3η Εργασία

Άσκηση 1 (8 μονάδες)

A) (4 μονάδες).

Η επιτάχυνση μιας βενζινακάτου ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από την εξίσωση:

$a = Bt – Ct^2$, όπου οι μονάδες της a είναι m/s^2.

α). Ποιες είναι οι μονάδες των B και C;

β). Ποια είναι η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου αν η βενζινάκατος ξεκινάει ενώ προηγουμένως ήταν ακίνητη, δηλ. όταν t = 0;

γ) Σε ποιο χρόνο t_1 η επιτάχυνση είναι μηδέν;

δ). Ποια είναι η ταχύτητα την χρονική στιγμή t_1;

Απάντηση

α) $a = [B\,t - C\,t^2]\ m/s^2 \rightarrow B : m/s^3$, $C : m/s^4$

β) $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow d\upsilon = a dt \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^{t} (Bt - Ct^2)dt \Rightarrow \upsilon = (B\,t^2)/2 - (C\,t^3)/3 + c$

και επειδή για t=0, υ=0 προκύπτει c=0, άρα

$\upsilon=(B\,t^2)/2 - (C\,t^3)/3$

γ) $a = [B\,t - C\,t^2] = 0 \rightarrow t = B/C$

δ) $\upsilon = (B\,t^2)/2 - (C\,t^3)/3$ η οποία για t = B/C δίνει: $\upsilon = B^3/6C^2$

B) (4 μονάδες).

Ένα σωμάτιο κινείται πάνω στον άξονα x. Η ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$\upsilon = 5 + 10t$, όπου το υ είναι σε m/s .

Η θέση του σωματίου για t = 0 είναι 20 m. Να βρείτε:

α) την επιτάχυνση ως συνάρτηση του χρόνου

β) τη θέση ως συνάρτηση του χρόνου και

γ) την ταχύτητα του σωματίου κατά τη χρονική στιγμή t = 0.

Απάντηση

α) $a = d\upsilon/dt = 10\ m/s^2$ = σταθ.

β) $\upsilon=\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (5+10t) = 5t + (10t^2)/2 + c = 5t + 5t^2 + c$

και επειδή για t = 0, x = 20 m προκύπτει c=20, άρα

$x = 5t + 5t^2 + 20$

γ) Για t = 0, η σχέση υ = 5 + 10t δίνει: υ = 5 m/s

Άσκηση 2 (8 μονάδες)

A) (4 μονάδες)

Μία μέλισσα βρίσκεται σε t=0 στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και πετάει με ταχύτητα $\vec{v} = [3,0,0]$ m/s όταν βλέπει ένα λουλούδι στη θέση $\vec{r} = [1,0,2]$ m και θέλει να το φτάσει σε 2 s. Υποθέτοντας ότι πετάει με σταθερή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα των 2 s, πόση πρέπει να είναι η επιτάχυνσή της για να το φτάσει;

Απάντηση

Για σταθερή επιτάχυνση a

$$r(t) = r(t_o) + v(t_o)\,(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Για t=2 s, $\vec{\mathbf{r(t)}}$=[1,0,2] και $\vec{\mathbf{r(t_o)}}$=[0,0,0], $\vec{\mathbf{v}}\mathbf{(t_o)}$=[3,0,0]

Αρα [1,0,2]m =[0,0,0]m+[3,0,0] 2 m+$\frac{1}{2}$ a 2^2 s^2

Αρα $\vec{a}$ =[$-\frac{5}{2}$,0,1] m/s^2

Β) (4 μονάδες)

Ένα κινητό διανύει το πρώτο τρίτο μιας απόστασης με ταχύτητα 10 m/s, το δεύτερο τρίτο με ταχύτητα 20 m/s και το τελευταίο τρίτο με ταχύτητα 60 m/s. Ποια είναι η μέση τιμή της ταχύτητας με την οποία διήνυσε το κινητό όλο το διάστημα;

Απάντηση

Αν θεωρήσουμε πως η συνολική απόσταση είναι 3s,τότε ο χρόνος t_1 που απαιτήθηκε για να διανυθεί το πρώτο τρίτο της απόστασης ήταν: t_1 = s/10
Ο χρόνος που απαιτήθηκε για να διανυθεί το δεύτερο τρίτο: t_2 = s/20
Και ο χρόνος που απαιτήθηκε για να διανυθεί το τελευταίο τρίτο: : t_3 = s/60
Ο συνολικός χρόνος:

t = (s/10) + (s/20) + (s/60)

Αν συμβολίσουμε με V την μέση ταχύτητα, τότε:

(3s/V) = s [(1/10) + (1/20) + (1/60)]
3/V = 1/6
V = 18 m/s

Άσκηση 3 (12 μονάδες)

Α) (10 μονάδες)

Ένα σώμα κινείται πάνω στο επίπεδο xy και η επιτάχυνσή του έχει μόνο συνιστώσα x, την a_x = 4 m/s^2. Τη στιγμή t = 0 το σώμα ξεκινά από την αρχή των συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα της οποίας η συνιστώσα x είναι 20 m/s και η y συνιστώσα -15 m/s.

