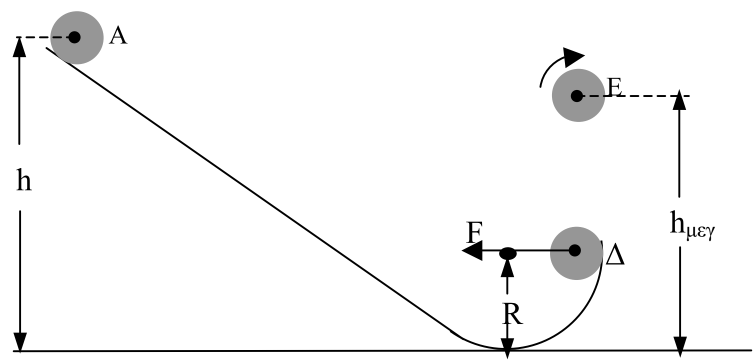
Ονοματεπώνυμο:
Τμήμα

Θέμα 1

A) Μικρός κοίλος κύλινδρος ακτίνας r=h/5 και μάζας m αφήνεται να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου από ύψος h, όπως στο σχήμα, και στη συνέχεια εισέρχεται σε τεταρτοκύκλιο ακτίνας R=h/3. Στο σημείο Δ εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο και ανυψώνεται μέχρι το σημείο Ε όπως δείχνει το σχήμα. Να υπολογιστούν α) η ταχύτητα του κυλίνδρου όταν βρίσκεται στο άκρο Δ του τεταρτοκυκλίου β) Η δύναμη (προέλευση και μέτρο) που δέχεται ο κύλινδρος όταν βρίσκεται στο άκρο Δ. γ) η γωνιακή ταχύτητα κύλισης του κυλίνδρου στο σημείο Δ δ) το μέγιστο ύψος $h_{μεγ}$ στο οποίο θα ανέλθει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου από το οριζόντιο επίπεδο. ε) δικαιολογείστε γιατί $h_{μεγ}< h$. Δίνεται η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=mr^2$ και το g.
70%



B) Ένα ψάρι κολυμπάει σε οριζόντιο επίπεδο και αρχικά (για t=0) έχει ταχύτητα $\vec{υ}_o = (4\hat{i}+\hat{j})$ m/s σε ένα σημείο του ωκεανού του οποίου η απόσταση από έναν ορισμένο βράχο είναι $\vec{r}_o = (10\hat{i}-4\hat{j})$ m. Αφού κολυμπήσει με σταθερή επιτάχυνση για 20.0 s, η ταχύτητά του γίνεται $\vec{υ} = (20\hat{i}-5\hat{j})$ m/s. Κατόπιν, για τα επόμενα 5 δευτερόλεπτα κινείται χωρίς επιτάχυνση. α) ποιες είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια των πρώτων 20 δευτερολέπτων; β) ποια είναι η κατεύθυνση αυτής της επιτάχυνσης σε σχέση με το μοναδιαίο διάνυσμα **i** γ) πού βρίσκεται το ψάρι στον χρόνο t=25s;
30%

<u>Λύση</u>
A) Αρχή διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις Α και Δ

$E_A=E_Δ \Rightarrow mgh = mg\frac{h}{3}+\frac{1}{2}mυ_Δ^2+\frac{1}{2}I\,ω_Δ^2$ Αλλά $υ_Δ=ω_Δ r$ επομένως

$mgh = mg\frac{h}{3}+\frac{1}{2}mυ_Δ^2+\frac{1}{2}m r^2\frac{υ_Δ^2}{r^2}$ οπότε $υ_Δ=\sqrt{\frac{2}{3}gh}$ (1)

β) Αν F είναι η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος στο σημείο Δ, η δύναμη αυτή είναι η κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή $F_Δ= F_K$ οπότε $F_Δ=\frac{mυ_Δ^2}{R-r}$ και λόγω της (1) έχουμε $F_Δ = \frac{2mgh}{3(R-r)}$

