ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5. 2002-2003, ΦΥΕ14

1. *Από την ίδια γραμμή αφετηρίας(από το ίδιο ύψος) ενός κεκλιμένου επιπέδου αφήστε να κυλήσουν, ταυτόχρονα προς τα κάτω, δύο κυλίνδροι της ιδίας μάζας και των ιδίων διαστάσεων. Ο ένας συμπαγής ξύλινος και ο άλλος κοίλος μεταλλικός.*
Ποιός θα φτάσει γρηγορώτερα στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου;
Δικαιολογείστε την απάντησή σας με την χρήση μαθηματικών υπολογισμών.

Μονάδες 5

Κάνετε στο σπίτι σας αυτό το πείραμα χρησιμοποιώντας δύο ή τρείς συμπαγείς κυλίνδρους διαφόρων μεγεθών και μαζών. Τι παρατηρείτε; Δικαιολογείται αυτό που παρατηρείτε από τη λύση που δώσατε για το πρώτο μέρος της άσκησης;

Μονάδες 2

1α. Επειδή τα δύο σώματα κυλίονται χωρίς ολίσθηση: $\omega = v_{cm}/R$
Άρα για κάθε ένα ισχύει:
$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$
$0 + m.\ g.\ h = (1/2).\ m.\ v_{cm}^2 + (1/2).\ (f.\ m.\ R^2).(v_{cm}/R)^2 \Rightarrow$

όπου: $f.m.R^2 = I$ η ροπή αδράνειας του σώματος
οπότε:
$m.\ g.\ h = [(1/2).\ m.\ v_{cm}^2\ ].(\ 1+ f\ ) \Rightarrow$

$v_{cm} = [(2.g.h)/\ (\ 1 + f\ )]^{1/2}$

Η ροπή αδρανείας I που αντιστοιχεί στον κοινό κύλινδρο είναι πολύ μικρότερη αυτής του συμπαγούς, δηλαδή: $f_{κοίλου} < f_{συμπαγούς}$
Άρα $v_{cm(κοίλου)} > v_{cm(συμπαγούς)}$

1β. Από την σχέση που δίνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας που βρίκαμε στο πρώτο μέρος, φαίνεται πως αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας και της μάζας των κυκίνδρων. Περιμένουμε λοιπόν να φθάσουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ταυτοχρόνως – αν έχουν αφεθεί από την ίδια γραμμή αφετηρίας.

2. *Σε μια σβούρα σαν αυτή του σχήματος (συμμετρική εκ περιστροφής) υπάρχει η δυνατότητα, με τον κοχλία Κ, να μεταβάλλει κανείς την θέση του κέντρου βάρους της(Κ.Β.) σε σχέση με το σημείο στήριξής της(Σ.Σ.).*

Στο σχήμα (α) το Κ.Β. βρίσκεται πάνω από το Σ.Σ, ενώ στο σχήμα (β) το Κ.Β. βρίσκεται χαμηλώτερα από το Σ.Σ.
Για τις δύο περιπτώσεις που φαίνονται στο σχήμα:

1. *θεωρείστε δεξιόστροφη περιστροφή και σχεδιάστε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας ω.*
2. *Σχεδιάστε το διάνυσμα της ροπής (τ) του βάρους.*
3. *Σχεδιάστε το διάνυσμα της μεταβολής της στροφορμής ΔL.*
4. *Σχεδιάστε το διάνυσμα της συνισταμένης (τελικής) στροφορμής L'.*
5. *Σχεδιάστε το διάνυσμα Ω της γωνιακής ταχύτητας μετάπτωσης.*