α) Προσδιορίστε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος και το μέτρο της την χρονική στιγμή t = 5s

γ) Προσδιορίστε τις συντεταγμένες x και y, για κάθε χρονική στιγμή t και το αντίστοιχο διάνυσμα μετατόπισης.

Απάντηση

α). Επειδή υ_{x0} = 20 m/s και a_x =4 m/s^2, η εξίσωση κίνησης δίνει:

$\upsilon_x = \upsilon_{x0} + a_x t$ = (20 + 4 t) m/s

επίσης:

$\upsilon_y = \upsilon_{y0} + a_y t$ = (-15 +0 t) m/s = -15 m/s

Ετσι: $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x \mathbf{i} + \upsilon_y \mathbf{j}$ = [(20 + 4t)**i** – 15**j**] m/s

β) Για t = 5s, η τελευταία εξίσωση δίνει:

$\boldsymbol{\upsilon}$ = (40**i** -15**j**) m/s

Δηλαδή, τη στιγμή t = 5s, υ_x = 40 m/s και υ_y = -15 m/s.

Ετσι: $|\upsilon| = (\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2)^{1/2} = [(40^2 + (-15)^2]^{1/2}$ = 42.72 m/s

Η γωνία θ που σχηματίζει η υ με τον άξονα των x:
$\tan\theta = (\upsilon_y / \upsilon_x) \rightarrow \ \theta = -20.56^o \sim 20.6^o$

γ) Επειδή για $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$,
$x = \upsilon_{x0}\, t + (1/2)\, a_x\, t^2 = (20t + 2t^2)$ m
$y = \upsilon_{y0}\, t = (-15\, t)$ m
Αρα: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = [(20t + 2\, t^2)\, \mathbf{i} - 15t\, \mathbf{j}]$ m

B)(2 μονάδες)

Δύο πέτρες αφήνονται από ηρεμία από το ίδιο ύψος, η μία μετά την άλλη.

α) Η διαφορά των ταχυτήτων τους θα αυξάνεται; Δικαιολογείστε μαθηματικά την απάντησή σας

β) Η διαφορά των χρόνων αφίξεώς τους στο έδαφος θα είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά μεταξύ των χρόνων που αφέθηκαν ελεύθερες;

Απάντηση

α) Αφού η ταχύτητα κάθε αντικειμένου αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, η διαφορά των ταχυτήτων των δύο αντικειμένων παραμένει η ίδια. Διαλέγοντας θετική φορά του άξονα y προς τα πάνω, και θέτωντας t=0 τη χρονική στιγμή που αφήνεται η δεύτερη πέτρα, η αρχική ταχύτητα της πρώτης πέτρας στο t=0 είναι $(v_{y,1})_o$, οπότε

