# $1^{\eta}$ Εργασία 2004-2005

**(Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής 16/11/2004)**

**Άσκηση 1 (7 μονάδες)**

**(Α)** Ποιες είναι οι προϋποθέσεις ώστε να ισχύουν οι παρακάτω διανυσματικές σχέσεις:

(α) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ με $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$

(β) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$

(γ) $(\vec{A}+\vec{B})\perp(\vec{A}-\vec{B})$

(δ) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ και $|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2=|\vec{C}|^2$

**(Β)** Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a}=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c}=6\hat{k}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπίπεδου που σχηματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα. Θεωρείστε ως βάση του παραλληλεπίπεδου το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Επίσης να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπίπεδου.

<u>Λύση</u>

**(Α)** (α) Δίνεται ότι $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ και ότι $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$

Αυτό ισχύει μόνο όταν τα διανύσματα $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα

(β) Δίνεται ότι $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\vec{B}=-\vec{B}$ πράγμα που ισχύει μόνο όταν το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι ίσο προς το μηδενικό διάνυσμα.

(γ) Η σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{A}+\vec{B}$ και $\vec{A}-\vec{B}$ όταν αυτά είναι κάθετα μεταξύ τους είναι

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=0$$

Αναπτύσσοντας το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει.

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{A}-\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A}-\vec{B}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{A}-\vec{B}\cdot\vec{B}=AA\cos0^{o}-BB\cos0^{o}=$$

$$=A^2-B^2=0$$

και τελικά

$$A=B$$

(δ) Αφού για τα διανύσματα

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

ισχύει ότι

$$|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2=|\vec{C}|^2$$

συμπεραίνεται ότι ικανοποιείται το Πυθαγόρειο Θεώρημα και επομένως τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

**(B)** Το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπίπεδου είναι ίσο προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Αυτό είναι ίσο προς

α΄ τρόπος

$$E = \left|\vec{\alpha}x\vec{b}\right| == \left\|\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\| = \left|(4-2)\hat{i} - (3-2)\hat{j} + (3-4)\hat{k}\right| = \left|2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} =$$

$\sqrt{6} = 2.45$

β΄τρόπος

$$E = \left|\vec{\alpha}x\vec{b}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Η γωνία αυτή είναι ίση προς

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)}{\left|3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right|\left|\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right|} = \frac{9}{\sqrt{(9+16+4)}\sqrt{3}} = 0,965$$

$\theta = \cos^{-1} 0,965 = 15,23^{o}$

Επομένως,

$$E = \left|\vec{\alpha}x\vec{b}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta = \left|3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right| \left|\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right| \sin 15,23^{0} = \sqrt{29}\sqrt{3} \quad 0,263 = 2,45$$

Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου είναι ίσος προς

α΄ τρόπος

$$V = \left|\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \left|\left(6\hat{k}\right)\cdot\left[\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)\times\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)\right]\right| = \left|\left(6\hat{k}\right)\cdot\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left|\left(6\hat{k}\right)\cdot\left[(4-2)\vec{i} + (2-3)\hat{j} + (3-4)\hat{k}\right]\right| = \left|\left(6\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j} - k\right)\right| = \left|-6\right| = 6$$

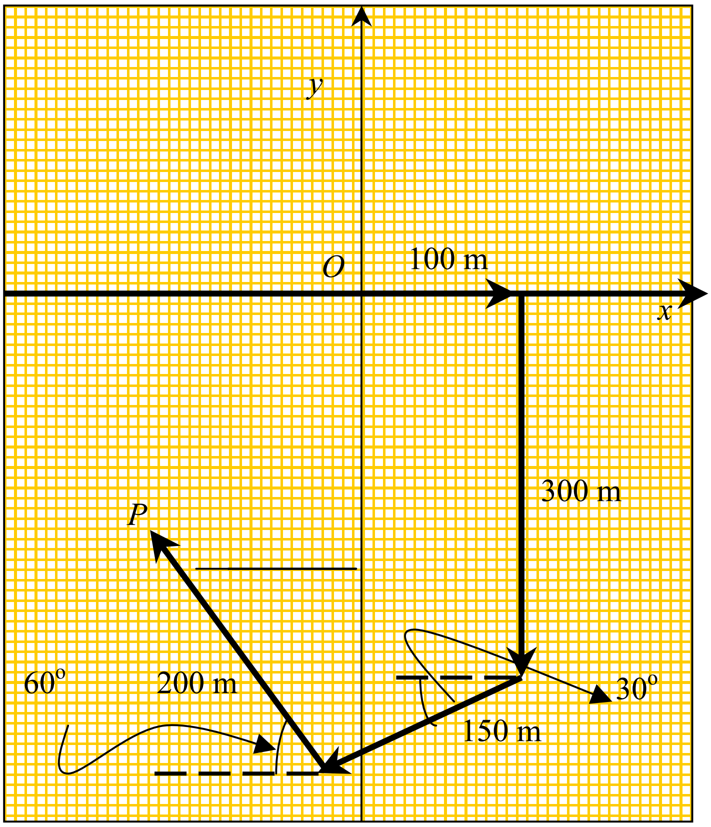
β΄τρόπος

$$V = \left|\vec{c}\ (\vec{\alpha}x\vec{b})\right| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\| = \left|6\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right| == 6\left|(3-4)\right| = \left|-6\right| = 6$$

---

**Άσκηση 2 (8 μονάδες)**

Το παρακάτω σχήμα δείχνει την πορεία που ακολουθεί ένας άνθρωπος κατά τον περίπατό του. Ξεκινά από το σημείο $O$ και καταλήγει στο σημείο $P$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε τμήμα του περιπάτου. Επίσης, να εκφράσετε την συνολική μετατόπισή του με ένα διάνυσμα δίνοντας τις συντεταγμένες του και να υπολογίσετε το μέτρο του.