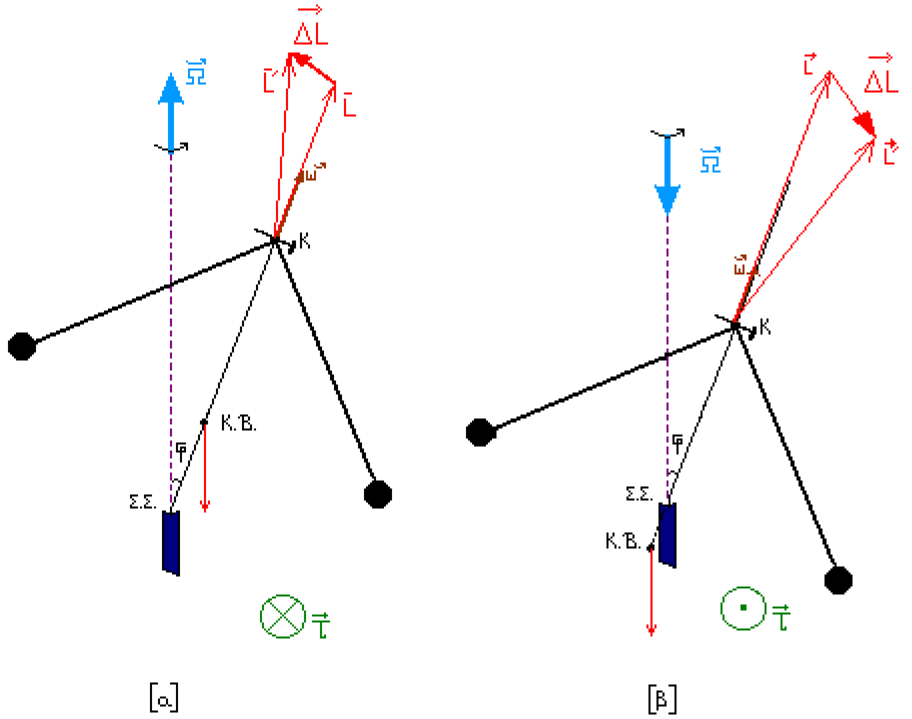
Μονάδες 5

Στην περίπτωση του σχήματος (β), αν διατηρώντας την ίδια την ίδια γωνία φ, και την ίδια φορά περιστροφής της σβούρας (ω), μεγαλώνουμε την απόσταση του Κ.Β. από το σημείο στήριξης, πώς θα επηρεαστεί η Ω;

Μονάδες 2

Ομοίως στην περίπτωση του σχήματος (β), αν διατηρώντας την ίδια γωνία φ, και την ίδια απόσταση του Κ.Β. από το Σ. Σ. μεταβάλλουμε την γωνιακή ταχύτητα ω της σβούρας, τι θα παρατηρήσουμε;

Μονάδες 2



I. Για δεξιόστροφη περιστροφή το διάνυσμα ω, φαίνεται στο σχήμα.

II. Η ροπή $\vec{\tau}$ του βάρους στην περίπτωση (α) είναι ⊗ από τον αναγνώστη προς το επίπεδο του χαρτιού, ενώ στην περίπτωση (β) είναι από το χαρτί προς τον αναγνώστη.

III. Το διάνυσμα $\vec{\Delta L}$ της μεταβολής της στροφορμής είναι συγγραμμικό της ροπής τ.

IV. Η συνισταμένη στροφορμή L´ βρίσκεται από την άθροιση

$\vec{L} + \vec{\Delta L} = \vec{L}´$.

V. Το προηγούμενο άνυσμα $\vec{L}´$ χαρακτηρίζει τη φορά διαγραφής της μεταπτωτικής κινήσεως.

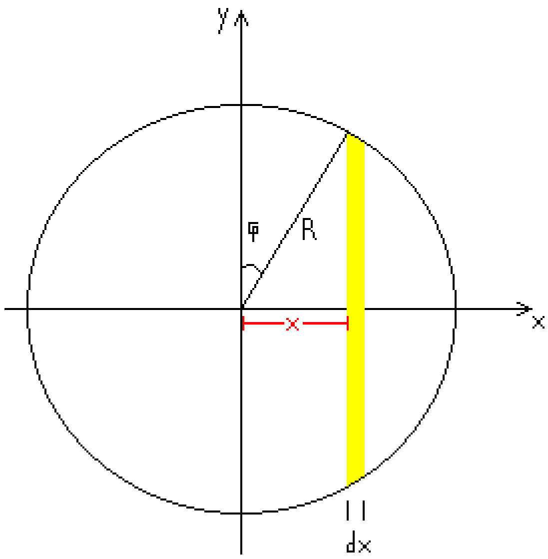
Έτσι, για τις δύο περιπτώσεις το διάνυσμα $\vec{\Omega}$ σημειώνεται στο σχήμα.

-Στην περίπτωση του σχήματος (β), αν ο κοχλίας στήριξης Κ πλησιάσει προς το Σ.Σ, το κέντρο βάρους του συστήματος (β) θα βρεθεί πιο μακρυά από το σημείο στήριξης. Η ροπή του βάρους θα είναι τώρα μεγαλύτερη με αποτέλεσμα (Εξίσωση 4.238 στη σελίδα 284 του Β' τόμου της Κλ. Μηχανικής) η Ω να είναι μεγαλύτερη.