για $r = h/5$, προκύπτει F=5 mg

γ) η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου στο Δ είναι $\omega_\Delta = \upsilon_\Delta / r$ και λόγω της (1) $\omega_\Delta = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{3}gh}$ και για

$r = h/5$, δίνει $\omega_\Delta = 5\sqrt{\frac{2g}{3h}}$ (2)

δ) όταν ο κύλινδρος ξεφύγει από το σημείο Δ, αρχίζει να ανεβαίνει προς τα πάνω έχοντας σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_Δ και ταχύτητα υ που συνεχώς μειώνεται. Στο ύψος $h_{\mu\epsilon\gamma}$ η ταχύτητα υ μηδενίζεται

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις Α και Ε έχουμε

$mgh = \frac{1}{2}I\omega_\Delta^2 + mgh_{\mu\epsilon\gamma}$ και λόγω της (2) έχουμε $h_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{2}{3}h$

ε) Ο κύλινδρος δεν φτάνει στο ύψος h γιατί ένα μέρος της αρχικής δυναμικής του ενέργειας (U=mgh) μετατρέπεται σε περιστροφική ενέργεια του κυλίνδρου.

Β) $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \vec{\alpha}t \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_o}{t} = \frac{(20\hat{i} - 5\hat{j}) - (4\hat{i} + \hat{j})}{20} = \frac{16\hat{i} - 6\hat{j}}{20} = 0.8\hat{i} - 0.3\hat{j}\ (ms^{-2})$

Άρα $\alpha_x = 0.8\,\hat{i}\ ms^{-2}$, $\alpha_y = -0.3\ \hat{j}\ ms^{-2}$

β) $\theta = \tan^{-1}\frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.3}{0.8}\right) = -20.5^0$

γ) Στο τέλος των 20 δευτερολέπτων το ψάρι βρίσκεται στη θέση

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \Rightarrow \vec{r} = (10\hat{i} - 4\hat{j}) + (4\hat{i} + \hat{j})20 + \frac{1}{2}(0.8\hat{i} - 0.3\hat{j})\ 20^2 =$$

$$10\hat{i} - 4\hat{j} + 80\hat{i} + 20\hat{j} + 160\hat{i} - 60\hat{j} = 250\hat{i} - 44\hat{j}\ \text{m}$$

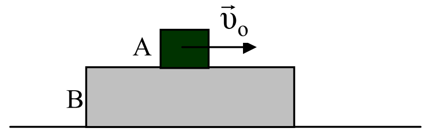
και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon} = (20\hat{i} - 5\hat{j})$ m/s

Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα επομένως

$$\vec{r}_\tau - \vec{r} = \vec{\upsilon}\,t \Rightarrow \vec{r}_\tau = 250\hat{i} - 44\hat{j} + (20\hat{i} - 5\hat{j})5 = 350\hat{i} - 69\hat{j}\ \text{m}$$

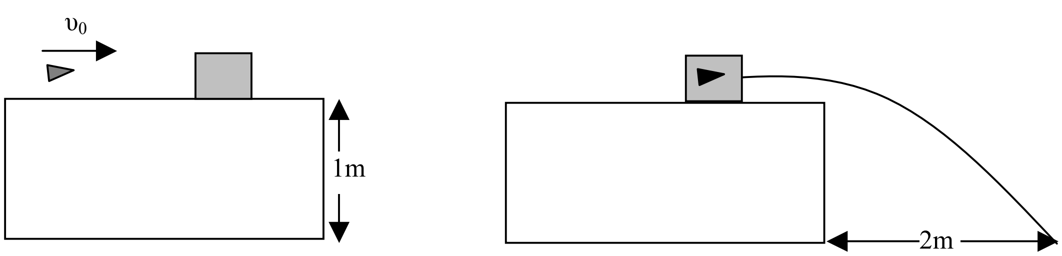
Θέμα 2

Α) Οι μάζες των σωμάτων Α και Β του σχήματος είναι m_1 και m_2 αντίστοιχα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των Α και Β είναι μ ενώ μεταξύ Β και εδάφους δεν υπάρχει τριβή. Αρχικά (για t=0) το σώμα Α έχει οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ με φορά προς τα δεξιά ενώ το Β είναι ακίνητο.