Λύση

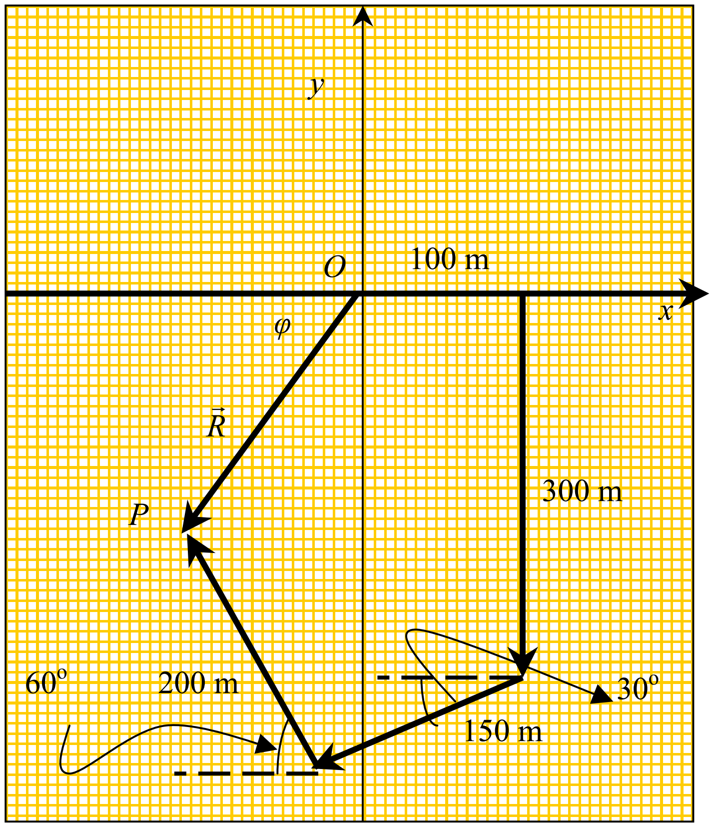
Ο περίπατος αποτελείται από τα εξής διανύσματα.

$\vec{d}_1 = (100\ \text{m})\hat{i}$

$\vec{d}_2 = (-300\ \text{m})\hat{j}$

$\vec{d}_3 = (-150\ \text{m})\cos 30^\circ \hat{i} + (-150\ \text{m})\sin 30^\circ \hat{j} = (-130\ \text{m})\hat{i} + (-75\ \text{m})\hat{j}$

$\vec{d}_4 = (-200\ \text{m})\cos 60^\circ \hat{i} + (200\ \text{m})\sin 60^\circ \hat{j} = (-100\ \text{m})\hat{i} + (173\ \text{m})\hat{j}$




Η συνολική μετατόπιση $\vec{R}$ είναι:

$$\vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 = (100\ \mathrm{m})\hat{i} + (-300\ \mathrm{m})\hat{j} + (-130\ \mathrm{m})\hat{i} + (-75\ \mathrm{m})\hat{j} + (-100\ \mathrm{m})\hat{i} + (173\ \mathrm{m})\hat{j} =$$

$$= (-130\ \mathrm{m})\hat{i} - 202\hat{j}$$

Το μέτρο του διανύσματος είναι ίσο προς

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{(-130\ \mathrm{m})^2 + (-202\ \mathrm{m})^2} = 240\ \mathrm{m}$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{R}$ με τον άξονα $-x$ είναι ίση προς

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-202\ \mathrm{m}}{-130\ \mathrm{m}}\right) = 57^{\circ}$$

και με τον άξονα $+x$ είναι ίση προς

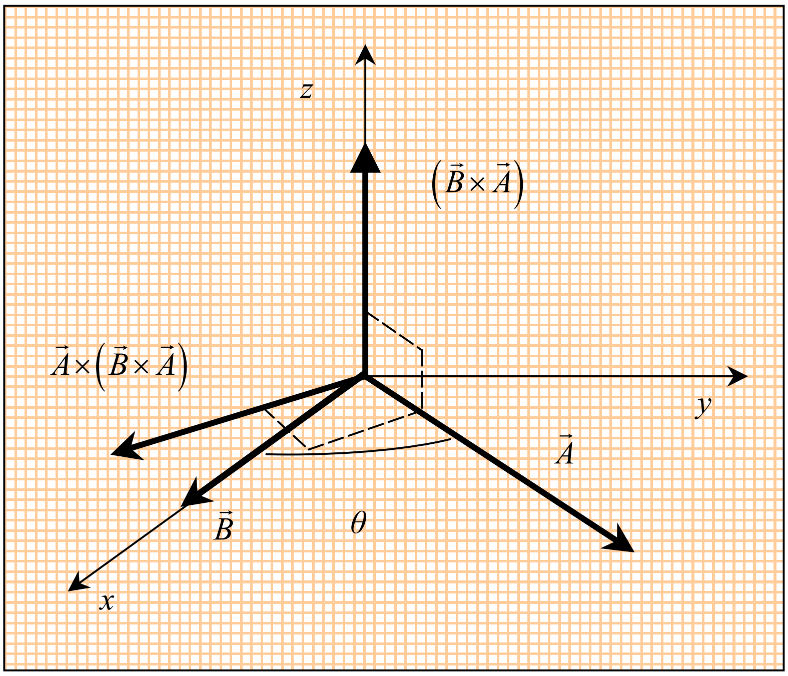
$$\theta = \varphi + 180^{\circ} = 57^{\circ} + 180^{\circ} = 237^{\circ}$$