-Αν, στην περίπτωση (β), όλα μείνουν όπως πριν και αλλάξουμε τη φορά περιστροφής της σβούρας (δηλ. το ω) τότε θα αλλάξει και η φορά διαγραφής της μεταπτωτικής κινήσεως (δηλ. το Ω).

3. *Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας ενός λεπτού και ομογενούς δίσκου, μάζας m και ακτίνας r, ως προς άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό του.*

Μονάδες 4



dm:το γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος

σ: η επιφανειακή πυκνότητα $\sigma=dm/dS \rightarrow dm=\sigma \,.\, dS$

dS: Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος

$dS=2y.dx=2R\cos\varphi.dx$
αλλά $x=R.\sin\varphi \rightarrow dx=R\cos\varphi d\varphi$
οπότε τελικά $dS=2R^2\cos^2\varphi d\varphi$

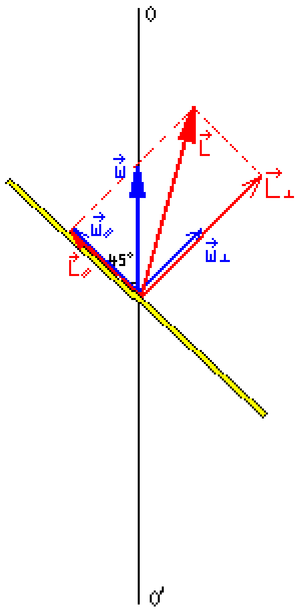
$I=\int dm.x^2=$

$=\int \sigma 2R^2\cos^2\varphi(R\sin\varphi)^2 d\varphi=$	(βήμα 1)	Τα ολοκληρώματα των
$=2\sigma R^4\int \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi=$	(βήμα 2)	βημάτων 1, 2, 3, 4 είναι
$=2\sigma R^4\,(1/4)\int \sin^2 2\varphi d\varphi=$	(βήμα 3)	ορισμένα:από $-\pi/2$ ως
$=2\sigma R^4\,(1/4).(1/2)\int(1-\cos 4\varphi)d\varphi=\ldots\ldots$	(βήμα 4)	$\pi/2$.
$=(1/4)\,.mR^2 = I_{//}$		

3β. *Ο δίσκος Δ, που έχει ομοιόμορφη κατανομή μάζας m, είναι λεπτός, πακτωμένος σε στερεό άξονα ΟΟ' και περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από αυτόν. Να σχεδιάσετε τα*

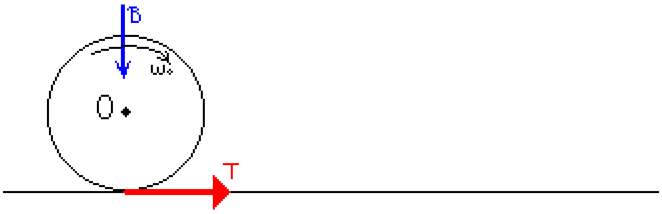
διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας ω και της στροφορμής L. Να σχολιάσετε τη σχετική θέση των διανυσμάτων αυτών και να την δικαιολογήσετε.
[<u>Υπόδειξη</u>: χρειάζετε να αναλύσετε το άνυσμα ω και να λάβετε υπόψη σας την ροπή αδρανείας του δίσκου αφ΄ενός μεν ως προς άξονα κάθετο που περνάει από το κέντρο του, αφ' ετέρου δε ως προς άξονα μία διάμετρό του].

Μονάδες 6



Αναλύουμε το άνυσμα ω σε δύο συνιστώσες. Μία κάθετη στον δίσκο ω^, και μία παράλληλη $\omega_{//}$ σ' αυτόν.
Πολλαπλασιάζοντας τις συνιστώσες αυτές επί τις τιμές των ροπών αδρανείας για τους αντίστοιχους άξονες, προκύπτουν οι συνιστώσες L^ και $L_{//}$ της στροφορμής L.
Επειδή δε, η I^ είναι μεγαλύτερη (διπλάσια) της $I_{//}$, το άνυσμα L της στροφορμής δεν συμπίπτει με το άνυσμα της γωνιακής ταχύτητας ω.

