# ΕΡΓΑΣΙΑ 2

(παράδοση 30/1/2005)

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. (a) Αποδείξτε ότι
$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$$

**Λύση:**

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x \quad \Leftrightarrow \quad \cot 2x = \frac{\cot x - \tan x}{2}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\cot 2x &= \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x \cos x} \\
&= \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\sin x}{2\cos x} \\
&= \frac{\cot x - \tan x}{2}
\end{aligned}$$

(b) Αποδείξτε ότι

$$S_n = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$$

**Λύση:** Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \cot x \\
\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} &= \frac{1}{2^2}\cot\frac{x}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \\
\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3} &= \frac{1}{2^3}\cot\frac{x}{2^3} - \frac{1}{2^2}\cot\frac{x}{2^2} \\
\frac{1}{2^4}\tan\frac{x}{2^4} &= \frac{1}{2^4}\cot\frac{x}{2^4} - \frac{1}{2^3}\cot\frac{x}{2^3} \\
&\ldots \\
\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{x}{2^{n-2}} \\
\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} &= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο.

2. (a) Να δείξετε ότι

$$\frac{(\cos x - \cos 3x)(\sin 8x + \sin 2x)}{(\sin 5x - \sin x)(\cos 4x - \cos 6x)} = 1$$

Υπο ποίες συνθήκες ισχύει ο παραπάνω τύπος;

**Λύση:**

$$\frac{(\cos x - \cos 3x)(\sin 8x + \sin 2x)}{(\sin 5x - \sin x)(\cos 4x - \cos 6x)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}\ 2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}}{2\sin\frac{5x-x}{2}\cos\frac{5x+x}{2}\ 2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{6x-4x}{2}}$$

$$= \frac{2\sin 2x\sin x\ 2\sin 5x\cos 3x}{2\sin 2x\cos 3x\ 2\sin 5x\sin x} = 1$$

Πρέπει να ισχύει $x \neq k\pi/5$, $x \neq k\pi/2$.

(b) Να δείξετε ότι

$$\frac{\sin x - \sin 5x + \sin 9x - \sin 13x}{\cos x - \cos 5x - \cos 9x + \cos 13x} = \cot 4x$$

Υπο ποίες συνθήκες ισχύει ο παραπάνω τύπος;

**Λύση:**

$$\frac{\sin x - \sin 5x + \sin 9x - \sin 13x}{\cos x - \cos 5x - \cos 9x + \cos 13x} =$$

$$= \frac{(\sin 9x + \sin x) - (\sin 13x + \sin 5x)}{(\cos x - \cos 5x) - (\cos 9x - \cos 13x)}$$

$$= \frac{2\sin 5x\cos 4x - 2\sin 9x\cos 4x}{2\sin 3x\sin 2x - 2\sin 11x\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos 4x(\sin 5x - \sin 9x)}{\sin 2x(\sin 3x - \sin 11x)}$$

$$= \frac{\cos 4x\ 2\ \ \sin 2x\cos 7x}{\sin 2x\ 2\ \ \sin 4x\cos 7x} = \cot 4x$$

Πρέπει να ισχύει $x \neq k\pi/4$, $x \neq k\pi/7 + \pi/14$.

3. Σύμφωνα με τον κανόνα του L' Hospital όταν για δύο συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ έχουμε ότι $\lim_{x->x_0} f(x) = 0 = \lim_{x->x_0} g(x)$ ή $\lim_{x->x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x->x_0} g(x)$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Στα παραπάνω το σημείο $x_0$ μπορεί να είναι ένα από τα σημεία $\pm\infty$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital (όπου είναι εφαρμόσιμος) να βρείτε τα όρια των παρακάτω παραστάσεων:

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x+5}{9x^2+6x-8}$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x+5}{9x^2+6x-8} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(8x^2-4x+5)'}{(9x^2+6x-8)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x-4}{18x+6}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(16x-4)'}{(18x+6)'}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}$$

**Λύση:**

$$\lim_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(\mathrm{e}^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(\mathrm{e}^x)'}=\frac{2}{\infty}=0$$

(c)

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+3}$$

**Λύση:**

Ο κανόνας του L'Hospital δεν έχει εφαρμογή αφού το όριο του παρονομαστή είναι $2\neq0$. Το παραπάνω όριο είναι ίσο με $0/2=0$.