$v_{y,1}(t) = (v_{y,1})_o - gt$ και

$v_{y,2}(t) = -gt$

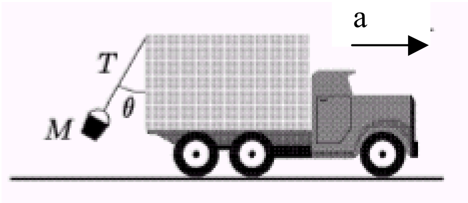
Άρα

$v_{y,1}(t) - v_{y,2}(t) = (v_{y,1})_o$

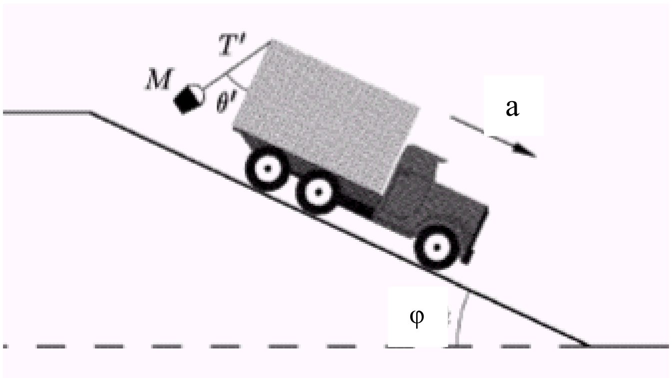
β) Αφού η κάθε πέτρα χρειάζεται το ίδιο χρονικό διάστημα για να διανύσει την ίδια απόσταση, το χρονικό διάστημα μεταξύ των χρόνων που αφέθηκαν ελεύθερες και το χρονικό διάστημα μεταξύ των χρόνων αφίξεώς τους στο έδαφος θα παραμείνει το ίδιο.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Ένα φορτηγό κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση a. Ένα σχοινί (χωρίς μάζα και μη εκτατό) είναι δεμένο στο πίσω μέρος του φορτηγού. Στο άλλο άκρο του σχοινιού είναι δεμένος ένας κουβάς μάζας M που κρέμεται κατακόρυφα όταν το φορτηγό ηρεμεί. Ο κουβάς κινείται γρήγορα όταν το φορτηγό αρχίζει να επιταχύνεται αλλά σύντομα ισορροπεί σε μία σταθερή απόσταση πίσω από το φορτηγό όπου το σχοινί σχηματίζει μία σταθερή γωνία θ με το φορτηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



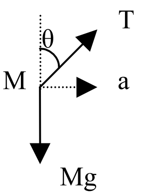
Θεωρώντας ότι η τριβή είναι αμελητέα, α) βρείτε τη γωνία θ στην οποία θα ισορροπήσει το σχοινί β) Ποιά είναι η τάση T του σχοινιού από τη στιγμή που θα ισορροπήσει σχηματίζοντας γωνία θ με το φορτηγό; γ) Υποθέστε ότι το φορτηγό κινείται σε κατηφορικό δρόμο που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο διάγραμμα, και ότι συνεχίζει να επιταχύνεται με επιτάχυνση a.

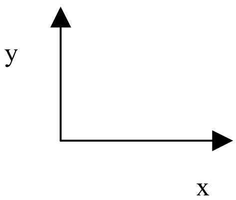


Σε ποιά γωνία θ΄ σε σχέση με το φορτηγό θα ισορροπήσει τώρα το σχοινί ; Ποιά θα είναι η καινούρια τάση T΄ του σχοινιού;
δ) Τι παρατηρείτε για τις σχέσεις των δυο παραπάνω περιπτώσεων ;

Απάντηση

α) Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στον κουβά είναι το βάρος του Mg και η τάση του νήματος T





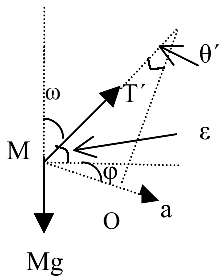
Χρησιμοποιώντας σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x στη διεύθυνση της επιτάχυνσης $\vec{a}$ και τον άξονα y κάθετα προς τα πάνω, έχουμε για την τάση του νήματος T (στο αδρανειακό σύστημα)

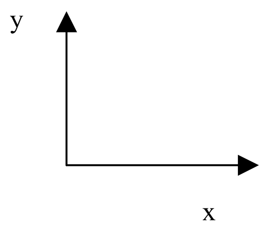
$T\sin\theta = Ma$ (1)
$T\cos\theta = Mg$ (2)

Από (1) και (2) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\frac{a}{g})$

β) από (1) και (2) $T^2\sin^2\theta + T^2\cos^2\theta = M^2a^2 + M^2g^2 \Rightarrow T = M\sqrt{a^2 + g^2}$

γ) Χρησιμοποιώντας το ίδιο σύστημα συντεταγμένων με το ερώτημα (α) έχουμε ω+ε=90^o, ε+φ+θ΄=90^o , ω=$90^o - \varepsilon = 90^o - (90^o - \theta' - \varphi) = \theta' + \varphi$





T΄sin ω=T΄sin(θ΄+φ)=Ma cosφ
T΄cos ω=T΄cos(θ΄+φ) =Mg-Ma sinφ
Από (3) και (4) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$\tan(\theta'+\varphi)=\dfrac{a\cos\varphi}{g-a\sin\varphi}\Rightarrow \theta'=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\cos\varphi}{g-a\sin\varphi}\right)-\varphi$ (5) και

$T'=M\sqrt{a^2\cos^2\varphi+g^2+a^2\sin^2\varphi-2ag\sin\varphi}=M\sqrt{a^2+g^2-2ag\sin\varphi}$ (6)