4. *Ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας r που περιστρέφεται γύρω από τον γεωμετρικό του άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_0 αφήνεται απότομα σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς να προωθηθεί και κινείται κατά την οριζόντια διεύθυνση (μόλις ο κύλινδρς έλθει σε επαφή με το δάπεδο, το κέντρο μάζας του O έχει μεταφορική ταχύτητα μηδέν).*
Ποια είναι η τελική ταχύτητα που αποκτάει το κέντρο βάρους O, αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του δαπέδου είναι n;
[Η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς το O είναι $[mr^2/2]$.
Στο σχήμα φαίνεται τομή του κυλίνδρου με το κατακόρυφο επίπεδο].



Μονάδες 6

$\Sigma F= m.\alpha \rightarrow T= m.\alpha \rightarrow n.m.g= m.\alpha \rightarrow \alpha=n.g$ (1)

$\Sigma T= I.a \rightarrow -T.r=I.\ a \rightarrow -n.m.g.r=(1/2)m.r^2.\ a \rightarrow a= -(2n.g)/r$ (2)

(όπου: a η γωνιακή επιτάχυνση και α η επιτάχυνση της μεταφορικής κινήσεως)

Όταν ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει:

$V=\omega.r$ (3)

Αλλά $V=\alpha.t$ και $\omega=\omega_0-a.t$

Αντικαθιστώντας:

$$\alpha.t=[\omega_0-(2n.g/r)t]r \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} n.g.t=\omega_0.r - 2n.g.t \Rightarrow$$

$$3n.g.t=\omega_0.r \Rightarrow t=\omega_0.r/3n.g$$

Η τελική ταχύτητα: $V= \alpha.t \rightarrow$

$$V= n.g.(\omega_0.r/3n.g) \rightarrow V=\omega_0.r/3$$

5. *Σώμα περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση που δίνεται από την σχέση:*
$\alpha = 4\lambda t - 3\mu t^2$, όπου λ, μ, σταθερές και t ο χρόνος.
Αν η αρχική γωνιακή ταχύτητα ήταν ω_0, γράψτε τις σχέσεις που δίνουν τη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας ω και της γωνίας φ συναρτήσει του χρόνου.

Μονάδες 3

$a= 4\lambda t - 3\mu t^2 \Rightarrow$

$d\omega/dt= 4\lambda t - 3\mu t^2$

$\omega=\int d\omega dt=\int(4\lambda t - 3\mu t^2)dt=$

$=\int(4\lambda t)dt - \int(3\mu t^2)dt=$

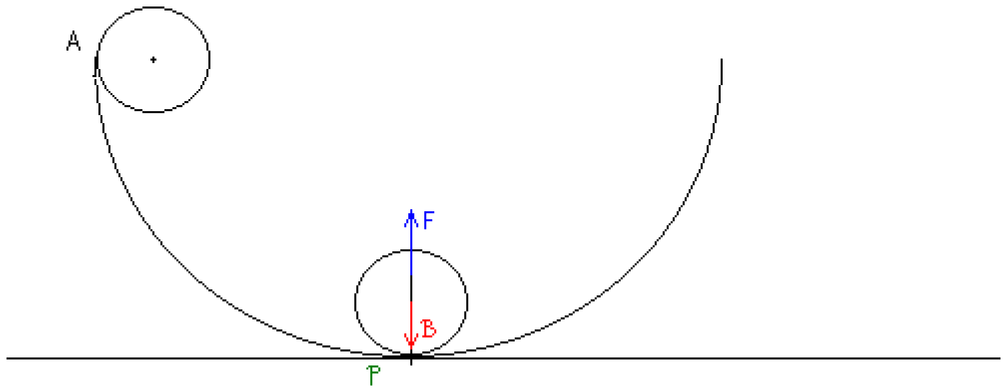
$=[4\lambda\,(t^2/2)] - [3\mu\,(t^3/3)] + c =$
$=2\lambda t^2 - \mu t^3 + c$

επειδή για $t=0$ $\omega=\omega_0$,

$\underline{\omega = \omega_0 + 2\lambda t^2 - \mu t^3}$

$\varphi = \int d\varphi = \int(\omega_0 + 2\lambda t^2 - \mu t^3)dt$
$\varphi = \omega_0 t + (2\lambda t^3/3) - \mu\,(t^4/4) + \varphi_0$

6. *Σφαίρα που έχει ακτίνα r και μάζα m, βρίσκεται στη θέση A και αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του τοιχώματος του ημισφαιρίου που έχει ακτίνα R. Να υπολογιστεί η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται από τη σφαίρα στο τοίχωμα του ημισφαιρίου στο κατώτατο σημείο P.*
Δίνεται η ροπή αδρανείας της σφαίρας ως προς άξονα μια διάμετρό της: $I = (2/5)\,m\,r^2$.