(d)

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}) &= \lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\frac{x^2}{\sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\end{aligned}$$

Αφού $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})^2 = 1^2 = 1$. Από το σημείο αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα του L'Hospital όσες φορές χρειάζεται και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(4x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos 2x)'}{(12x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x} = \lim_{x\to 0}\frac{(4\sin 2x)'}{(24x)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. (a) Για την $f(x) = -\sin x\cos 3x$, υπολογίστε την $f'(\pi/3),\ f''(\pi/3),\ f'''(\pi/3)$.
**Λύση:**

$$f'(x) = 3\sin x\sin 3x - \cos x\cos 3x$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 3\sin\frac{\pi}{3}\sin\pi - \cos\frac{\pi}{3}\cos\pi = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 3\cos x\sin 3x + 9\sin x\cos 3x + \sin x\cos 3x + 3\cos x\sin 3x$$

$$= 6\cos x\sin 3x + 10\sin x\cos 3x$$

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{3}) = 10\sin\frac{\pi}{3}\cos\pi = -5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -6\sin x\sin 3x + 18\cos x\cos 3x + 10\cos x\cos 3x - 30\sin x\sin 3x$$

$$= -36\sin x\sin 3x + 28\cos x\cos 3x$$

$$\Rightarrow f'''(\frac{\pi}{3}) = 28\cos\frac{\pi}{3}(-1) = -14$$

(b) Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$y = f(x) = 4\sin x - 3\cos x$$

στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

**Λύση:**

Η συνάρτηση είναι συνεχής καθώς συνεχείς είναι και οποιασδήποτε τάξης παράγωγοί της. Για $x = 0$:

$$y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$$

$$f(x) = 0 \text{ για } 0.6435 \text{ και } 3.785 \text{ radians}$$

$$f'(x) = 4\cos x + 3\sin x \quad f'(x) = 0 \text{ για } x = 2.214 \text{ και } x = 5.356$$

$$f''(x) = -4\sin x + 3\cos x \quad f''(x) = 0 \text{ για } \; x = 0.6435 \text{ και } 3.785$$

$$f'''(x) = -4\cos x - 3\sin x$$

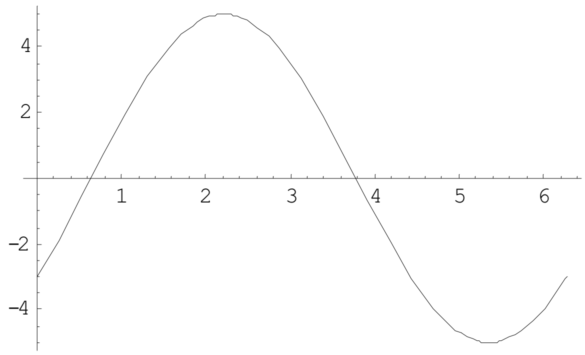
για $x = 2.214 \quad f''(x) = -5.0 < 0$:

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{μέγιστο στο } 5 \\ \text{ελάχιστο στο } \; -5 \text{ για } x = 5.356. \end{array}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.

5. Βρείτε την παράγωγο ($dy/dx = y'$) των παρακάτω συναρτήσεων (μπορείτε να εκφράσετε το αποτέλεσμα συναρτήσει του $x$ και $y$, δηλ. $y'(x) = F(x, y(x))$ ).

   (a)
$$xy^3 - 3x^2 = xy + 6$$




Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = 4\sin x - 3\cos x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (Ασκηση 4b)

**Λύση:**

$$\begin{aligned} xy^3 - 3x^2 = xy + 6 \quad &\Rightarrow \quad (xy^3 - 3x^2)' = (xy + 6)' \\ &\Rightarrow \quad (xy^3)' - (3x^2)' = (xy)' + 0 \\ &\Rightarrow \quad x(3y^2y') + y^3 - 6x = xy' + y \\ &\Rightarrow \quad y'(3xy^2 - x) = 6x - y^3 + y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{6x - y^3 + y}{3xy^2 - x} \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{e}^{xy} + y\ \ln x = \cos 2x$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{xy} + y\ \ln x = \cos 2x \quad &\Rightarrow \quad (\mathrm{e}^{xy})' + (y\ \ln x)' = (\cos 2x)' \\ &\Rightarrow \quad (xy)'\mathrm{e}^{xy} + y' \ln x + y/x = -2\sin 2x \\ &\Rightarrow \quad (xy' + y)\mathrm{e}^{xy} + y' \ln x + y/x = -2\sin 2x \\ &\Rightarrow \quad y'(x^2\mathrm{e}^{xy} + x\ln x) = -(y + 2x\sin 2x + xy\mathrm{e}^{xy}) \\ &\Rightarrow \quad y' = -\frac{y + 2x\sin 2x + xy\mathrm{e}^{xy}}{x^2\mathrm{e}^{xy} + x\ln x} \end{aligned}$$

(c)

$$y = \frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{\sqrt{x}}$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned}
(\frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{\sqrt{x}})' &= \frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})'\sqrt{x}-(1-\mathrm{e}^{-x/t})(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{x}/t)\mathrm{e}^{-x/t}-(1-\mathrm{e}^{-x/t})/(2\sqrt{x})}{x} \\
&= \frac{1}{t}\frac{\mathrm{e}^{-x/t}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{x^{3/2}}
\end{aligned}$$

(d) Βρείτε την δεύτερη παράγωγο ($y''$) της συνάρτησης του προηγουμένου υποερωτήματος.