**Άσκηση 3 (10 μονάδες)**

**(Α)** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Να δείξετε ότι η παράσταση $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ είναι πάντοτε ίση προς μηδέν.

**(Β)** Υπολογίστε το μέτρο, τη διεύθυνση και την φορά του διανύσματος $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ αν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σχηματίζουν γωνία $\theta$ μεταξύ τους. Θεωρείστε ότι τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ βρίσκονται στο επίπεδο *xy* και ότι το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι συγγραμμικό με τον άξονα *x*.

<u>Λύση</u>




**(Α)** Το διάνυσμα $\vec{C}$ που ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\vec{B}\times\vec{A}=\vec{C}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Επομένως, είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{A}$ όπως επίσης είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{B}$, δηλαδή. το $\vec{C}$ είναι πάνω στον άξονα z. . Από την καθετότητα των διανυσμάτων προκύπτει ότι $\vec{A}\cdot\vec{C}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{C}\right|\cos 90^{\circ}=0$

Επομένως, $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)=0$

**(Β)** Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{B}\times\vec{A}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Αν αυτά κείνται στο επίπεδο *xy* το διάνυσμα $\vec{B}\times\vec{A}$ βρίσκεται στον άξονα *z*. Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}\times\vec{A}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο του διανύσματος αυτού είναι ίσο προς

$$\left|\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)\right|=\left|\vec{A}\right|\left(\left|\vec{B}\right|\left|\vec{A}\right|\sin\theta\right)=\left|\vec{A}\right|^{2}\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

**Άσκηση 4 (10 μονάδες)**

Εάν ισχύουν οι ισότητες

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ (1)

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ (2)

Αποδείξτε ότι ισχύει

i) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

ii) $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

iii) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\left[(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})\right] = \left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right]^2$

iv) Μπορεί η ισότητα (1) να γραφεί χωρίς παρενθέσεις;

Λύση

i) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) έχουμε :

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$

$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{A})$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

ii) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = \vec{K}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$ όπου έχουμε θέσει $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{K}$

Όμως $\vec{K}\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{K}\times\vec{C})\cdot\vec{D} = \left[(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\right]\cdot\vec{D}$ (με βάση την (1) )

$$= -\left[\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})\right]\cdot\vec{D} = -\left[\vec{A}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{A})\right]\cdot\vec{D}$$ (με βάση τη (2))

$$= \left[\vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{B})\right]\vec{D} = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

iii) $(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{K}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ όπου έχουμε θέσει $\vec{B}\times\vec{C} = \vec{K}$

Όμως $\vec{K}\times(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{K}\cdot\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{K}\cdot\vec{C}))$ (από τη (2) )

$$= \vec{C}\cdot\left[(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}\right] - \vec{A}\cdot\left[(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{C}\right] = \vec{C}\cdot\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] - \vec{A}\cdot\left[\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] =$$

$$= \vec{C}\cdot\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] + \vec{A}\cdot\left[\vec{C}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})\right] = \vec{C}\cdot\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] + \vec{A}\cdot\left[(\vec{C}\times\vec{C})\cdot\vec{B})\right] =$$

$$= \vec{C}\cdot\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right]$$

Άρα

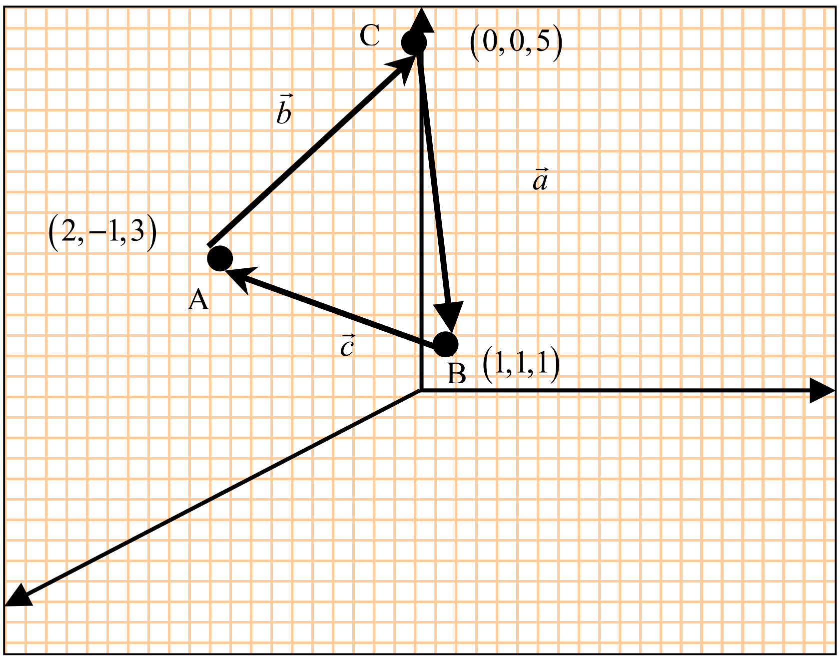
$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A}) = \left[(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}\right]\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] = \left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right]\left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right] = \left[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right]^2$$