δ) Παρατηρούμε ότι για φ= 0 οι σχέσεις (5) και (6) του (γ) ερωτήματος γίνονται

$\theta'=\tan^{-1}(\frac{a}{g})$ και $T'=M\sqrt{a^2+g^2}$

δηλαδή βρίσκονται σε συμφωνία με το (α) και (β) όπως αναμένεται!
Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ερώτημα (γ) επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x κατά τη διεύθυνση της επιτάχυνσης $\vec{a}$ και τον άξονα y κάθετα στο δρόμο.
Τότε έχουμε

$\vec{F}=M\vec{a}$

[T΄sinθ΄+Mgsinφ, T΄cosθ΄-Mgcosφ]=[Ma,0] απ΄όπου
T΄cosθ΄= Mgcosφ (7)
T΄sinθ΄= Ma- Mgsinφ (8)

Από (7) και (8) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει $\tan\theta'=\dfrac{Ma-Mg\sin\varphi}{Mg\cos\varphi}=\dfrac{a-g\sin\varphi}{g\cos\varphi}$ ή

$\theta'=\tan^{-1}\left(\dfrac{a-g\sin\varphi}{g\cos\varphi}\right)$

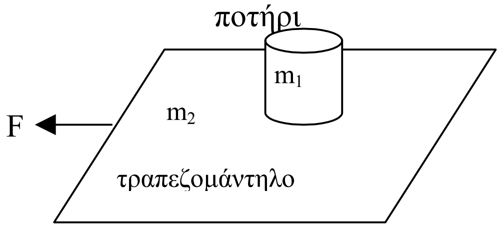
και $T'=M\sqrt{(Mg\cos\varphi)^2+M^2a^2+M^2g^2\sin^2\varphi-2M^2ag\sin\varphi}=M\sqrt{a^2+g^2-2ag\sin\varphi}$

Για να δείξουμε ότι η γωνία θ΄ είναι η ίδια με αυτή του ερωτήματος (γ) χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

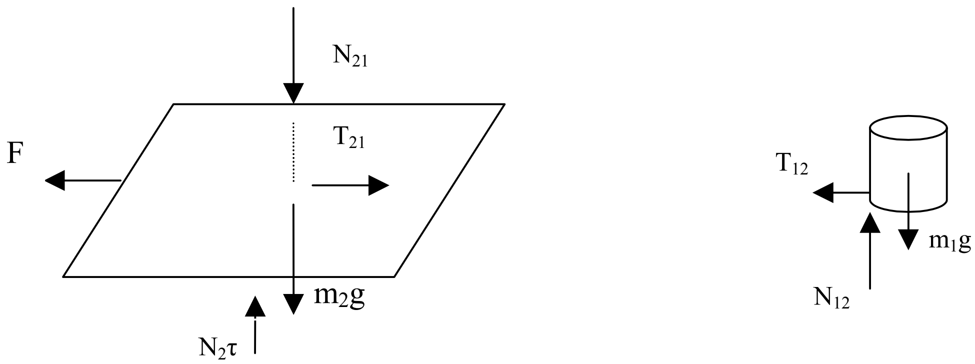
Άσκηση 5 (10 μονάδες)

Ένα γυάλινο ποτήρι μάζας m_1 ισορροπεί πάνω σε ένα τραπέζι με τραπεζομάντηλο μάζας m_2. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του τραπεζομάντηλου και του ποτηριού είναι μ_s και το τραπέζι είναι πολύ γυαλισμένο ώστε να μην υπάρχουν τριβές, ποιά είναι η μέγιστη οριζόντια δύναμη με την οποία μπορούμε να τραβήξουμε το τραπεζομάντηλο έτσι ώστε το ποτήρι και το τραπεζομάντηλο να κινηθούν μαζί χωρίς να ολισθήσουν (Υπόδειξη: σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για *κάθε σώμα*)

Απάντηση



Διαγράμματα ελεύθερου σώματος



<u>Στο τραπεζομάντηλο</u> ασκούνται η εξωτερική δύναμη F, το βάρος του m_2g, η δύναμη N_{21} από το ποτήρι,η δύναμη $N_{2τ}$ από το τραπέζι και η τριβή T_{21}

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα $\Sigma \vec{F_2} = m_2 \vec{a}_2$

Στον άξονα x : $F-T_{21}= m_2\, a_{2x}$ (1)

Στον άξονα y: $N_{2τ}-N_{21}-m_2\, g =0$ (2)