**Λύση:**

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{e}^{-x/t}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{x^{3/2}})' &= (\frac{1}{t}\frac{\mathrm{e}^{-x/t}}{\sqrt{x}})'-(\frac{1}{2}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{x^{3/2}})' \\
&= -(\frac{1}{t^2\sqrt{x}}+\frac{1}{2tx^{3/2}})\mathrm{e}^{-x/t}-[\frac{\mathrm{e}^{-x/t}}{2tx^{3/2}}-\frac{3(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{4x^{5/2}}] \\
&= -(\frac{1}{t^2\sqrt{x}}+\frac{1}{tx^{3/2}})\mathrm{e}^{-x/t}+\frac{3(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{4x^{5/2}}
\end{aligned}$$

6. Ενα σωματίδιο κινείται στο χώρο σε τροχιά που περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}=\vec{r}(t)$, όπου $t$ είναι ο χρόνος μετρούμενος από κάποια αρχική χρονική στιγμή. Αν $v=|d\vec{r}/dt|=ds/dt$ είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, ($s$ είναι το μήκος τόξου κατά μήκους της τροχιάς του, μετρούμενο από κάποια αρχική θέση), να δείξετε ότι η επιτάχυνσή του, $\vec{a}$, (δηλαδή η πρώτη παράγωγος της ταχύτητάς του) δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{T}+\frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

όπου $\hat{T}$ και $\hat{N}$ είναι το εφαπτόμενο στην τροχιά και το κάθετο μοναδιαία διανύσματα, αντιστοίχως. Επίσης, το $\rho$ είναι:

$$\rho = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-1/2}.$$

**Λύση:**

$$\vec{v} = \upsilon\hat{T}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon\hat{T})$$

$$= \frac{d\upsilon}{dt}\hat{T} + \upsilon\frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$= \frac{d\upsilon}{dt}\hat{T} + \upsilon\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{T} + \upsilon^2\frac{d\hat{T}}{ds}$$

αλλά:

$$\hat{T}\cdot\hat{T} = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\hat{T} + \hat{T}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow 2\hat{T}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{T}\perp\frac{d\hat{T}}{ds}$$

Αρα:

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N} \tag{1}$$

Προφανώς το

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \hat{T}$$

οπότε

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{T} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\hat{T}}{ds} \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$k = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2}$$

Ορίζουμε το $\rho$:

$$\rho = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{\hat{N}}{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{T} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{N}$$

7. Βρείτε τα ολοκληρώματα:

   (a)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

(υπόδ.: εφαρμόστε το μετασχηματισμό $x = 2\tan z$)

**Λύση:**

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}},$$

για $x = 2\tan z$

$$dx = 2\sec^2 z dz,\ \sqrt{4+x^2} = 2\sec z,$$

όπου

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}.$$

$$= \int \frac{2\sec^2 z}{(4\tan^2 z)(2\sec z)} dz = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z} dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z \cos z dz$$

$$= -\frac{1}{4\sin z} + c = \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

(b)

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

**Λύση:**

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln\left(1+e^{-x}\right) + c = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c$$

$$= x - \ln(1+e^x) + c$$

(c)

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx$$

**Λύση:**

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + \Gamma x + \Delta$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + (A+\Gamma)x + (B+\Delta)$$

$$\Rightarrow A = 0,\ B = 2,\ A+\Gamma = 0,\ B+\Delta = 3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 2 \\ \Gamma = 0 \\ \Delta = 1 \end{array}$$

Τότε:

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

όπου το

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + c,$$

για $x = \tan z$.

