Θέμα 1

Α) Έστω ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ οι τρεις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου όπου το σημείο Ο είναι επί της αρχής των συντεταγμένων τρισορθογώνιου συστήματος ΟΧΥΖ. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν συντεταγμένες (1,2,0), (0,4,0) και (0,1,3) αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου.

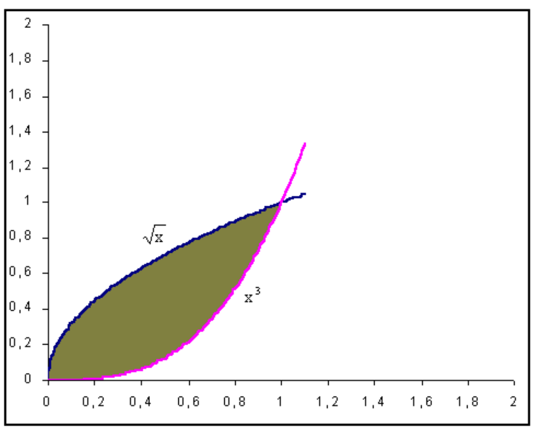
Λύση

Θέτω $\vec{\alpha} = \hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{\beta} = 4\hat{y}$, $\vec{\gamma} = \hat{y} + 3\hat{z}$. Έτσι ο ζητούμενος όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι

V=$\vec{\alpha}(\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$

$\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12\hat{x}$ άρα V=$(\hat{x} + 2\hat{y})12\hat{x}$ = 12 κυβικές μονάδες

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος που περιβάλλεται από τις καμπύλες $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x)=x^3$.



Λύση

Οι δυο καμπύλες τέμνονται στο x=1.

$$E = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{2}{3}(1^{3/2} - 0) - \frac{1}{4}(1^4 - 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Γ) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος του y όταν siny+cosx=1 όπου y είναι μια συνάρτηση του x

Λύση

Παραγωγίζουμε :

$$\cos y \cdot y' - \sin x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos y}$$

Η δεύτερη παράγωγος :

$$y'' = \frac{\cos y \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \cdot y'}{\cos^2 y} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \cdot (\sin x / \cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cdot \cos^2 y + \sin^2 x \cdot \sin y}{\cos^3 y}$$

Θέμα 2

A) Να λυθεί η εξίσωση : $x - \sqrt{x} = 20$

Λύση

Θέτω $y = \sqrt{x}$ οπότε έχουμε

$$x - \sqrt{x} = 20 \xrightarrow{y=\sqrt{x}} y^2 - y - 20 = 0$$

Βρίσκω τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης:

$$\Delta = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

Επομένως $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$

B) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}-2)}$ έχει όριο στο σημείο x=1

Το πεδίο ορισμού είναι $A = [-3,+\infty) - \{\pm 1\}$

Λύση

Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)\dfrac{x-1}{(\sqrt{x+3}+2)}} = \frac{1}{(x-1)^2}\frac{x^2(\sqrt{x+3}+2)}{x+1} \quad (1)$$

Επειδή $(x-1)^2>0$, $x \in A$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 1} 1/(x-1)^2 = +\infty$ (2)

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(\sqrt{x+3}+2)}{x+1} = 2$ (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = (+\infty)2 = +\infty$

Γ) Να λυθούν τα ολοκληρώματα :

$$\int \frac{6-x}{(x-3)\cdot(2x+5)}dx \quad , \qquad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^3}$$

Λύση

$$\int \frac{6-x}{(x-3)\cdot(2x+5)}dx$$

$$\frac{6-x}{(x-3)\cdot(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow$$

$$6-x = A(2x+5)+B(x-3) \Leftrightarrow$$

$$6-x = 2Ax+5A+Bx-3B \Leftrightarrow$$

$$6-x = 5A-3B+(2A+B)x \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} 5A-3B=6 \\ 2A+B=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A=3/11 \\ B=-17/11 \end{matrix}\right\}$$

Έτσι :

$$\int \frac{6-x}{(x-3)\cdot(2x+5)}dx = \int \frac{3/11}{x-3}dx + \int \frac{-17/11}{2x+5}dx = \frac{3}{11}\ln(|x-3|) - \frac{17}{22}\ln(|2x+5|) + C$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^3}$$