iv) Μπορεί γιατί δεν θα έβγαζε νόημα να τη δούμε ως $(\vec{A}\cdot\vec{B})x\vec{C}$ αφού το $\vec{A}\vec{B}$ είναι βαθμωτό μέγεθος (αριθμός) και δεν θα έχει νόημα το εξωτερικό του γινόμενο με το διάνυσμα $\vec{C}$. Επομένως η μορφή $\vec{A}\cdot\vec{B}x\vec{C}$ έχει νόημα μόνο όταν θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια παρένθεση $\vec{A}\cdot(\vec{B}x\vec{C})$.

**Άσκηση 5 (15 μονάδες)**

Δίνονται τα σημεία A, B και C στον τρισδιάστατο χώρο με συντεταγμένες A(2,-1,3), B(1,1,1), C(0,0,5). Τα σημεία αυτά αποτελούν τις κορυφές του τριγώνου ABC.
(α) Να σχεδιαστεί το τρίγωνο σε διάγραμμα *xyz*.
(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{AC}$ και το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου.
(γ) να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.
(δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου με χρήση του διανυσματικού λογισμού.

Λύση




Από το σχήμα προκύπτει ότι

$\vec{a} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 5\hat{k} - = \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{b} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 5\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} - \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

Τα μέτρα αυτών είναι

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,24$

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

Αν $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{c}$ και $\vec{a}$ θα ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\right)\cdot\left(-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\right)}{\left|\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right|\left|-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\right|} = \frac{9}{12,72} = 0,7076$$

$\theta = \cos^{-1} 0,7076 = 45^{o}$

Αν $\varphi$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{c}$ και $\vec{b}$ θα ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)\cdot\left(-2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)}{\left|\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right|\left|-2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right|} = 0$$

$\theta = \cos^{-1} 0 = 90^{o}$

Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο προς $180^{o}$. Προκύπτει ότι η τρίτη γωνία $\omega$ είναι ίση προς

$\omega = 180^{o} - 45^{o} - 90^{o} = 45^{o}$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο προς

$$E = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\right)\times\left(-2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-6\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 36 + 9} = \frac{1}{2}9 = 4,5$$

**Άσκηση 6 (12 μονάδες)**

Α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι $A^3=0$ .

Β) Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$.

Να δειχθεί ότι $A^2-5A+7I_2=0$ και $B^3-6B^2+11B-6I_3=0$

Γ) Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα A λέγεται ίχνος και συμβολίζεται με tr(A) (πχ αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ τότε $tr(A) = 3 + 2 = 5$).

Δείξτε ότι αν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες και $\lambda \in R$ :

- $tr(\lambda A) = \lambda\ tr(A)$

- $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
- $tr(AB)=tr(BA)$
- $tr\left(ABC\right)=tr(BCA)=tr(CAB)$

Δ) Έστω ο πίνακας $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \delta\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & \gamma & \varepsilon\end{bmatrix}$ με α,β,γ,δ,ε ∈ R. Για ποιες τιμές των α,β,γ,δ και ε ο πίνακας Α έχει αντίστροφο και ποιος είναι;

Λύση

Α) Έχουμε

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & -\sin\theta\\ -1 & 0 & \cos\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -\sin\theta\\ -1 & 0 & \cos\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-1+\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & -1+\cos^2\theta & \sin\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1\end{bmatrix}$$

και

$$A^3=\begin{bmatrix}0 & 1 & -\sin\theta\\ -1 & 0 & \cos\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\sin^2\theta & \sin\theta-\sin\theta\\ -\cos^2\theta+\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta & \cos\theta-\cos\theta\\ \sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta\cos^2\theta & \sin^2\theta\cos\ \theta-\sin^2\theta\cos\ \theta & -\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta\end{bmatrix}=0$$

Β) Έχουμε ότι $A^2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$ και

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\\ 36 & -60 & 25\end{bmatrix}$$

$$B^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\\ 36 & -60 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -11 & 6\\ 36 & -60 & 25\\ 150 & -239 & 90\end{bmatrix}$$

οπότε $A^2$-5A +7$I_2$=$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και

$B^3$-6$B^2$+11B-6$I_3$=

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 36 & -60 & 25 \\ 150 & -239 & 90 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \\ 36 & -60 & 25 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Γ)

- Έστω Β=λΑ, τότε $\beta_{ij}=\lambda\alpha_{ij}$ με $\beta_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Β και $\alpha_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Α.
  $$tr(\mathrm{B}) = \sum_i \beta_{ii} = \sum_i \lambda a_{ii} = \lambda \sum_i a_{ii} = \lambda tr(A)$$
- Έστω Γ=Α+Β. Τότε $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ με $\gamma_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Γ, $\beta_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Β και $\alpha_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Α.
  $$tr(\Gamma) = \sum_i \gamma_{ii} = \sum_i (a_{ii} + \beta_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i \beta_{ii} = tr(A) + tr(B)$$
- Έστω Γ=ΑΒ.
  Τότε $tr(\Gamma) = \sum_i \gamma_{ii}$ με $\gamma_{ii}$ το στοιχείο της i γραμμής και i στήλης του πίνακα Γ.
  Όμως $\gamma_{ii} = \sum_k a_{ik}\beta_{ki}$ με $\beta_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Β και $\alpha_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Α.

