E_K^{(A)} = W_{Fg} + W_T + W_N$,

όπου $E_K^{(\Gamma)} = 0$, $E_K^{(A)} = \frac{1}{2}mu_0^2$,

$W_{Fg} = W_{Fx} + W_{Fy} = -mgs\sin\phi + 0$, $W_{Fy} = 0$ επειδή $\mathbf{F}_y \perp \mathbf{s}$, $W_T = -T\cdot s = -\mu mgs\cos\phi$.

Επομένως, $0 - \frac{1}{2}mu_0^2 = -mgs\sin\phi - \mu mgs\cos\phi \to$

$$s = \frac{u_0^2}{2g(\mu\cos\phi + \sin\phi)} = \frac{225}{2\cdot 10(0.8\cos 45 + \sin 45)} = \frac{25\sqrt{2}}{4} = 8.84\ \text{m} .$$

β) Για να μπορέσει το όχημα να κατέβει θα πρέπει η $F_x>T$ ή $mgs\sin\phi > \mu mgs\cos\phi \to \tan\phi > \mu$. Κατεβαίνοντας το σώμα θα φθάσει στο σημείο *Α* με ταχύτητα **u**. Λόγω του (ΘΔΜΕ: *Γ*→*Α*) $E_K^{(A)} - E_K^{(\Gamma)} = W_{Fg} + W_T + W_N$, όπου $E_K^{(\Gamma)} = 0$, $E_K^{(A)} = \frac{1}{2}mu^2$, $W_{Fg} = W_{Fx} + W_{Fy} = mgs\sin\phi + 0$, $W_{Fy} = 0$ επειδή $\mathbf{F}_y \perp \mathbf{s}$, $W_T = -T\cdot s = -\mu mgs\cos\phi$. Επομένως, $\frac{1}{2}mu^2 - 0 = mgs\sin\phi - \mu mgs\cos\phi \to$

$$u^2 = 2gs(\sin\phi - \mu\cos\phi) \to u = \sqrt{2gs(\sin\phi - \mu\cos\phi)} =$$

$$u = \sqrt{2\cdot 10\cdot 8.84(\sin 45 - 0.8\cos 45)} = 5\ \text{m/s} .$$

12. Να αποδειχθεί ότι το θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΘΔΜΕ) ισχύει για κάθε σύστημα αναφοράς, που κινείται με σταθερά ταχύτητα. (Υπόδειξη: Το θεώρημα αυτό μπορεί να εκφρασθεί με το εξής παράδειγμα. Μάζα *m* ηρεμεί σε τραίνο που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{u}_1$ ως προς το έδαφος. Στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη F για χρόνο *t* με την ίδια κατεύθυνση του τραίνου. Να εξετασθεί η περίπτωση ενός παρατηρητή κινούμενου μαζί με το τρένο και ενός άλλου παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος).

<u>Λύση:</u>

Παρατηρητής στο τραίνο:

Σε χρόνο t το σημείο εφαρμογής της δύναμης **F** έχει μετατοπιστεί όσο μετατοπίστηκε το σώμα πάνω στο τρένο. Ισχύει $W_F = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = F\cdot\frac{1}{2}at^2 = F\cdot\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{F^2t^2}{2m}$ (1).

$\Delta E_K = E_K^{\tau\varepsilon\lambda} - E_K^{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mu^2 - 0$, επειδή $u = at = \frac{F}{m}t$ προκύπτει $\Delta E_K = \frac{F^2t^2}{2m}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta E_K = W_F$.

Παρατηρητής στο έδαφος:

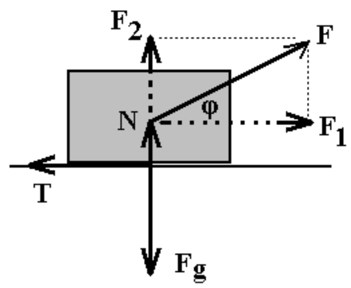
Σε χρόνο t το σημείο εφαρμογής της δύναμης **F** έχει μετατοπιστεί κατά διάστημα $s_{o\lambda} = s_1 + s =$ $= u_1t + \frac{1}{2}at^2$ ή $s_{o\lambda} = u_1t + \frac{Ft^2}{2m}$. Το έργο που προκαλείται από τη δύναμη **F** είναι $W_F = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}_{o\lambda} = Fu_1t + \frac{F^2t^2}{2m}$ (3).

Στην αρχική θέση, το σώμα έχει την ταχύτητα του τρένου, δηλαδή $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_1$ και στην τελική θέση $\mathbf{u}_{\tau\varepsilon\lambda}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}$. $\Delta E_K = E_K^{\tau\varepsilon\lambda} - E_K^{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m(u_1+u)^2 - \frac{1}{2}mu_1^2$ ή $\Delta E_K = Fu_1t + \frac{F^2t^2}{2m}$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $\Delta E_K = W_F$.