Αν βάλουμε $\ln x = y \to dy = \dfrac{dx}{x}$

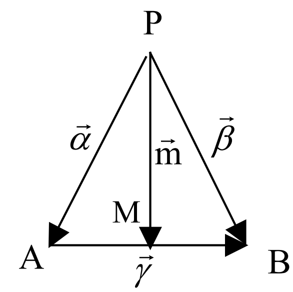
και αν $x = e \to \ln x = \ln e \to y = 1$

αν $x = e^2 \to \ln x = 2\ln e \to y = 2$

το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^3} \xrightarrow{\ln x = y} \int_1^2 \frac{dy}{y^3} = \int_1^2 y^{-3}dy = \left.\frac{y^{-2}}{-2}\right|_1^2 = -\frac{1}{2y^2}\Bigg| = -\frac{1}{2\cdot 2^2} - (-\frac{1}{2\cdot 1^2}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Θέμα 3



Α) Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ που σχηματίζουν το ισοσκελές τρίγωνο του σχήματος. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{m}$ κατά μήκος της διαμέσου του τριγώνου είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$

Λύση

$\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

$$\vec{m} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{\beta})$$

Άν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο : $\vec{m} \cdot (\vec{\beta} - \vec{a})$ θα έχουμε :

$$\vec{m} \cdot (\vec{\beta} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{\beta} - \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{a})$$

Αλλά

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$ επειδή $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$

Άρα $\vec{m} \cdot (\vec{\beta} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{a} \cdot \vec{a}) = 0$ επομένως $\vec{m} \perp \vec{\gamma}$

Β) Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(a+2)x^3 - bx^2 + 3x - 8}{x^2 - 1}$ Να βρείτε τις τιμές των a,b $\in$ R ώστε να είναι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Λύση

- $\lim\limits_{x \to 1}[(a+2)x^3 - bx^2 + 3x - 8] = a + 2 - b + 3 - 8 = a - b - 3$ (1)
- $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0$ (2)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) **a-b-3>0**

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0$ και $(x^2 - 1) > 0$ για x>1 είναι $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(x^2 - 1)} = +\infty$

και για –1<x<1 είναι $(x^2 - 1) < 0$ άρα $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x^2 - 1)} = -\infty$

έχουμε λόγω της (1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = (a - b - 3) \cdot (+\infty) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = (a - b - 3) \cdot (-\infty) = -\infty$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ η f δεν έχει όριο στο x=1

2) **a-b-3<0**

Όμοια προκύπτει ότι δεν υπάρχει όριο στο x=1

3) **a-b-3=0 δηλαδή b=a-3**

Για b=a-3 έχουμε

$$f(x)=\frac{(a+2)x^3-(a-3)x^2+3x-8}{(x-1)(x+1)}=\frac{(a+2)x^3-ax^2-2x^2+5x^2+8x-5x-8}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{x\cdot\left[(a+2)x^2+5x+8\right]-\left[(a+2)x^2+5x+8\right]}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)[(a+2)x^2+5x+8]}{(x-1)(x+1)}=\frac{(a+2)x^2+5x+8}{(x+1)}$$

άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{a+15}{2}$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$ αν και μόνο αν, είναι

a+15=1 και b=a-3 δηλαδή a=-14 και b=-17

Γ) Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x)=x^3+a\cdot x^2+bx+2$. Να βρείτε τις τιμές των a,b $\in$ R ώστε η f να έχει στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-1$ τοπικά ακρότατα τα οποία και να βρεθούν.

Λύση

Η συνάρτηση είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R με παραγώγους $f'(x)=3x^2+2\cdot a\cdot x\ \ +b.$

$f''(x)=6x^x+2\cdot a$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου. Για να έχει επομένως η f τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-1$ πρέπει να ισχύει f΄(2)=0 και f΄(-1)=0. Άρα έχουμε:

$$\begin{matrix} f'(2)=0 \\ f'(-1)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 12+4a+b=0 \\ 3-2a+b=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4a+b=-12 \\ b-2a=-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=-3/2 \\ b=-6 \end{matrix}$$

Για α=-3/2 και β=-6 είναι f΄΄(2)=9>0 άρα η f έχει στο σημείο x=2 τοπικό ελάχιστο το f(2)=-8

Για x=-1 είναι f΄΄(-1)=-9<0 άρα η f έχει στο σημείο x=-1 τοπικό μέγιστο το f(-1)=11/2

Θέμα 4

Α) Ένα υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\vec{r} = e^{-t}\cos t \cdot \hat{i} + e^{-t}\sin t \cdot \hat{j} + e^{-t}\hat{k}$
Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για κάθε χρονική στιγμή (οι διανυσματικές συναρτήσεις της ταχύτητας $\vec{v}(t)$ και της επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ ορίζονται ως $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ και $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ αντίστοιχα)