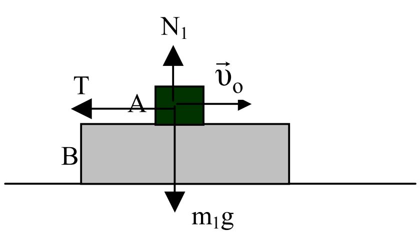


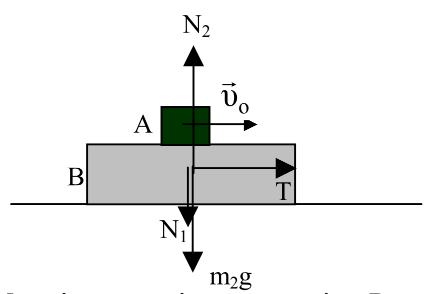
α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος και εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων.
β) βρείτε τις ταχύτητες $\upsilon_1(t)$ και $\upsilon_2(t)$ των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου.
γ) Πότε εξισώνονται οι ταχύτητές τους; (Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων εξισώνονται πριν προλάβει το σώμα Α να πέσει έξω από το Β.)
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.
60%

Β) Μία σφαίρα μάζας m_1=8g προσκρούει με οριζόντια ταχύτητα υ_0 και καρφώνεται σε ένα κύβο μάζας m_2= 2.5 kg που είναι ακίνητος πάνω σε ένα τραπέζι ύψους 1 m. Ο κύβος μπορεί να ολισθαίνει πάνω στο τραπέζι χωρίς τριβές. Μετά την κρούση ο κύβος πέφτει στο έδαφος 2m μακριά από την άκρη του τραπεζιού, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε την ταχύτητα υ_0 της σφαίρας. Δίνεται g=10ms^{-2}.
40%



<u>Λύση</u>
Α) Θεωρώ θετική φορά του άξονα x προς τα δεξιά. Σχεδιάζω τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για τα σώματα Α και Β





Στο σώμα Α ασκούνται το βάρος του m_1g , η κάθετη δύναμη N_1 από την επαφή του με το σώμα Β και η τριβή Τ με φορά προς τα αριστερά.
Στο σώμα Β ασκούνται: το βάρος του m_2g , η κάθετη αντίδραση N_2 από την επαφή του με το έδαφος , η δύναμη επαφής από το σώμα m_1 μέτρου N_1 και η τριβή μέτρου Τ με φορά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζω τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κάθε μάζα
Κίνηση του σώματος Α $\sum F_x = -T = m_1 \alpha_1$ (1) $\qquad \sum F_y = N_1 - m_1 g = 0$ (2)
αλλά Τ= μ N_1 **άρα** από (1) και (2) $\alpha_1 = -\mu g$ (3)
(το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα αριστερά είναι δηλαδή (σταθερή) επιβράδυνση)

Κίνηση του σώματος Β $\sum F_x = T = m_2\alpha_2$ (4) $\sum F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0$

από (4) με βάση τις (1) και (3) προκύπτει $\alpha_2 = \dfrac{T}{m_2} = \dfrac{-m_1\alpha_1}{m_2} \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\mu g$ (5)

δηλαδή το σώμα Β θα κινηθεί προς τα δεξιά με (σταθερή) επιτάχυνση α_2

β) Εξίσωση κίνησης του Α. Από (3) $\upsilon_1(t) = \upsilon_o - \mu g\, t$ $t \leq \tau$

Εξίσωση κίνησης του Β Από (5) $\upsilon_2(t) = \dfrac{m_1}{m_2}\mu g t$ $t \leq \tau$