Μονάδες 6

$mg\,(R - r) = (1/2)I\omega^2 + (1/2)mv^2 \Rightarrow$
$mg\,(R - r) = (1/2)(2/5)mr^2.(v^2/r^2) + (1/2)\,mv^2 \Rightarrow$
$mg\,(R - r) = (7/10)\,mv^2$ (1)

Στο κατώτατο σημείο της τροχιάς η συνισταμένη των δυνάμεων, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας είναι κεντρομόλος:

$F - B = (mv^2)/(R - r) \Rightarrow$

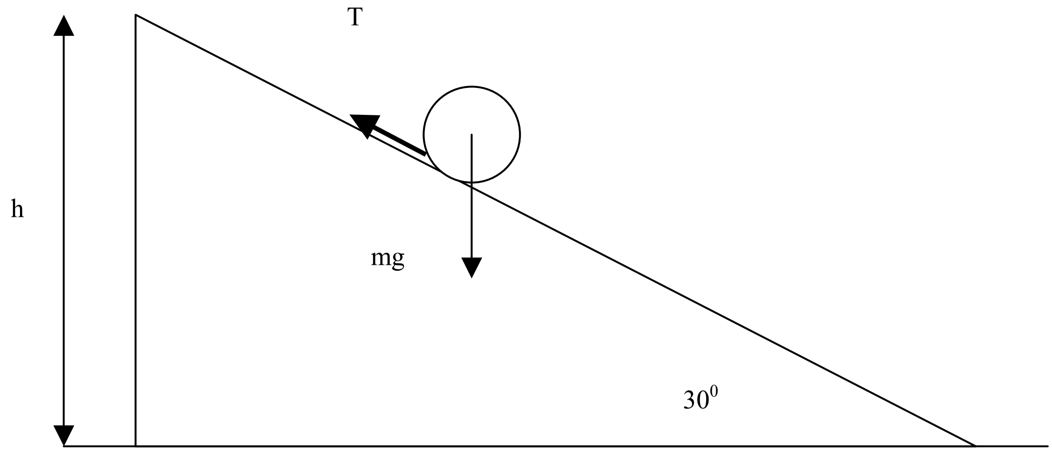
$F = mg + (mv^2)/(R - r) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$F = mg + (10/7)\,mg \Rightarrow$

$F = (17/7)\,mg$

7. *Το κέντρο σφαίρας που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο έδαφος, έχει ταχύτητα 5 m/s. Η σφαίρα με αυτήν τη ταχύτητα αρχίζει να ανεβαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 30^0. Να υπολογιστεί σε ποιο ύψος πάνω από το οριζόντιο επίπεδο θα φτάσει. Πόσος χρόνος απαιτείται για να επανέλθει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου; Δίνεται η ροπή αδρανείας της σφαίρας ως προς άξονα μια διάμετρό της: [(2/5)mr^2].*

Μονάδες 6



$(1/2)\ m\ v^2 + (1/2)\ I\ \omega^2 = mgh$ ή

$(1/2)\ m\ v^2 + (1/2)\ (2/5)\ mR^2\ (v^2/R^2) = mgh$ ï

$h = 1{,}75$ m

Ο χρόνος καθόδου: $t_k = (2s/a)^{1/2} = (2h/a\ \sin 30)^{1/2}$ (1)

Όπου s ηδιαδρομή πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Η επιτάχυνση α της μεταφορικής κινήσεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$B\ \sin 30 - T = m\ a$ (2)

Αλλά: $T\ R = (2/5)\ mR^2\ a$ ï

$T\ R = (2/5)\ mR^2\ (a/R)$ ï $T = (2/5)\ m\ a$

Οπότε η (2) δίνει:

$m\ g\ \sin 30 - (2/5)\ m\ a = m\ a$ ï $a = (5/7)\ g\ \sin 30$ ï $a = (25/7)\ m\ s^{-2}$

Η (1) τελικά, με αντικατάσταση, δίνει:

$t_k = 1{,}4$ sec

Η δύναμη T είναι μια στατική δύναμη τριβής. Η ύπαρξή της είναι αναγκαία για να αποφευχθεί η ολίσθηση και για να προσδώσει στην σφαίρα γωνιακή επιτάχυνση a.