<u>Στο ποτήρι</u> ασκούνται το βάρος του m_1g , η δύναμη N_{12} από το τραπεζομάντηλο και η τριβή T_{12}

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα $\Sigma \vec{F_1} = m_1 \vec{a}_1$

Στον άξονα x : $T_{12}= m_1\, a_{1x}$ (3)

Στον άξονα y: $N_{12}-m_1\, g =0$ (4)

Σύμφωνα με το 3ο νόμο του Νεύτωνα $T_{12}=T_{21}$ (5)

Οριακές συνθήκες ολίσθησης

1) $a=a_{1x}=a_{2x}$

2) Η στατική τριβή είναι μέγιστη όταν

$T_{12}=\mu_s N_{12}= (T_{12})_{max}$

Από τη σχέση (4) προκύπτει $N_{12}= m_1\, g$ οπότε $T_{12}=\mu_s\, m_1\, g$

Άρα η (1) γίνεται $F_{max}- \mu_s\, m_1\, g = m_2\, a$

$\mu_s\, m_1\, g = m_1\, a \Rightarrow a= \mu_s\, g$ και άρα

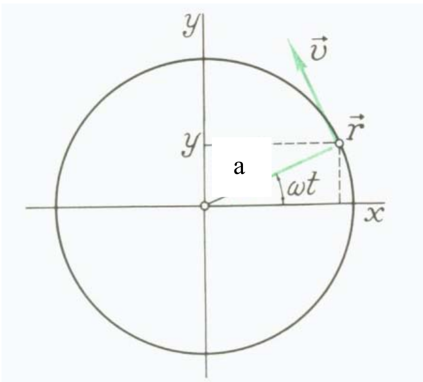
$F_{max} = \mu_s\, m_1\, g + m_2\, a= \mu_s\, m_1\, g + m_2\, \mu_s\, g = \mu_s\, (m_1 + m_2)\, g$

Άσκηση 6 (6 μονάδες)

Α) (4 μονάδες)

(α) Γράψτε μια έκφραση για το διάνυσμα θέσης **r** ενός σωματιδίου που διαγράφει ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο Τ, χρησιμοποιώντας ορθογώνιες συντεταγμένες και τα μοναδιαία διανύσματα **i** και **j** β) από το ερώτημα (α) βρείτε τις διανυσματικές εκφράσεις για τη ταχύτητα **υ** και την επιτάχυνση **a**.(γ) Αποδείξτε ότι η επιτάχυνση έχει διεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής κίνησης.

Απάντηση



α) Στην ομαλή κυκλική κίνηση , η γωνία φ είναι $\varphi=\omega t=\frac{2\pi t}{T}$

Αν η ακτίνα περιστροφής είναι r τότε έχουμε

$x = r\cos\frac{2\pi t}{T}$ και $y = r\sin\frac{2\pi t}{T}$

Άρα το διάνυσμα θέσης **r** είναι

$$\mathbf{r}= r\cos\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{i}+ r\sin\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{j}$$

β) Η στιγμιαία ταχύτητα είναι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\mathbf{i}+ \frac{d}{dt}\left(r\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = -\frac{2\pi r}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{i}+\frac{2\pi r}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{j}$$

Η επιτάχυνση $\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$ είναι

$$\mathbf{a}= -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{i}-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T}\,\mathbf{j}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$a_x= -\frac{4\pi^2}{T^2}x$ και $a_y= -\frac{4\pi^2}{T^2}y$

Η επιτάχυνση **a** έχει την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα θέσης **r** αλλά αντίθετη φορά δηλαδή προς το κέντρο περιστροφής. Έχουμε λοιπόν :

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\,\mathbf{r}$$

Β) (2 μονάδες)

Περπατώντας ή τρέχοντας θα προτιμούσατε να διασχίσετε ένα δρόμο χωρίς ομπρέλα την ώρα της βροχής αν η βροχή πέφτει πλάγια και σας χτυπάει στην πλάτη. Απαντήστε στηρίζοντας τον συλλογισμό σας στην προϋπόθεση ότι το σώμα σας έχει ορθογώνιο σχήμα, και ότι φοράτε καπέλο.

Απάντηση

Το καπέλο απλοποιεί το πρόβλημα αφού δεν σας νοιάζει για τη βροχή που πέφτει κατακόρυφα στο κεφάλι σας. Αφού η βροχή σας χτυπά στην πλάτη, θα πρέπει να τρέχετε με τόση ταχύτητα, όση είναι η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της βροχής, ώστε να μετατοπίζεστε οριζόντια μαζί της.