Λύση

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)\cdot\hat{i} + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)\cdot\hat{j} - e^{-t}\hat{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2 + e^{-2t}} =$$
$$= \sqrt{e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t + 2e^{-2t}\cos t\sin t + e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t - 2e^{-2t}\cos t\sin t + e^{-2t}} =$$
$$= \sqrt{2e^{-2t} + e^{-2t}} = \sqrt{3e^{-2t}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)\cdot\hat{i} + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)\cdot\hat{j} - e^{-t}\hat{k} =$$
$$[(e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t) - (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)]\cdot\hat{i}$$
$$[(e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) + (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)]\cdot\hat{j} + e^{-t}\hat{k} =$$
$$2e^{-t}\sin t\cdot\hat{i} - 2e^{-t}\cos t\cdot\hat{j} + e^{-t}\hat{k}$$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{4e^{-2t}\sin^2 t + 4e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}} = \sqrt{4e^{-2t} + e^{-2t}} = \sqrt{5e^{-2t}}$$

Β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \sin 2x + a^2}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ Για ποια τιμή του $a \in R$ η f είναι συνεχής;

Λύση

Είναι f(0)=3 και $f(x)=\frac{x+\sin 2x+a^2}{x} \Leftrightarrow f(x)=1+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+\frac{a^2}{x}$

Είναι όμως $\lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2)=1+2\cdot 1=3$

και για a διαφορετικό του μηδέν είναι $\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x})=+\infty$ και $\lim_{x\to 0^-}(\frac{a^2}{x})=-\infty$

άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3(+\infty)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x)=3(-\infty)=-\infty$

Συνεπώς για a≠0 η f δεν είναι συνεχής στο σημείο x=0

Για a=0 είναι $f(x)=\frac{x+\sin 2x}{x} \Leftrightarrow f(x)=1+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2$

άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=1+2\lim\frac{\sin 2x}{2x}=1+2=3=f(0)$ και η f είναι συνεχής στο x=0

Γ)

I) Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{matrix} 2\cdot x-5\cdot y+2\cdot z=7 \\ x+2\cdot y-4\cdot z=3 \\ 3\cdot x-4\cdot y-6\cdot z=5 \end{matrix}\right\}$

Λύση

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Cramer :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=2(-12-16)+5(-6+12)+2(-4-6)=-56+30-20=$$

$$=-46\neq 0$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για να την βρούμε υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$\Delta 1=\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=7(-12-16)+5(-18+20)+2(-12-10)=-196+10-44=$$

$$=-230$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-18+20) - 7(-6+12) + 2(5-9) = 4 - 42 - 8 =$$
$$= -46$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(10+12) + 5(5-9) + 7(-4-6) = 44 - 20 - 70 =$$
$$= -46$$

Επομένως η λύση είναι x=(-230)/(-46)=5, y=1, z=1

II) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $A = \int_3^4 \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

Λύση

$$\frac{(x+1)}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

Τότε είναι $x + 1 = a(x-2)(x+3) + bx(x+3) + cx(x-2)$
Για x=0 έχουμε a=-1/6
Για x=2 έχουμε b=3/10 και για x=-3 είναι c=-2/15

Είναι τώρα

$$A = \int_3^4 \frac{(x+1)}{x^3 + x^2 - 6x} = -\frac{1}{6}\int_3^4 \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int_3^4 \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int_3^4 \frac{dx}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$A = -\frac{1}{6}\left[\ln x\right]_3^4 + \frac{3}{10}\left[\ln(x-2)\right]_3^4 - \frac{2}{15}\left[\ln(x+3)\right]_3^4 \Leftrightarrow$$

$$A = -\frac{1}{6}\ln(4/3) + \frac{3}{10}\ln 2 - \frac{2}{15}\ln(7/6)$$

Θέμα 5

Α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β,γ ώστε η συνάρτηση $f(x)= \alpha x^3+\beta x+\gamma$ με $x \in R$ να είναι συγχρόνως:

i) περιττή
ii) να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o=1$ και

iii) $\int_0^2 f(x)dx = 2$

Δείξτε ότι το ακρότατο στο $x_o=1$ είναι τοπικό μέγιστο.