8. *Δίδεται ράβδος μήκους 2l=10m. Το μισό της τμήμα είναι μεταλλικό και έχει μάζα m'=4kg και το άλλο μισό είναι από ξύλο και έχει μάζα m=2kg. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το μέσο της (από το σημείο που ενώνονται τα δύο τμήματά της). Αρχικά η ράβδος συγκρατείται σε οριζόντια θέση και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί. Να υπολογίσετε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνάει από το μέσο της. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή της εκκίνησης και όταν η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Ποια η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν είναι σε κατακόρυφη θέση;*

Ποια η ταχύτητα των άκρων της; Ποια η στροφορμή της ράβδου;

<u>Δίνονται:</u> $g=10\ m/s^2$, και η ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στην ράβδο: $(1/12)ml^2$.

Μονάδες 10

8α.
$I_1 = (1/12)\ ml^2 + m\ (l/2)^2 = (1/12)\ ml^2 + m\ (l^2/2^2) \rightarrow$
$I_1 = (1/3)\ ml^2$

$I_2 = (1/12)\ 2m\ l^2 + 2m\ (l/2)^2 \rightarrow$
$I_2 = (2/3)\ ml^2$

$I = I_1 + I_2 = (1/3)\ ml^2 + (2/3)\ ml^2$

Άρα: $I = ml^2$

8β.
Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (τη στιγμή της εκκίνησης):
$\Sigma\tau = Ia \rightarrow 2mg\ (l/2) - mg\ (l/2) = Ia \rightarrow$
$mg\ (l/2) = ml^2 a \rightarrow a = g/2l \rightarrow$
$a = 2\ rad/s^2$.

8γ. Τη στιγμή που η ράβδος είναι στην κατακόρυφη, οι διευθύνσεις των δυνάμεων w_1 και w_2 διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, άρα:

$\Sigma\tau = Ia \rightarrow 0 = Ia \rightarrow a = 0$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνάει από το κέντρο της μάζας του μεταλλικού τμήματος όταν η ράβδος είναι σε κατακόρυφη θέση, έχουμε:

$mg\ (l/2) + 2mg\ (l/2) = (1/2)I\omega^2 + mgl \rightarrow$
$\omega = (g/l)^{1/2} = 2^{1/2}\ rad/sec$.

Η γραμμική ταχύτητα των άκρων της: $V=\omega l \rightarrow V = 5\times 2^{1/2}\ m/s$.

Η στροφορμή της ράβδου: $L = I\omega = ml^2\omega = 50\times 2^{1/2}\ kg.m^2/s$.

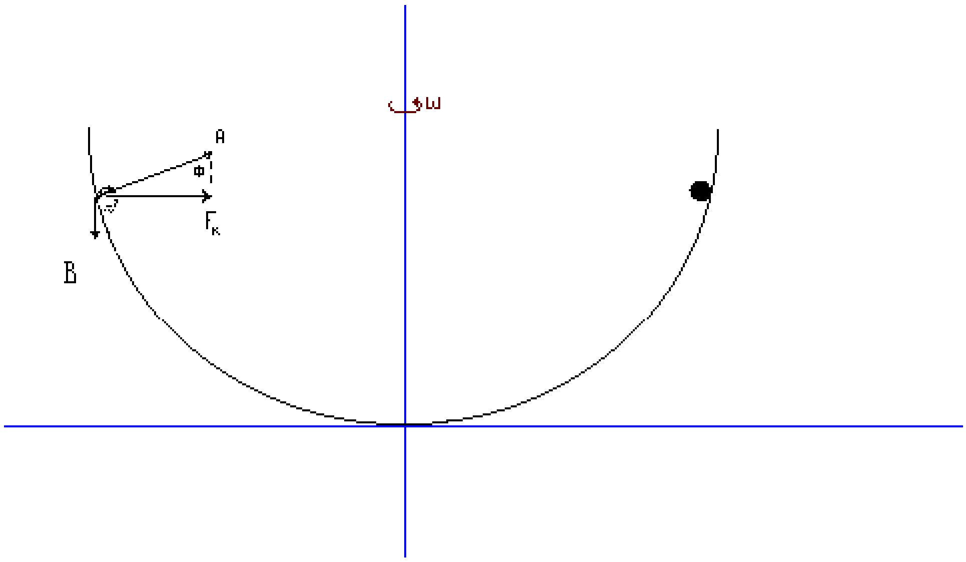
9. *Από τον θεμελιώδη νόμο για την περιστροφική κίνηση φαίνεται πως μια ροπή(τ) είναι ανάλογη της γωνιακής επιτάχυνσης(α) που προκαλεί στο σώμα:*
(τ = I α), όπου I η ροπή αδρανείας του σώματος. Εντοπίστε την περίπτωση που μια ροπή είναι ανάλογη μιας γωνιακής ταχύτητας!
Κάνετε έλεγχο των μονάδων και στις δύο σχέσεις.