  Έστω Δ=ΒΑ.
  Τότε $tr(\Delta) = \sum_i \delta_{ii}$ με $\delta_{ii}$ το στοιχείο της i γραμμής και i στήλης του πίνακα Δ.
  Όμως $\delta_{ii} = \sum_k \beta_{ik}\alpha_{ki}$ με $\beta_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Β και $\alpha_{ij}$ το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Α.

$$tr(\Gamma) = \sum_i \gamma_{ii} = \sum_i (\sum_k a_{ik}\beta_{ki}) =$$
$$a_{11}\beta_{11} + a_{12}\beta_{21} + \ldots + a_{1\nu}\beta_{\nu 1} +$$
$$a_{21}\beta_{12} + a_{22}\beta_{22} + \ldots + a_{2\nu}\beta_{\nu 2} +$$
.

.

.
$$a_{\nu 1}\beta_{1\nu} + a_{\nu 2}\beta_{2\nu} + \ldots + a_{\nu\nu}\beta_{\nu\nu}$$

$$\underbrace{\sum_i a_{i1}\beta_{1i} \quad \sum_i a_{i2}\beta_{2i} \quad \sum_i a_{i\nu}\beta_{\nu i}}_{\text{Άθροισμα στηλών}}$$

Αν δούμε το άθροισμα σαν άθροισμα από στήλες τότε αφού η στήλη k αντιστοιχεί στο άθροισμα $\sum_{\iota} a_{ik}\beta_{ki} = \sum_{\iota} \beta_{ki}a_{ik}$ το άθροισμα όλων των στηλών είναι $\sum_{k}\sum_{i} \beta_{ki}a_{ik}$

Δηλαδή $\sum_{i}\sum_{k} a_{ik}\beta_{ki} = \sum_{k}\sum_{i} \beta_{ki}a_{ik}$

- Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αποδειχτεί εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη σχέση που αποδείξαμε ( $tr(AB) = tr(BA)$ ). Έχουμε δηλαδή

$$tr\left(ABC\right) = tr(A(BC)) = tr((BC)A) = tr(BCA) = tr(B(CA)) = tr((CA)B) = tr(CAB)$$

Δ) Για να έχει αντίστροφο θα πρέπει η ορίζουσά του να είναι διάφορη του μηδενός δηλαδή

$Δ=α^2 ε \neq 0$ δηλαδή $α\neq0$ και $ε\neq0$.

Υπολογίζουμε τις ελάσσονες ορίζουσες :

$A_{11}=αε$, $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{21}= γδ-βε$, $A_{22}=αε$, $A_{23}= -αγ$, $A_{31}=-αδ$, $A_{32}=0$, $A_{33}=α^2$.

Επομένως $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{\gamma\delta-\beta\varepsilon}{\alpha^2\varepsilon} & -\frac{\delta}{\alpha\varepsilon} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\alpha\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}$

**Άσκηση 7 (8 μονάδες)**

Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α,β $\in$ R, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha x + y + z = 4 \\ x + \beta y + z = 3 \\ x + 2\beta y + z = 4 \end{array}\right\}$$

Λύση

Έχουμε γραμμικό σύστημα 3x3 και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Cramer.
Υπολογίζουμε αρχικά την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = \alpha(\beta - 2\beta) - (1-1) + (2\beta - \beta) = -\alpha\beta + \beta = -\beta(\alpha - 1)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις :

1. Δ≠0 δηλαδή β≠0 και α≠1. Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 1 \\ 4 & 2\beta & 1 \end{vmatrix}}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{4(\beta - 2\beta) - (3-4) + (6\beta - 4\beta)}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{-4\beta + 1 + 2\beta}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{1-2\beta}{\beta(\alpha-1)}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{\alpha(3-4) - 4(1-1) + (4-3)}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{-\alpha+1}{\beta(\alpha-1)} = \frac{1}{\beta}$$

$$z = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & \beta & 3 \\ 1 & 2\beta & 4 \end{vmatrix}}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{\alpha(4\beta - 6\beta) - (4-3) + 4(2\beta - \beta)}{\beta(\alpha-1)} = -\frac{-2\alpha\beta - 1 + 4\beta}{\beta(\alpha-1)} = \frac{2\alpha\beta - 4\beta + 1}{\beta(\alpha-1)}$$

2. Δ=0 δηλαδή β=0 ή α=1
   Διερευνούμε τις 2 περιπτώσεις ξεχωριστά.

   i. β=0. Το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{array}{c} \alpha x + y + z = 4 \\ x + z = 3 \\ x + z = 4 \end{array}\right\}$ και λόγω της $2^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής είναι αδύνατο.,

   ii. α=1 Το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 4 \\ x + \beta y + z = 3 \\ x + 2\beta y + z = 4 \end{array}\right\}$ και οι ορίζουσες $\Delta_x$, $\Delta_y$ και $\Delta_z$ είναι :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 1 \\ 4 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = 4(\beta - 2\beta) - (3-4) + (6\beta - 4\beta) = -4\beta + 1 + 2\beta = 1 - 2\beta$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & \beta & 3 \\ 1 & 2\beta & 4 \end{vmatrix} = \Delta_x = 2\beta - 1$$