Άσκηση 7 (10 μονάδες)

Α) Ένα διαστημόπλοιο με σβηστές τουρμπίνες έρχεται προς τη Γη από χώρο όπου δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας. Από την οροφή του κρεμάμε ένα δυναμόμετρο στην ελεύθερη άκρη του οποίου υπάρχει κρεμασμένο ένα σώμα μάζας m. Θα υπάρχει διαφορά στην ένδειξη του δυναμομέτρου κατά την είσοδό του στο πεδίο βαρύτητας της Γης;

Β) Ποιά περίοδο περιστροφής γύρω από τον άξονά της έπρεπε να έχει η Γη για να αποσπάται από την επιφάνειά της ένα σώμα που βρίσκεται στον ισημερινό;

Γ) Μπορούν οι αστροναύτες που περιφέρονται σε τροχιά να διαπιστώσουν ποιά αντικείμενα μέσα στο διαστημόπλοιό τους θα είναι βαριά ή ελαφριά στη Γη; Προτείνετε τρόπο.

Δίνονται $g=10\ m/s^2$ και $R_\Gamma = 6\,400$ km

Απάντηση.

Α) Εκτός πεδίου η ένδειξη του δυναμομέτρου είναι μηδέν γιατί δεν υπάρχει βαρύτητα. Εντός πεδίου, το διαστημόπλοιο κινείται με επιτάχυνση $\vec{g}$ και κάθε σώμα στο εσωτερικό του θα κινείται επίσης με επιτάχυνση $\vec{g}$. Έτσι στο σώμα ασκούνται η δύναμη βαρύτητας $\vec{F_g}$ από τη Γη και η δύναμη $\vec{F}$ από το δυναμόμετρο δηλαδή ισχύει

F_g-F= mg ή mg-F=mg και άρα F=0

δηλαδή η ένδειξη του δυναμομέτρου θα είναι μηδέν

'Αρα και στις δύο περιπτώσεις η ένδειξη του δυναμομέτρου είναι μηδέν

Β) Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m στον ισημερινό της Γης. Στο σώμα ασκούνται το βάρος του B=mg και η δύναμη F από το έδαφος. Το σώμα κάνει κυκλική κίνηση μαζί με τη Γη οπότε $B\text{-}F= F_\kappa$

$$mg-F= m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma} \quad \text{αλλά } \upsilon=\frac{2\pi}{T}R_\Gamma \text{ οπότε}$$

$$mg-F=m\frac{4\pi^2}{T^2}R_\Gamma \text{ ή } F= m\left(g-\frac{4\pi^2}{T^2}R_\Gamma\right)$$

Για να αιωρείται το σώμα δηλαδή να επικρατούν "συνθήκες έλλειψης βαρύτητας" θα πρέπει F=0 οπότε

$$g =\frac{4\pi^2}{T^2}R_\Gamma \text{ ή } T=2\pi\sqrt{\frac{R_\Gamma}{g}} =1600\ \pi = 5024\ s \sim 1.4\ h.$$

Αν T<1.4 h το σώμα αποσπάται από τη Γη .

Γ) Ναι. Η βαρυτική μάζα είναι ίση με τη μάζα αδρανείας

$m_{\beta\alpha\rho}=m_{\alpha\delta\rho}$

Άρα, αν οι αστροναύτες ασκήσουν την ίδια δύναμη σε δύο διαφορετικά αντικείμενα και μετρήσουν τις επιταχύνσεις τους, οπότε

$F= m_1a_1=m_2a_2$

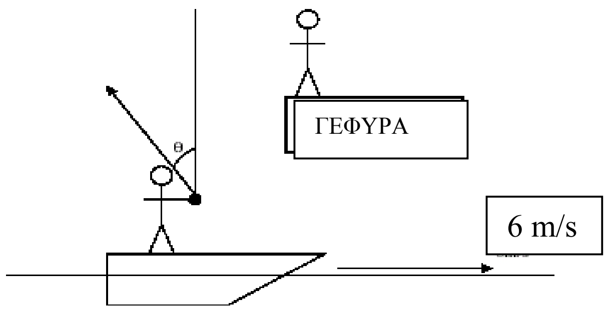
από αυτές τις μετρήσεις, μπορούν να προσδιορίσουν τον λόγο των μαζών αδρανείας

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

Το σώμα που θα έχει τη μικρότερη επιτάχυνση θα έχει τη μεγαλύτερη μάζα αδρανείας και άρα θα είναι το βαρύτερο στη Γη.