όπου τ η χρονική στιγμή στην οποία θα εξισωθούν οι δύο ταχύτητες. Από εκεί και πέρα δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο σωμάτων οπότε δεν υπάρχει και τριβή και τα σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

γ) από το (β) για $\upsilon_1(\tau) = \upsilon_2(\tau)$ προκύπτει ότι $\tau = \dfrac{\upsilon_o}{\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)\mu g}$ οπότε $\upsilon_1(t) = \upsilon_2(t) = \upsilon(t) = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_o$

για $t \geq \tau$

Β) Έστω υ_o είναι η ταχύτητα με την οποία προσκρούει η σφαίρα στον κύβο και υ η ταχύτητα του συσσωματώματος σφαίρα-κύβος μετά την πρόσκρουση. Από την αρχή διατήρηση ορμής προκύπτει ότι

$m_1\upsilon_o = (m_1 + m_2)\,\upsilon \Rightarrow \upsilon = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_o$ (1)

Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα σφαίρα-κύβος εκτελεί βολή από ύψος h=1m με αρχική ταχύτητα υ στην οριζόντια διεύθυνση. Από τις εξισώσεις κίνησης στις δύο διευθύνσεις έχουμε

$x = \upsilon t$

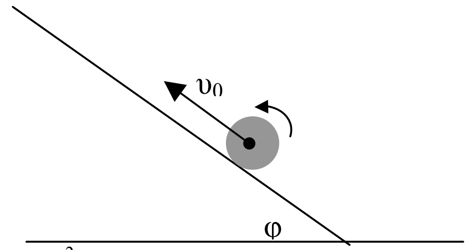
$y = -(1/2)\ g\ t^2$ απ΄όπου για y=-h=-1m βρίσκουμε τον ολικό χρόνο πτώσης $-1 = -(1/2)\ 10\ t_{o\lambda}^2 \Rightarrow t_{o\lambda} = \sqrt{\dfrac{1}{5}}\ s = 0.45\, s$ (2)

σ΄αυτό το χρόνο έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $x_{o\lambda} = \upsilon\, t_{o\lambda} = 2m$ οπότε με αντικατάσταση των (1) και (2) προκύπτει $\upsilon = \dfrac{x_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_o = \dfrac{x_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \Rightarrow \upsilon_o = \dfrac{x_{o\lambda}}{t_{o\lambda}}\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}$

και με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει $\upsilon_o = \dfrac{2}{0.45}\dfrac{2.5 + 0.008}{0.008} = 1393.3$ m/s

Θέμα 3

Α) Συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας m=10 kg και ακτίνας R=0.1 m κυλίεται ευθύγραμμα χωρίς ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ με sinφ=0.56 . Τη χρονική στιγμή t=0 το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ταχύτητα με μέτρο υ_o= 8 m/s. Να υπολογίσετε για τη σφαίρα α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της τη χρονική στιγμή t=0 β) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της γ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της, κατά τη διάρκεια της κίνησής της δ) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της καθώς ανεβαίνει , τη στιγμή που έχει διαγράψει 30/π περιστροφές. Δίνονται η ροπή αδρανείας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της I=(2/5) m R^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2. **70%**



Β) Η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα είναι μηδέν. Τι κίνηση θα κάνει το σώμα; **30%**

<u>Λύση</u>

Α) α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι $\upsilon_o=\omega_o R \Rightarrow \omega_o= 80$ rad/s

β) για τη μεταφορική κίνηση ισχύει $\Sigma F_x= m\,\alpha_{\kappa\mu} \Rightarrow T-mg\sin\varphi= m\,\alpha_{\kappa\mu}$ (1)

για την περιστροφική κίνηση $\Sigma\tau=I_{\kappa\mu}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -TR=\frac{2}{5}mR^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T=\frac{2}{5}mR\,\frac{\alpha_{\kappa\mu}}{R} \Rightarrow -T=\frac{2}{5}m\,\alpha_{\kappa\mu}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει

$-mg\sin\varphi= m\,\alpha_{\kappa\mu}+\frac{2}{5}m\,\alpha_{\kappa\mu} \Rightarrow -g\sin\varphi=\frac{7}{5}\alpha_{\kappa\mu} \Rightarrow \alpha_{\kappa\mu}=-\frac{5}{7}g\sin\varphi \Rightarrow \alpha_{\kappa\mu}=-4\ m/s^2$

Άρα το μέτρο της επιτάχυνσης είναι 4 m/s^2

γ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=-T\,R$

από τις παραπάνω σχέσεις $-T=\frac{2}{5}m\,\alpha_{\kappa\mu}=\frac{2}{5}10kg(-4)m/s^2 \Rightarrow T= 16$ N άρα $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=-T\,R= -1.6$ N m

άρα το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής είναι 1.6 N m

δ) το μήκος που έχει διατρέξει η σφαίρα σε 30/π περιστροφές είναι $s=\frac{30}{\pi}2\pi R \Rightarrow s=6m$

η μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας είναι ομαλά επιβραδυνόμενη άρα

$s=\upsilon_o t+\frac{1}{2}\alpha_{\kappa\mu}t^2 \Rightarrow 6=8t-2t^2 \Rightarrow t=1s$ ή $t=3s$

Το t=1s αντιστοιχεί στην άνοδο της σφαίρας άρα $\upsilon_{\kappa\mu}=\upsilon_o+\alpha_{\kappa\mu}t \Rightarrow \upsilon_{\kappa\mu}= 8-4.1 \Rightarrow \upsilon_{\kappa\mu}=4$ m/s

(το ερώτημα λύνεται και με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας

Β) Εφ΄όσον ΣF=0 τότε και α=0. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

α) αν και Στ=0 , τότε και $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$ (συνισταμένη ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο)

Άρα αν $\upsilon_0=0$ και $\omega_0=0$ θα ηρεμεί

αν $\upsilon_0\neq 0$ και $\omega_0=0$ θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

αν $\upsilon_0\neq 0$ και $\omega_0\neq 0$ θα εκτελεί σύνθετη κίνηση δηλαδή ευθύγραμμη ομαλή ($\vec{\upsilon}=$σταθ) και ομαλή περιστροφική (ω=σταθ)

αν $\upsilon_0=0$ και $\omega_0\neq 0$ θα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση

β) αν $\Sigma\tau\neq 0$, τότε και $\alpha_{\gamma\omega\nu}\neq 0$

άρα αν $\upsilon_0=0$ θα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση με $\omega\neq$ σταθ.

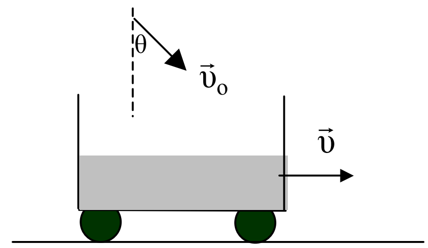
αν $\upsilon_0\neq 0$ θα εκτελεί σύνθετη κίνηση δηλαδή και μεταφορική με $\vec{\upsilon}=$σταθ και περιστροφική με $\omega\neq$ σταθ.

Θέμα 4

Α) Ελικόπτερο πετά ευθύγραμμα πάνω από οριζόντιο έδαφος με σταθερή ταχύτητα 4.9 m/s και σε σταθερό ύψος 5.0 m. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από το ελικόπτερο με αρχική ταχύτητα 12 m/s σε σχέση με το ελικόπτερο και με φορά αντίθετη προς την κίνηση του ελικοπτέρου α) Βρείτε την αρχική ταχύτητα του σώματος σε σχέση με το έδαφος β) ποια είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ σώματος και ελικοπτέρου, τη στιγμή που το σώμα προσκρούει στο έδαφος γ) ποια γωνία σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος με το έδαφος μόλις πριν χτυπήσει σ΄αυτό; Δίνεται $g=10ms^{-2}$.