Αν $\beta \neq \frac{1}{2}$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ αν $\beta = \frac{1}{2}$ έχει άπειρες λύσεις. Το σύστημα γίνεται

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+\frac{1}{2}y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+\frac{1}{2}y+z=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=4 \\ \frac{1}{2}y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2-z \\ y=2 \end{matrix}\right\}$$ και οι άπειρες λύσεις του είναι $z=\lambda$, $y=2$, $x=2-\lambda$, $\lambda \in R$

**Άσκηση 8 (8 μονάδες)**

Δίνεται το τριώνυμο: $(\lambda^2 + \lambda - 2)\, x^2 + 2(\lambda - 1)\, x + 4$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ ώστε να έχει ρίζες:

α) ετερόσημες με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική και

β) αντίστροφες

Λύση

Για να είναι τριώνυμο, θα πρέπει $\alpha \neq 0$ δηλαδή $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$

α) Για να έχει ρίζες ετερόσημες με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική θα πρέπει να συναληθεύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$\Delta>0$ και $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ γιατί αν $x_1$ και $x_2$ οι δύο λύσεις, πρέπει $x_1 x_2 < 0$ ($\frac{\gamma}{\alpha} < 0$) ώστε να είναι ετερόσημες, και $x_1 + x_2 < 0$ ($-\frac{\beta}{\alpha} < 0$) ώστε η αρνητική να είναι απολύτως μεγαλύτερη.

Έχουμε

i) $\Delta = 4(\lambda-1)^2 - 16(\lambda^2+\lambda-2) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 16\lambda^2 - 16\lambda + 32 = 12\lambda^2 - 24\lambda + 36 = 12(-\lambda^2 - 2\lambda + 3)$

Πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 < 0$

Για το τριώνυμο: $\lambda^2+2\lambda-3$. Έχουμε: $\Delta = 2^2 - 4\ 1\ (-3) = 16 > 0$

$$\lambda_{12} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Επειδή $\Delta>0$ αν $\lambda \in (-3,1)$, το τριώνυμο λοιπόν $\lambda^2+2\lambda-3$ γίνεται αρνητικό (ετερόσημο του $\alpha=1$) αν $\lambda \in (-3,1)$ (1)

ii) $\quad -\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-2(\lambda-1)}{\lambda^2+\lambda-2}<0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}>0 \Leftrightarrow (\frac{1}{\lambda+2}>0$ και

$\lambda \neq 1) \Leftrightarrow (\lambda>-2$ και $\lambda \neq 1)$ δηλαδή $-\frac{\beta}{\alpha}<0$ αν $\lambda \in (-2,1) \cup (1,+\infty)$ (2)

iii) $\quad \frac{\gamma}{\alpha}<0 \Leftrightarrow \frac{4}{\lambda^2+\lambda-2}<0 \Leftrightarrow \frac{4}{(\lambda-1)(\lambda+2)}<0 \Leftrightarrow -2<\lambda<1$

Δηλαδή $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ αν $\lambda \in (-2,1)$ (3)

Σχηματίζω την τομή των διαστημάτων (1) (2) (3) και έχω:

$\lambda \in (-2,1)$ δηλαδή το τριώνυμο έχει ετερόσημες ρίζες με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική αν $\lambda \in (-2,1)$

β) Για να είναι αντίστροφες οι ρίζες του πρέπει

Δ≥0 και $\frac{\gamma}{\alpha}=1$

Για Δ≥0 έχουμε από την (1) έχουμε : $\lambda \in [-3,1]$

Για $\frac{\gamma}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{\lambda^2+\lambda-2}=1 \Leftrightarrow \begin{matrix} 4=\lambda^2+\lambda-2 \\ \lambda \neq -2, \lambda \neq 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda^2+\lambda-6=0 \\ \lambda \neq -2, \lambda \neq 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$ λ= -3 ή λ=2

Αλλά $2 \notin [-3,1]$

Άρα μόνο για λ=-3 οι ρίζες του αρχικού τριωνύμου γίνονται αντίστροφες. Πράγματι, τότε έχουμε το1 διπλή ρίζα. (Η μονάδα έχει αντίστροφο την μονάδα).

**Άσκηση 9 (10 μονάδες)**

**A)** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες το κλάσμα

$\frac{\lambda x^2+3x-4}{\lambda+3x-4x^2}$ μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές όταν $x \in R$

**B)** Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες $\rho_1$και $\rho_2 \in R$ της $x^2+x+\lambda=0$ να ικανοποιούν τη σχέση $\rho_1^3+2\rho_1\rho_2(\rho_1+1)+2\rho_2=1$

<u>Λύση</u>

**A)** Θέτουμε $\frac{\lambda x^2+3x-4}{\lambda+3x-4x^2}=\kappa$ και έχουμε

$(\lambda+4\kappa)x^2+3(1-\kappa)x-(4+\kappa\lambda)=0$ (1)

Ο κ μπορεί να πάρει τιμές εκείνες και μόνο εκείνες για τις οποίες η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta \geq 0$ δηλαδή :