Άσκηση 8 (10 μονάδες)

Έστω ότι στέκεστε στη γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου και κοιτάτε τα πλοία που περνούν από κάτω (από τον Πατραϊκό προς τον Κορινθιακό κόλπο). Βλέπετε μία βενζινάκατο να περνά ακριβώς από κάτω, κινούμενη κάθετα ως προς τη γέφυρα με ταχύτητα 6m/s. Ένας άνθρωπος πάνω στη βενζινάκατο πετάει μία μπάλα με αρχική ταχύτητα V_o που σχηματίζει γωνία $\theta=36.9^0$ με την κατακόρυφο της γέφυρας (η V_o και η γωνία δίνονται σε σχέση με τη βάρκα). Ποιά θα πρέπει να είναι η ταχύτητα V_o ώστε η μπάλα να έρθει κατευθείαν προς τα εσάς (κατακόρυφα προς τα επάνω). Στο σχεδιάγραμμά σας, σχεδιάστε τη διεύθυνση βολής της μπάλας σε σχέση με τη βάρκα.



Απάντηση

Προκειμένου η μπάλα να κινηθεί κατακόρυφα στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας, θα πρέπει να ριχτεί όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα στο σύστημα αναφοράς της βάρκας. Αν $\vec{V}(\mu\pi-\beta)$ είναι η ταχύτητα της μπάλας στο σύστημα της βάρκας, $\vec{V}(\mu\pi-\gamma)$ είναι η ταχύτητα της μπάλας στο σύστημα της γέφυρας και $\vec{V}(\beta-\gamma)$ είναι η ταχύτητα της βάρκας στο σύστημα της γέφυρας, τότε

$$\vec{V}(\mu\pi-\beta)+\vec{V}(\beta-\gamma)=\vec{V}(\mu\pi-\gamma)\Rightarrow V_{x\,(\mu\pi-\beta)}+V_{x(\beta-\gamma)}=0\Rightarrow$$

$$V_{x\,(\mu\pi-\beta)}-6\,m/s=0\Rightarrow V_o\sin\vartheta=6m/sec\Rightarrow V_o=10m/s$$

Δηλαδή η μπάλα θα πρέπει να έχει μία x συνιστώσα ταχύτητας (ως προς το σύστημα της βάρκας) για να αναιρεί την ταχύτητα των 6 m/s της κίνησης της βάρκας, ώστε συνολικά η x συνιστώσα της ταχύτητάς της, ως προς τη γέφυρα, να είναι μηδέν.

Άσκηση 9 (10 μονάδες)

Περίπτωση (Α) Σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου υ_o=18 m/s από το δάπεδο ενός ασανσέρ, το οποίο τότε αρχίζει να ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου a=2 m/s^2.

Περίπτωση (Β) Ασανσέρ κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου a= 4 m/s^2. Κάποια στιγμή αφήνεται από την οροφή του ένα σώμα. Το ύψος του ασανσέρ είναι h=3 m.

Να βρείτε και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις α) μετά από πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στο δάπεδο του ασανσέρ β) με τί ταχύτητα θα φτάσει στο δάπεδο του ασανσέρ ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο ασανσέρ εκείνη τη στιγμή; . Δίνεται g=10 m/s^2

Απάντηση

Α) Για y θετικό προς τα πάνω, στο σημείο συνάντησης έχουμε

Για το σώμα $y = \upsilon_o\, t - \frac{1}{2} g t^2$ (1)

και $\upsilon_\sigma = \upsilon_o - g\, t$ (2)

Για το δάπεδο του ασανσέρ $y = \frac{1}{2} a t^2$ (3)

και $\upsilon_\alpha = a\, t$ (4)

α) Από (1) και (3) προκύπτει $t = \frac{2\upsilon_o}{(g+a)} = 3$ s

Τη στιγμή συνάντησης η ταχύτητα του σώματος είναι από την (2)

υ_σ= 18 (m/s) -10(m/s^2) 3s= -12 m/s άρα το σώμα κινείται προς τα κάτω

ενώ το ασανσέρ από την (4) υ_α= 2 (m/s^2) 3 s= 6 m/s κινείται προς τα πάνω.