50%

Β) Ένα καρότσι μάζας m κινείται με σταθερή ταχύτητα υ σε οριζόντιο επίπεδο. Το καρότσι μαζεύει βροχή η οποία πέφτει στο καρότσι με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αμελήσουμε τις τριβές και τις αντιστάσεις, να βρεθεί η γωνία θ ώστε η κίνηση του καροτσιού να παραμείνει ισοταχής χωρίς να ασκηθούν εξωτερικές δυνάμεις.



50%

Λύση

Α) το ελικόπτερο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda-\varepsilon\delta}$ (ως προς το έδαφος) και η ταχύτητα του σώματος ως προς το ελικόπτερο είναι είναι $\vec{\upsilon}_{\sigma-\varepsilon\lambda}$ Τότε η ταχύτητα του σώματος ως προς το έδαφος είναι $\vec{\upsilon}_{\sigma-\varepsilon\delta}=\vec{\upsilon}_{\sigma-\varepsilon\lambda}+\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda-\varepsilon\delta}$=-12+4.9= -7.1 m/s δηλαδή οριζόντια με αντίθετη από τη φορά κίνησης του ελικοπτέρου

β) ο χρόνος t υπολογίζεται από την ελεύθερη πτώση του αντικειμένου στον άξονα y

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=1\ s$

σ'αυτό το χρόνο το σώμα έχει κινηθεί στην οριζόντια διεύθυνση κατά $d_1=\vec{\upsilon}_{\sigma-\varepsilon\delta}t=7.1$ m ενώ το ελικόπτερο έχει κινηθεί προς την αντίθετη οριζόντια διεύθυνση κατά $d_2=\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda-\varepsilon\delta}\ t=4.9$ m . Άρα συνολικά η οριζόντια απόσταση μεταξύ σώματος και ελικοπτέρου, τη στιγμή που το σώμα προσκρούει στο έδαφος είναι $d=d_1+d_2=12$ m

γ) η γωνία θ της ταχύτητας με το έδαφος στο σημείο πρόσκρουσης θα είναι

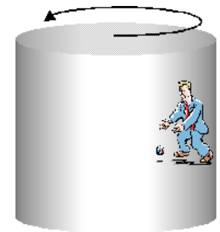
$$\tan\theta=\frac{\upsilon_{(\sigma-\varepsilon\delta)y}}{\upsilon_{(\sigma-\varepsilon\delta)x}}=\frac{gt}{\upsilon_{(\sigma-\varepsilon\delta)}}=\frac{10}{7.1}=1.4 \quad \text{άρα } \theta=54.6^o$$

Β) Θεωρώ το σύστημα καρότσι -βροχή. Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση της κίνησης, η ορμή του συστήματος θα διατηρείται σταθερή. Αν τη χρονική στιγμή t η μάζα της βροχής που έχει πέσει στο καρότσι είναι $m_{\beta\rho}$ η ορμή του συστήματος στη διεύθυνση της κίνησης θα είναι $m\,\upsilon + m_{\beta\rho}\upsilon_o \sin\theta$ και μετά από μικρό χρονικό διάστημα Δt δηλαδή τη χρονική στιγμή t+Δt, (αφού κινείται ισοταχώς το σύστημα) θα είναι $(m+m_{\beta\rho})\,\upsilon$

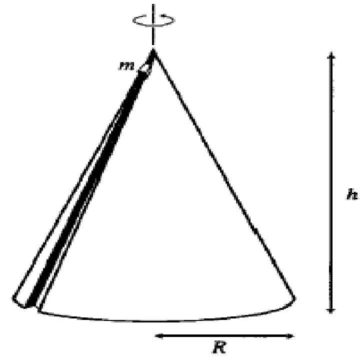
¨Άρα εξισώνοντας την αρχική ορμή του συστήματος με την τελική ορμή βρίσκουμε

$$m\,\upsilon + m_{\beta\rho}\upsilon_o\sin\theta=(m+m_{\beta\rho})\,\upsilon \Rightarrow m_{\beta\rho}(\upsilon_o\sin\theta-\upsilon)=0 \Rightarrow \upsilon_o\sin\theta=\upsilon \Rightarrow \sin\theta=\frac{\upsilon}{\upsilon_o}$$