Μονάδες 4

- Η περίπτωση αναφέρεται σε ένα σώμα που κάνει μεταπτωτική κίνηση.
Τότε, όπως φαίνεται από την σχέση (Εξίσωση 4.238 στη σελίδα 284 του Β' τόμου της Κλ. Μηχανικής) του βιβλίου, η ροπή είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας της μεταπτωτικής κινήσεως.

10. *Σε ένα στρεφόμενο ημικύκλιο με αυλάκωση, υπάρχουν δύο σφαίρες: η μία είναι μεταλλική και ή άλλη ξύλινη, πολύ ελαφρύτερη από την πρώτη. Το ημικύκλιο περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ΟΟ', κάθετο στην εφαπτομένη που περνάει από το κατώτερο σημείο του, με γωνιακή ταχύτητα ω. Δώστε ερμηνεία στο γεγονός πως οι σφαίρες ανεβαίνουν στο ίδιο* *ύψος, όπως αυτό μπορεί να διαπιστωθεί με τη βοήθεια στροβοσκοπικού φωτισμού ή με το μάτι.*

Κάνετε τους σχετικούς μαθηματικούς υπολογισμούς.
[Στροβοσκοπικός φωτισμός: διακοπή και αποκατάσταση του φωτός με συχνότητα που ρυθμίζεται. Όταν η συχνότητα του φωτισμού συμπέσει με την συχνότητα περιστροφής, το σύστημα φαίνεται ακίνητο και μπορεί κανείς να παρατηρήσει κάθε λεπτομέρεια στα περιστρεφόμενα –αλλά φαινομενικά ακίνητα – μέρη]. ***Μονάδες 6***



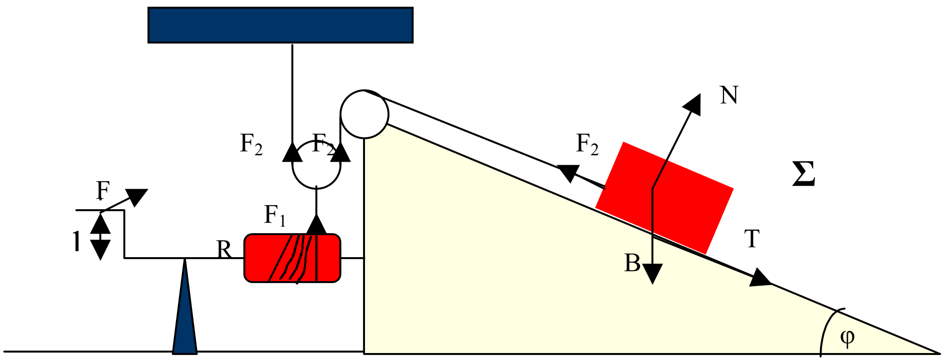
-

Η γωνία φ καθορίζεται από τη σχέση:

tan φ =(F_κ/B) ï tan φ =($m\omega^2 r$)/(mg) (1)
αλλά: r = R sinφ (2)
[R είναι η ακτίνα του ημικυκλίου και r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου].
Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους μαθηματικούς περιορισμούς, καταλήγουμε:
cos φ = $g/(\omega^2 R)$
που δείχνει αφ' ενός μεν ότι αυξανομένης της γωνιακής ταχύτητας αυξάνει και η απομάκρυνση των σφαιριδίων από τη θέση ισορροπίας τους, αφ' ετέρου δε ότι η απομάκρυνση αυτή δεν εξαρτάται από τη μάζα των σφαιριδίων.