Άρα η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς το ασανσέρ είναι $\upsilon_\sigma - \upsilon_\alpha = -18$ m/s δηλαδή έχει φορά προς τα κάτω

Β) Στο σημείο συνάντησης έχουμε

Για το δάπεδο του ασανσέρ: $s = \upsilon\, t + \frac{1}{2} a t^2$ (1)

και $\upsilon_\alpha = \upsilon + a\, t$ (2)

Για το σώμα $s + h = \upsilon\, t + \frac{1}{2} g t^2$ (3)

και $\upsilon_\sigma = \upsilon + g\, t$ (4)

α) Από (1) και (3) προκύπτει ότι $t = \sqrt{\frac{2h}{(g-a)}} = 1$ s

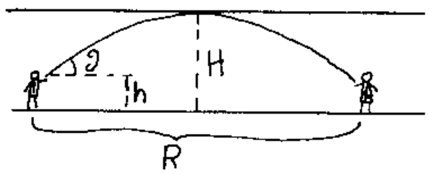
β) Από (2) και (4) $\upsilon_\sigma - \upsilon_\alpha = (g-a)\, t = 6$ m/s

Άσκηση 10 (10 μονάδες)

Δύο παιδιά παίζουν πετόσφαιρα με μια μπάλα σε ένα μακρύ διάδρομο. Το ύψος της οροφής είναι Η. Τα παιδιά πετούν και αρπάζουν την μπάλα στο ύψος των ώμων τους

h. Αν τα παιδιά μπορούν να πετάνε την μπάλα με μια ταχύτητα υ_o, σε πόση απόσταση μεταξύ τους μπορούν να παίζουν;

Απάντηση
Η μπάλα μόλις που θα ακουμπήσει το ταβάνι, αν από το σημείο ρίψης ανέβει σε ύψος y_{max}= H-h στο μέσο της διαδρομής ανάμεσα στα δύο παιδιά.



Γνωρίζουμε ότι :

$$y_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \vartheta}{2g} \text{ και βεληνεκές } R = \frac{2\upsilon_0^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{g} \quad (1)$$

Άρα η μπάλλα μόλις θα ακουμπήσει το ταβάνι εάν y_{max} =H-h =

$$\frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \vartheta}{2g} \Rightarrow \sin^2 \vartheta = \frac{2g}{\upsilon_0^2}(H-h) \quad (2)$$

Η (1) με αντικατάσταση της (2) γίνεται :

$$R = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\sqrt{\frac{2g}{\upsilon_0^2}(H-h)}\sqrt{1-\frac{2g}{\upsilon_0^2}(H-h)} \Rightarrow R = 4\sqrt{(H-h)[\frac{\upsilon_0^2}{2g}-(H-h)]}$$

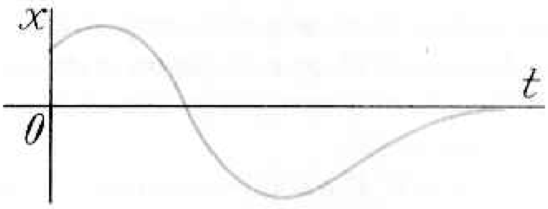
Το μέγιστο βεληνεκές R=$\frac{\upsilon_0^2}{g}$ επιτυγχάνεται για $\theta=45^o$ δηλαδή $\sin^2\theta=1/2$ οπότε από (2)

H-h =$\frac{\upsilon_0^2}{4g}$.

Αν H-h >$\frac{\upsilon_0^2}{4g}$ το ταβάνι είναι τόσο ψηλό ώστε η μπάλα να μην φτάνει στο ταβάνι για γωνίες βολής $\theta<45^0$

Άσκηση 11 (6 μονάδες)

Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x με μετατόπιση αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα. Σχεδιάστε προσεγγιστικά τις καμπύλες υ(t) και a(t) για την κίνηση αυτή.



Απάντηση

Σημείο Α: Παρουσιάζει μέγιστο της απομάκρυνσης, άρα η ταχύτητα είναι μηδέν

Σημείο Β: Αλλάζει τα κοίλα από κάτω προς τα πάνω, άρα η ταχύτητα είναι ελάχιστη και η επιτάχυνση μηδέν. Η κίνηση από επιταχυνόμενη γίνεται επιβραδυνόμενη.

Σημείο Γ: Η απομάκρυνση είναι ελάχιστη, η ταχύτητα γίνεται μηδέν

Σημείο Δ: Αλλάζει τα κοίλα από πάνω προς τα κάτω, άρα η ταχύτητα είναι μέγιστη και η επιτάχυνση μηδέν.

Σημείο Ε : Η απομάκρυνση τείνει ασυμπτωτικά στο 0. Το ίδιο θα τείνουν στο μηδέν και η ταχύτητα και η επιτάχυνση.