Θέμα 5



Α) Σε ένα λούνα-παρκ υπάρχει ένας μεγάλος κατακόρυφος κύλινδρος ο οποίος περιστρέφεται αρκετά γρήγορα γύρω από τον άξονά του έτσι ώστε κάθε άτομο στο εσωτερικό του να στηρίζεται χωρίς να γλιστρά στο κυλινδρικό μέρος όταν το πάτωμα εξαφανίζεται. Βρείτε την μέγιστη περίοδο περιστροφής ώστε ο άνθρωπος να μην πέφτει προς τα κάτω αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s και η ακτίνα του κυλίνδρου R . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.
60%



Β) Ένας κώνος ύψους h και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Πάνω στην επιφάνειά του κώνου υπάρχει ένα αυλάκι όπως φαίνεται στο σχήμα όπου μπορεί να τοποθετείται ένα μικρό σώμα μάζας m. Θεωρείστε τη ροπή αδρανείας του κώνου ως προς τον άξονα περιστροφής I_o Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος κώνος-μικρό σώμα, α) όταν το μικρό σώμα βρίσκεται στην κορυφή του κώνου και β) όταν το σώμα βρίσκεται στη βάση του κώνου; Αγνοείστε τις επιδράσεις της βαρύτητας.
40%

__Λύση__

Α) Για να μην πέφτει ο άνθρωπος θα πρέπει το βάρος του να είναι ίσο με τη στατική τριβή T_s μεταξύ ανθρώπου και του τοιχώματος του κυλινδρικού μέρους (T_s=Β). Στην οριακή περίπτωση η στατική τριβή θα έχει τη μέγιστη τιμή της $T_s=\mu_s N$ όπου N η δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στον άνθρωπο.
Ο άνθρωπός εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως παίζει η δύναμη N από το τοίχωμα του κυλινδρικό μέρος. Επομένως $N = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$ όπου m η μάζα του ανθρώπου.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\mu_s m\frac{\upsilon^2}{R}=mg \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R}=\frac{g}{\mu_s} \quad (1)$$

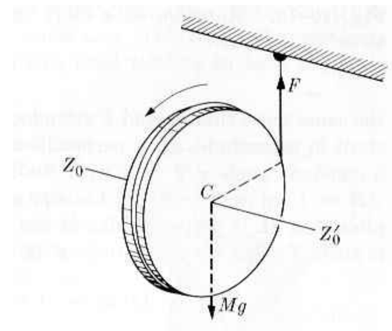
αλλά $\upsilon=\dfrac{2\pi R}{T}$ οπότε η (1) γίνεται $\dfrac{\left(\dfrac{2\pi R}{T}\right)^2}{R}=\dfrac{g}{\mu_s} \Rightarrow T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2 R\mu_s}{g}}$

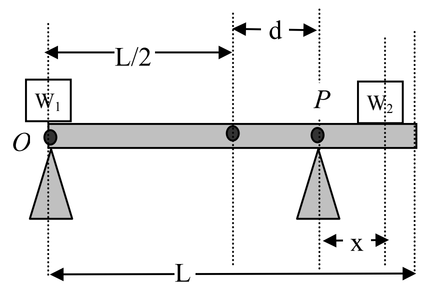
Β) Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και επομένως ροπές. Άρα η στροφορμή του παραμένει σταθερή. Η αρχική στροφορμή είναι $L_{αρχ}= I_o\,\omega_o$. Όταν το μικρό σώμα βρίσκεται στην κορυφή τότε η στροφορμή είναι $L_{τελ}= (I_o + m\,0^2)\omega_f = I_o\,\omega_f$. Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή.
Στην περίπτωση που το μικρό σώμα τοποθετείται στη βάση έχουμε $L_{τελ}= (I_o + m R^2)\omega_f$.