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = 2\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x/2}{x^2+1} + c$$

$$= \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x/2}{x^2+1} + c,$$

διότι

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z = 2\frac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 z}} = \frac{2\tan z}{1+\tan^2 z} = \frac{2x}{1+x^2}$$

(d) Να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

**Λύση:**

Για $x = \pi/2 - y$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$$

Τότε:

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x)) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2 dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

Για $2x = v$:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin v dv$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \ln \sin v dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin v dv \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \ln \sin v dv + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln \sin u du}_{\text{για } v = \pi - u} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(I + I) = I$$

Επομένως:

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

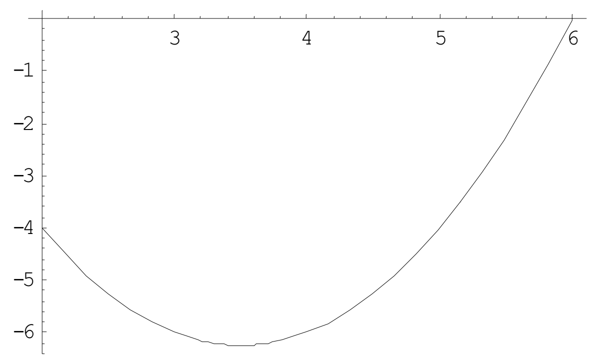
8. Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται

(a) από την παραβολή $y = f(x) = x^2 - 7x + 6$, τον άξονα των $x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 6$

**Λύση:**

$$\int_2^6 (0 - f(x))dx = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6)dx = -\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\right]_2^6 = \frac{56}{3}$$

(βλ. Σχήμα 2)




Σχήμα 2: Το χωρίο του οποίου το εμβαδόν ζητήται στην Ασκηση 8a

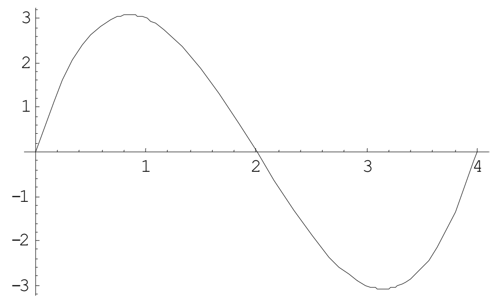
(b) από την καμπύλη $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ και τον άξονα των $x$

**Λύση:**

Η καμπύλη τέμνει τον άξονα των $x$ στα σημεία $x = 0, x = 2$ και $x = 4$

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_2^4 = 4 + 4 = 8$$




Σχήμα 3: Το χωρίο του οποίου το εμβαδόν ζητήται στην Ασκηση 8b

(c) από τις παραβολές $y = f(x) = 6x - x^2$ και $y = g(x) = x^2 - 2x$
**Λύση:**
Οι παραβολές τέμνονται στα σημεία:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 6x - 2x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 2x^2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0) \quad \text{και} \quad (x, y) = (4, 8)$$

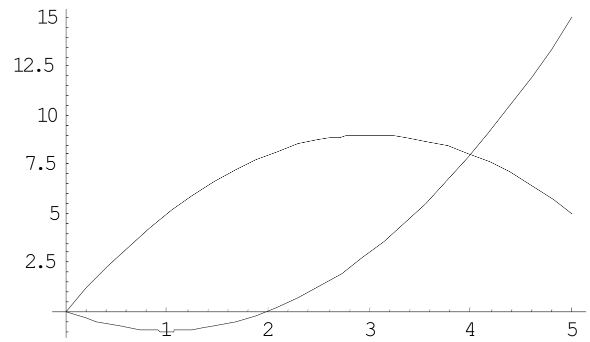
$$\int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx$$

$$\left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

9. (a) Να βρεθεί η εξίοωση της οικογένειας των ευθειών που περνούν από τα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, b)$ έτσι ώστε $a + b = 6$ (υποδ.: η εξίσωση θα έχει παράμετρο λ.χ. το $a$). Να βρεθεί η ευθεία της οικογένειας που είναι παράλληλη στην $\epsilon : 3x - y + 2 = 0$.

**Λύση:** Εστω ότι η τυχούσα ευθεία της οικογένειας έχει εξίσωση

$$Ax + By + C = 0$$




Σχήμα 4: Το χωρίο του οποίου το εμβαδόν ζητήται στην Ασκηση 8c

Αφού περνάει από τα σημεία $A(a,0)$ και $B(0,b)$ θα ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$\begin{aligned} Aa + C &= 0 \Rightarrow A = -C/a \\ Bb + C &= 0 \Rightarrow B = -C/b \end{aligned}$$

Θέτοντας $C = -1$ παίρνουμε $A = 1/a$, $B = 1/b$ και αφού $a + b = 6$ παίρνουμε $B = 1/(6-a)$. Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{6-a} = 1$$

που είναι η εξίσωση μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας από ευθείες που ικανοποιούν τις ζητούμενες συνθήκες. Η ευθεία $\epsilon_1$ που θα είναι παράλληλη στην $\epsilon$ θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3/(-1) = 3$. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της $\epsilon_1$ είναι $\lambda_1 = -(6-a)/a$ και $\lambda_1 = \lambda$ προκύπτει ότι $-(6-a)/a = 3 \Rightarrow a = -3$.