13. Κιβώτιο μάζας *m*=10Kg κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης *F*. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι *μ*=0.4, να υπολογιστούν α) η ελάχιστη δύναμη που απαιτείται για τη μετακίνηση και β) το ελάχιστο έργο που δαπανάται για να μετακινηθεί το σώμα κατά απόσταση *s*=10m. (Δίνεται *g*=10m/s^2).

Λύση:



α) Η δύναμη F επιδρά στο κιβώτιο υπό γωνία φ, όπου $-90^o < \varphi < 90^o$.
Επειδή **u**=σταθερό $\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow F_1 - T = 0 \rightarrow F\cos\phi = T$ (1).
Επειδή $T = \mu N = \mu(F_g - F_2) = \mu(F_g - F\sin\phi)$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $F(\cos\phi + \mu\sin\phi) = \mu mg$ ή $F = \frac{\mu mg}{(\cos\phi + \mu\sin\phi)}$. Επειδή μ είναι πραγματικός αριθμός, θα υπάρχει κάποια γωνία θ για την οποία θα ισχύει $\tan\theta=\mu$, οπότε $\cos\phi + \mu\sin\phi = \cos\phi + \tan\theta\sin\phi = \cos\phi + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\phi \rightarrow \cos\phi + \mu\sin\phi = \frac{\cos(\phi-\theta)}{\cos\theta}$. Επομένως,

$$F = \mu mg\frac{\cos\theta}{\cos(\phi-\theta)} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{1}{\cos(\phi-\theta)} \quad (3) \quad \text{επειδή } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Η σχέση (3) παρουσιάζει ελάχιστο όταν ο παρονομαστής γίνει μέγιστος, δηλαδή $\cos(\phi-\theta) = 1 \rightarrow \phi = \theta$ και $F_{\min} = \frac{0.4\cdot 10\cdot 10}{\sqrt{1+0.16}} = 37.14\,\text{N}$. Σε αυτή την περίπτωση $\varphi=21.8^o$ επειδή $\varphi=\theta$ και $\tan\theta=\mu=0.4$.

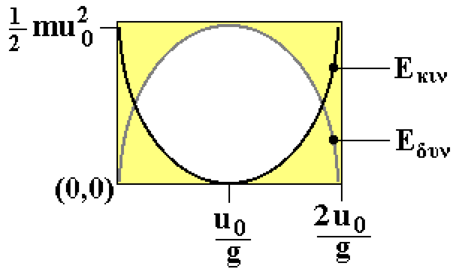
β) Το έργο υπολογίζεται από τη σχέση $W_{\min} = F_{\min}\cdot\cos\phi\cdot s = 37.14\cdot 0.93\cdot 10 \approx 345\,\text{Joule}$.

14. Σώμα μάζας *m* εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα u_0. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο και στο ίδιο σύστημα αξόνων την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του σώματος.

Λύση:

Ισχύει η σχέση $u = u_0 - gt$ και στο μέγιστο ύψος u=0 → $t = \frac{u_0}{g}$.Όταν το σώμα επιστρέψει στο σημείο βολής, τότε u=–u_0 και t=$t_{ολ}$, οπότε $-u_0 = u_0 - gt_{ολ} \to t_{ολ} = \frac{2u_0}{g}$. Άρα, $0 \le t \le \frac{2u_0}{g}$.

$E_{κιν} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m(u_0 - gt)^2$ (1). Η σχέση αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το χρόνο t.



Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του, οπότε ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, δηλαδή

$E_{κιν} + E_{δυν} = \frac{1}{2}mu_0^2 \to E_{δυν} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}mu^2$ ή

$E_{δυν} = mu_0gt - \frac{1}{2}mg^2t^2$ (2).

Οι σχέσεις (1) και (2) απεικονίζονται στη γραφική παράσταση.

15. Αβαρές νήμα, σταθερού μήκους τυλίγεται αρκετές φορές γύρω από ένα συμπαγή, ομογενή κύλινδρο μάζας *M*=5kg και διαμέτρου 2*R*=0.1m, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν ακλόνητο άξονα. Το ελεύθερο άκρο του νήματος έλκεται με σταθερή δύναμη μέτρου *F*=10N για μια απόσταση *d*=2m. Αν ο κύλινδρος ήταν αρχικά ακίνητος να υπολογιστούν: (α) Η τελική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου. (β) Η τελική ταχύτητα του νήματος.

Λύση:

α) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι ίση με το παραγόμενο έργο από τη μετατόπιση του νήματος $\Delta E_K = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = W = Fd$ με $I = \frac{1}{2}MR^2$, απ' όπου προκύπτει

$\omega = \sqrt{\frac{4Fd}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 2}{5(0.05)^2}} = 80\,\text{rad/s}$.

β) Από τη σχέση που συνδέει τη γραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα προκύπτει

$\upsilon = \omega R = \sqrt{\frac{4Fd}{M}} = 4\,\text{m/s}$.