Άρα $I_o\,\omega_o= (I_o + m R^2)\omega_f \Rightarrow \omega_f=\dfrac{I_o}{I_o+mR^2}\omega_o$

Θέμα 6

A) Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας Μ και ακτίνας R είναι τυλιγμένο ένα νήμα. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Να υπολογιστούν α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου β) η δύναμη F που ασκείται στο νήμα γ) ο ρυθμός με τα τον οποίο αυξάνει η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα $Z_0 Z_o'$ δ) η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος έχει κατέβει κατά h. Δίνεται $I_{\kappa\upsilon\lambda}^{Z_0 Z_0'} = \frac{1}{2}MR^2$ **70%**





B) Μια ομογενής ράβδος βάρους W και μήκους L έχει τα βάρη W_1 και W_2 σε δύο θέσεις όπως στο σχήμα. Η ράβδος στηρίζεται στα δύο σημεία Ο και Ρ. Για ποια τιμή του x η δύναμη που ασκείται από το στήριγμα στη ράβδο στο σημείο Ο είναι μηδενική; Δίνεται ότι W_1=1N, W_2=10N, W=2N, d=2m, L=10m). **30%**

__Λύση__

A) Στον κύλινδρο ασκούνται το βάρος του $\vec{W}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από το νήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί και μεταφορική κίνηση και περιστροφική. Για τη μεταφορική ισχύει W-F= M $\alpha_{\kappa\mu}$ (1)

Για την περιστροφική ισχύει $\Sigma\tau_{(C)}$= Ι $\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR = \frac{1}{2}MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2) αλλά $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\kappa\mu}}{R}$ (3)

Οπότε $F = \frac{1}{2}M\ \alpha_{\kappa\mu}$ (4) .

Η σχέση (1) λόγω της (4) δίνει $W = \frac{3}{2}M\ \alpha_{\kappa\mu} \Rightarrow Mg = \frac{3}{2}M\ \alpha_{\kappa\mu} \Rightarrow \alpha_{\kappa\mu} = \frac{2}{3}g$ (5)

Η (3) λόγω της (5) δίνει $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$

β) η (4) λόγω της (5) δίνει $F = \frac{Mg}{3}$

γ) $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau_{(C)}$= FR οπότε λόγω του (β) $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{MgR}{3}$

δ)
$$\frac{1}{2}M\upsilon_{\kappa\mu}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh \Leftrightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{\kappa\mu}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_{\kappa\mu}^2}{R^2} = Mgh \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}M\upsilon_{\kappa\mu}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{\kappa\mu}^2 = Mgh \Leftrightarrow \frac{3}{4}M\upsilon_{\kappa\mu}^2 = Mgh \Leftrightarrow \upsilon_{\kappa\mu} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

B) Επειδή η ράβδος θεωρείται ομογενής η δύναμη του βάρους της W θα ασκείται στο μέσο της. Στη ράβδο ασκούνται , οι δυνάμεις από τα βάρη W_1, W_2 με φορά προς τα κάτω και από τα στηρίγματα F_O ,F_P με φορά προς τα πάνω. Επειδή ισορροπεί θα πρέπει $\Sigma\vec{F}$=0 ή W_1+ W_2+ W= F_O +F_P= F_P (1)
και Στ =0. Παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Ο προκύπτει

$-W\dfrac{L}{2}+F_P\left(\dfrac{L}{2}+d\right)-W_2\left(\dfrac{L}{2}+d+x\right)=0$ (2). Αντικαθιστώντας την (1) προκύπτει

$$-W\frac{L}{2}+\left(W_1+W_2+W\right)\left(\frac{L}{2}+d\right)-W_2\left(\frac{L}{2}+d+x\right)=0\Rightarrow x=\frac{W_1\left(\frac{L}{2}+d\right)+Wd}{W_2}=\frac{(W_1+W)d+W_1\frac{L}{2}}{W_2}$$