(b) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\epsilon_1 : 2x - 3y + 5 = 0$ και $\epsilon_2 : 4x - 6y + 9 = 0$.

**Λύση:** Οι ευθείες $\epsilon_1$, $\epsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -2/(-3) = 2/3$ και $\lambda_2 = -4/(-6) = 2/3$. Αρα $\lambda_1 = \lambda_2$ και οι ευθείες είναι όντως παράλληλες. Η μεσοπαράλληλη είναι η ευθεία $\epsilon_3$ που είναι παράλληλη και στις δύο ευθείες και απέχει ίση απόσταση και από τις δύο.

Η ευθεία $\epsilon_3$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_3 = 2/3$ οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής:

$$\epsilon_3 : 2x - 3y + a = 0$$

οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε την παράμετρο $a$. Οι ευθείες $\epsilon_1$, $\epsilon_2$ τέμνουν τον άξονα $y$ στα σημεία $A_1(0, 5/3)$ και $A_2(0, 3/2)$. Η ευθεία $\epsilon_3$ θα τέμνει τον άξονα $y$ στο σημείο $A_3(0, y_3)$ που βρίσκεται στο μέσο των $A_1$, $A_2$:

$$y_3 = \frac{5/3 + 3/2}{2} = \frac{19}{12}$$

Το σημείο $A_3(0, y_3)$ ανήκει στην $\epsilon_3$ οπότε θα ικανοποιήται η συνθήκη

$$20 - 3\frac{19}{12} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{19}{4}$$

και η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\epsilon_3 : 8x - 12y + 19 = 0$$

10. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μιας έλλειψης από μια εφαπτομένη της είναι σταθερό (υποδ.: Να χρησιμοποιήσετε αφού αποδείξετε τον τύπο που δίνει την απόσταση σημείου από ευθεία, βλ. σελ. 174 του βιβλίου).

**Λύση:** Σύμφωνα με την άσκηση 16 της 2ης εργασίας του 2002 (μπορείτε να την κατεβάσετε από το forum της ΦΥΕ14), αποδεικνύουμε ότι η απόσταση σημείου $P(x_1, y_1)$ από ευθεία με εξίσωση $\epsilon : Ax + By + C = 0$ είναι

$$d(P, \epsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Αν η έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

η εξίσωση της εφαπτομένης $\epsilon$ στο σημείο $P(x_1, y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (x_1b^2)x + (y_1a^2)y - a^2b^2 = 0$$

Οι αποστάσεις των εστιών $E_1(-\gamma, 0)$, $E_2(\gamma, 0)$, $\gamma^2 = a^2 - b^2$ είναι

$$d_1 = d(E_1, \epsilon) = \frac{|-\gamma x_1 b^2 - a^2 b^2|}{\sqrt{x_1^2 b^4 + y_1^2 a^4}} \qquad d_2 = d(E_2, \epsilon) = \frac{|\gamma x_1 b^2 - a^2 b^2|}{\sqrt{x_1^2 b^4 + y_1^2 a^4}}$$

οπότε

$$d_1 d_2 = \frac{|b^4 \gamma^2 x_1^2 - a^4 b^4|}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} = \frac{b^4 |\gamma^2 x_1^2 - a^4|}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

Αφού το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη θα έχουμε

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 y_1^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 x_1^2$$

άρα

$$b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2 = b^4 x_1^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x_1^2 = b^2(a^4 - x_1^2 \gamma^2) = b^2 |a^4 - x_1^2 \gamma^2|$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(a^4 - x_1^2\gamma^2) = |a^4 - x_1^2\gamma^2|$ δηλ. ότι $a^4 - x_1^2\gamma^2 > 0 \Leftrightarrow x_1^2\gamma^2 < a^4$. Πράγματι αφού $|x_1| < a \Rightarrow x_1^2 < a^2 \Rightarrow x_1^2\gamma^2 < a^2\gamma^2 < a^2 a^2 = a^4$. Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι $\gamma^2 = a^2 - b^2 < a^2$. Οπότε τελικά

$$d_1 d_2 = \frac{b^4 |\gamma^2 x_1^2 - a^4|}{b^2 |a^4 - x_1^2 \gamma^2|} = b^2$$