$[3(1-\kappa)]^2-4(\lambda+4\kappa)[-(4+\kappa\lambda)] \geq 0 \Rightarrow 9(-12\kappa+\kappa^2)+4(4\lambda+\kappa\lambda^2+16\kappa+4\kappa^2\lambda) \geq 0 \Rightarrow$

$9-18\kappa+9\kappa^2+16\lambda+4\kappa\lambda^2+64\kappa+16\kappa^2\lambda \geq 0 \Rightarrow (9+16\lambda)\kappa^2+2(23+2\lambda^2)\kappa+9+16\lambda \geq 0$ (2)

Αν η (2) αληθεύει για κάθε κ τότε το κλάσμα μπορεί να πάρει κάθε τιμή. Αλλά για να αληθεύει η (2) για όλες τις τιμές του κ πρέπει

Δ<0 και α>0 δηλαδή:

$\Delta=2^2(23+2\lambda^2)^2-4(9+16\lambda)(9+16\lambda) \leq 0$ και $\alpha=9+16\lambda>0$

Λύνουμε το σύστημα των ανισώσεων

Η πρώτη ανίσωση γίνεται : $4(23+2\lambda^2)^2-4(9+16\lambda)^2 \le 0 \Rightarrow (23+2\lambda^2)^2-(9+16\lambda)^2 \le 0 \Rightarrow [(23+2\lambda^2-(9+16\lambda)]\ (23+2\lambda^2+9+16\lambda) \le 0 \Rightarrow (2\lambda^2-6\lambda+14)(2\lambda^2+16\lambda+32) \le 0 \Rightarrow (\lambda^2-8\lambda+7)(\lambda^2+8\lambda+16) \le 0 \Rightarrow (\lambda^2-8\lambda+7)(\lambda+4)^2 \le 0 \Rightarrow$

Επειδή $(\lambda+4)^2 \ge 0$ άρα αληθεύει όταν λ=-4 ή $\lambda^2-8\lambda+7 \le 0$

Επειδή για το τριώνυμο $\lambda^2-8\lambda+7$ έχουμε $\Delta=36 \ge 0$ προκύπτει $\lambda_{12} = \dfrac{8 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$

Άρα $\lambda^2-8\lambda+7 \le 0$ αληθεύει για $1 \le \lambda \le 7$

Δηλαδή $(\lambda^2-8\lambda+7)(\lambda+4)^2 \le 0 \Rightarrow$ ($\lambda= -4$ ή $1 \le \lambda \le 7$) (3)

Η δεύτερη ανίσωση γίνεται

$9+16\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda > -\dfrac{9}{16}$ (4)

Οι (3) και (4) πρέπει να συναληθεύουν άρα $1 \le \lambda \le 7$

Σε αυτήν την περίπτωση όμως, ο παρανομαστής του κλάσματος μπορεί να γίνει μηδέν οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $R - \left\{ \dfrac{3+\sqrt{9+16\lambda}}{8}, \dfrac{3-\sqrt{9+16\lambda}}{8} \right\}$

**Β)** Καταρχάς για να έχει λύσεις, θα πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Επομένως $-4\lambda \ge 0$ ή $\lambda \le -1/4$. (1)

Για τις λύσεις της $x^2+x+\lambda=0$ ισχύει $\rho_1+\rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -1$ (2) και $\rho_1\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda$ (3)

Η $\rho_1^3+2\rho_1\rho_2(\rho_1+1)+2\rho_2=1$ γράφεται

$\rho_1^3 - 1 + 2\rho_2(\rho_1^2 + \rho_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\rho_1 - 1)(\rho_1^2 + \rho_1 + 1) + 2\rho_2(\rho_1^2 + \rho_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho_1^2 + \rho_1 + 1)(\rho_1 + 2\rho_2 - 1) = 0$ (4)

αλλά $\rho_1^2 + \rho_1 + 1 \ne 0$ για κάθε $\rho \in R$ οπότε από τη (4)

$\rho_1 + 2\rho_2 - 1 = 0 \Rightarrow (\rho_1 + \rho_2) + \rho_2 - 1 = 0$ και από (2)

$-1+\rho_2-1=0 \Rightarrow \rho_2 = 2$ κι άρα από (2) προκύπτει $\rho_1 = -3$

Από (3) αντικαθιστώντας $\rho_1= -3$ και $\rho_2= 2$ προκύπτει $2(-3)=\lambda \Rightarrow \lambda = -6$ που ικανοποιεί και την (1).

**Άσκηση 10 (12 μονάδες)**

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \sqrt{1-x}$, g(x)=sin2x με πεδία ορισμού $(-\infty,1]$, και $[0,\pi]$ αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει η συνάρτηση $f \circ g$ και αν ναι, βρείτε το πεδίο ορισμού της τον τύπο της και το σύνολο εικόνων της.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to [-\dfrac{1}{2},1)$ με τύπο $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι «1-1» και «επί». β) Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της.

**Γ)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2-10x+15$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση είναι 1-1 και επί. Να βρεθούν οι κατάλληλοι περιορισμοί της που είναι αντιστρέψιμοι (πεδίο ορισμού, τιμών και τύπος που δίνει τις τιμές της συνάρτησης)

Λύση

**Α)** Το σύνολο εικόνων της g(x) είναι το [-1,1] που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f(x). Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το σύνολο {x∈[0,π] ώστε sin2x≤1} δηλαδή το [0,π].
Επομένως ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το [0,π], τύπο $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-\sin 2x}$ και σύνολο εικόνων το $[0,\sqrt{2}\,]$.
**Β)** Εξετάζουμε πρώτα αν είναι «1-1».