Λύση

i) $f(-x)= -f(x) \Rightarrow -\alpha x^3 - \beta x + \gamma = -\alpha x^3 - \beta x - \gamma \quad \forall x \in R$

άρα **γ=0**, άρα $f(x)= \alpha x^3 + \beta x$ (1)

ii) $f'(1) = 0 \quad f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta \Rightarrow f'(1) = 3\alpha + \beta = 0$ (2)

$f''(1) < 0 \quad f''(x) = 6\alpha x \Rightarrow f''(1) = 6\alpha < 0$ (3)

Η (1) με βάση τις (2) (3) γίνεται $f(x)= \alpha x^3 - 3\alpha x$ (4)

ιιι) $\int_0^2 f(x)dx = 2 \Rightarrow \int_0^2 (\alpha x^3 - 3\alpha x)dx = 2 \Rightarrow \left[\alpha \frac{x^4}{4} - 3\alpha \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \Rightarrow -2\alpha = 2 \Rightarrow$ **α=-1**

που ικανοποιεί την (3) και από (2) **β=3**

Τελικά από η (4) γίνεται $\boxed{f(x)= -x^3 + 3x}$

Λόγω δε της (3) συμπεραίνουμε ότι το ακρότατο είναι μέγιστο

Β)

I) Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y=e^{-x}\ln x$

Λύση

$$y' = e^{-x}\frac{d(\ln x)}{dx} + \ln x\frac{d(e^{-x})}{dx} = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x \Rightarrow y' = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x \cdot \frac{d(e^{-x})}{dx} - e^{-x}\frac{dx}{dx}}{x^2} - y' = \frac{-x \cdot e^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \cdot \ln x =$$
$$= -e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \ln x\right) = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

II) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} e^x \sin x \cdot dx$

Λύση

$$A=\int_0^{\pi} e^x \sin x\cdot dx=\int_0^{\pi}(e^x)'\sin x\cdot dx=\left[e^x \sin x\right]_o^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\sin x)'dx=-\int_0^{\pi} e^x \cos x\cdot dx \Leftrightarrow$$

$$A=-\int_0^{\pi}(e^x)'\cos x dx=-\left[e^x \cos x\right]_o^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\cos x)'dx \Leftrightarrow$$

$$A=e^{\pi}+1-\int_0^{\pi} e^x \sin x dx \Leftrightarrow A=e^{\pi}+1-A \Leftrightarrow 2A=e^{\pi}+1 \Leftrightarrow A=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

Γ) Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις $\begin{cases}-x^2+2x<-3\\ x^2-2x<15\\ x-4<0\end{cases}$

Λύση

Για την πρώτη έχουμε ότι $\Delta=4+12=16=4^2$, $\rho_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\left\{\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right\}$ επομένως πρέπει x<-1 ή x>3

Για την δεύτερη έχουμε ότι $\Delta=4+60=64=8^2$, $\rho_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}=\left\{\begin{matrix}5\\-3\end{matrix}\right\}$ επομένως πρέπει –3<x<5

Από την τρίτη και τις 2 προηγούμενες βγαίνει ότι 3<x<4 ή –3<x<-1

Θέμα 6

Α) Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε: y=x+2 που είναι το πλησιέστερο στο σημείο A(1,1)

Λύση

Έστω Β αυτό το σημείο δηλαδή $B\in\varepsilon$ δηλαδή B(x, x+2)

d(A,B)=$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(x+2-1)^2}=\sqrt{2x^2+2}$

Θέτουμε f(x)=$\sqrt{2x^2+2}$ και θα εξετάσουμε πού παρουσιάζει ελάχιστο αυτή η συνάρτηση.

$$f'(x)=(\sqrt{2x^2+2})'=\frac{1}{2}(2x^2+2)^{-1/2}(2x^2+2)'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ πιθανό ακρότατο

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ άρα για το x=0 είναι ελάχιστο και f(0)= x+2= 0+2=2

Άρα B= (0,2)

B) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int x^n \ln x \cdot dx, \quad n \neq -1$

Λύση

Θέτουμε $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

και $v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow dv = x^n \cdot dx$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Αν n=-1 το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int x^{-1} \cdot \ln x \cdot dx = \int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

B) Να βρεθούν τα όρια:

I) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$

Λύση

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin(5x/2)\sin(x/2)}{x^2} = -2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x/2)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x} =$$
$$-2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x/2)}{5x/2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \frac{1}{2} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

II) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sqrt{x} - x}$

Λύση

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sqrt{x} - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x - x^2}{\sqrt{x} + x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + x}{1 - x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

Δίνεται ότι $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$