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+2} \Rightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{y} + 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{xy} - \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Rightarrow x = y$$

Επομένως είναι «1-1».
Θα προσδιορίσουμε τώρα το σύνολο εικόνων. Έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow \sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow (y-1)\sqrt{x} = -2y-1 \quad (1)$$

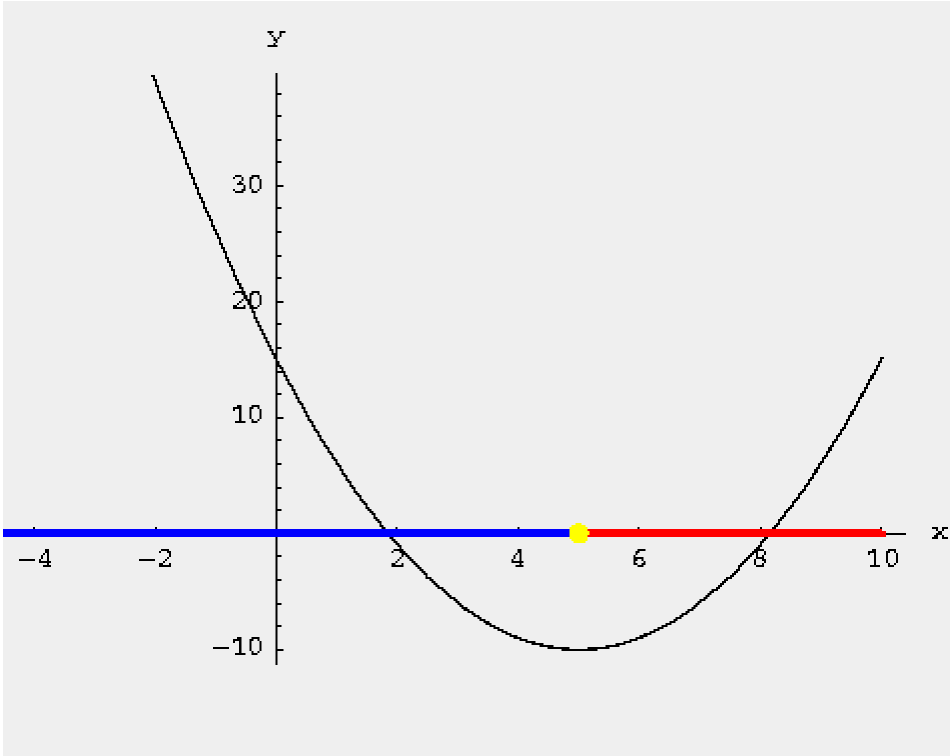
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ οπότε η (1) γίνεται $0=-3$, αδύνατη
- $y-1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$ οπότε η (1) δίνει $\sqrt{x} = \frac{-2y-1}{y-1} = \frac{2y+1}{1-y}$ Επειδή $\sqrt{x} \geq 0$ θα πρέπει να είναι $\frac{2y+1}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow (2y+1)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2},1\right)$.

Επομένως το σύνολο εικόνων ταυτίζεται με το πεδίο τιμών, άρα η συνάρτηση είναι «επί». Η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο χρησιμοποιώντας την (1)

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2y+1}{1-y}\right)^2 \text{ ή } f^{-1}(x) = \left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^2$$

**Γ)**
**α)** Κάνουμε το τριώνυμο τέλειο τετράγωνο $x^2$-10x+15= $x^2$-2 (5)x+$5^2$-$5^2$+15=$(x-5)^2$-10
Επειδή α=1>0 η γραφική παράσταση είναι παραβολή $\cup$ με κορυφή το (5,-10)




**β)** Έχουμε f(x)=x(x-10) +15 οπότε f(10)=f(0)=15 άρα δεν είναι 1-1

Πεδίο τιμών Είναι y= $x^2$-10x+15 $\Leftrightarrow x^2-10x+(15-y)=0$ απ΄όπου $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 10^2-4(15-y)\geq 0 \Leftrightarrow 100-60+4y\geq 0 \Rightarrow 4y\geq -40 \Leftrightarrow y\geq -10$ οπότε $[-10,+\infty)\subset R$ Άρα δεν είναι επί (<u>β΄τρόπος</u>: από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι υπάρχουν ευθείες που φέρονται από σημεία του R του άξονα yy΄ , παράλληλες στο xx΄και δεν τέμνουν το διάγραμμα).

Άρα δεν αντιστρέφεται. Μπορούμε να την περιορίσουμε σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,5],[5,+\infty)$ οπότε η δοσμένη συνάρτηση αντιστρέφεται κατά τμήματα

$[f^{-1}(x)]^2$ -10 $[f^{-1}(x)]$+15= x $\Leftrightarrow (f^{-1}(x)-5)^2=x+10 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=5\pm\sqrt{x+10}$

Άρα $[-10,+\infty)\rightarrow[5,+\infty)$ $\quad f_1^{-1}(x)=5+\sqrt{x+10}$

Αν $[-10,+\infty)\rightarrow(-\infty,5]$ $\quad f_2^{-1}(x)=5-\sqrt{x+10}$