11. *Δίδεται η διάταξη του σχήματος . Αν το βάρος του σώματος **Σ** είναι **7000 N** και ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι **μ=0.2**, να βρεθεί η δύναμη **F** που πρέπει να ασκήσουμε στη λαβή του βαρούλκο ώστε να ανεβάσουμε το σώμα στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα. Δίδονται η ακτίνα του βαρούλκου **R=20 cm** και το μήκος **l = 40 cm**. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με την ωφέλεια της χρήσης μιας τέτοιας διάταξης. Δίνεται φ=30^o*
Στις τροχαλίες δεν υπάρχουν τριβές..

Μονάδες 6



Για το βαρούλκο, εφόσον περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα, θα ισχύει ότι η ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι μηδέν:
$\sum \tau_i = 0$ όπου $\tau_i = r_i x F_i$ Άρα: Fl = F_1R (1)
Στη τροχαλία εφόσον δεν υπάρχουν τριβές έχουμε: F_1=2F_2 (2)
Στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει: F_2= Bsinφ +μBcosφ (3)

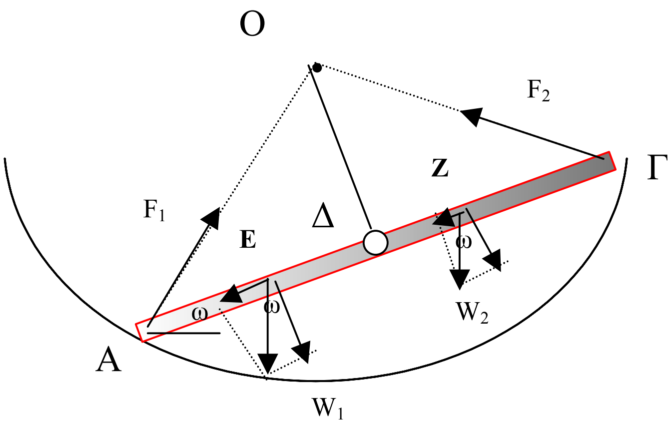
Από τις σχέσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$F = \frac{2(\mathrm{B}\sin\varphi + \mu B\cos\varphi)R}{l} \Rightarrow F = \frac{2BR(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{l} = 4712.4 \text{ N}$$

Για την ανύψωση του σώματος με σταθερή ταχύτητα απαιτείται μία δύναμη αντίθετη του βάρους του δηλ. 7000 N. Με αυτή τη διάταξη η δύναμη που απαιτείται είναι 4712.4 N, δηλ. μία δύναμη κατά 32.7% μικρότερη.

12. *Οι ράβδοι ΑΔ και ΔΓ έχουν μήκη **l_1= l_2 = 40 cm** και είναι ενωμένες στο άκρο τους Δ, όπως φαίνεται στο σχήμα.. Αν κάθε cm μήκους της ράβδου ΑΔ έχει **w_1 = 0.4 N** και κάθε cm μήκους της ράβδου ΔΓ έχει βάρος **w_2 = 0.2 N** να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση, όταν ισορροπεί μέσα σε κοίλο κύλινδρο, που ο άξονας του είναι οριζόντιος, όπως φαίνεται στο σχήμα . Η γωνία **ΑΟΓ = 2φ = 120^o**.*

Μονάδες 8



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη στις ράβδους είναι οι αντιδράσεις επαφής F_1, F_2 και τα βάρη W_1 και W_2, τα οποία αναλύουμε σε διευθύνσεις παράλληλες προς την ράβδο και κάθετες προς αυτή. Θεωρούμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Θα ισχύει:
$\sum \tau_i = 0$ όπου $\tau_i = r_i x F_i$

Άρα:
$(W_1 \sin\omega + W_2 \sin\omega)(O\Delta) + W_2 \cos\omega (\Delta Z) - W_1 \cos\omega (E\Delta) = 0$
Αλλά $W_1 = w_1 l$, $W_2 = w_2 l$, $(O\Delta) = l\cot 60$ $(\Delta Z) = (E\Delta) = l/2$ και $l_1 = l_2 = l$
Οπότε έχουμε:
$(w_1 l \sin\omega + w_2 l \sin\omega) l\cot 60 + w_2 l\cos\omega\, l/2 - l w_1 \cos\omega\, l/2 = 0$
$(w_1 + w_2) l^2 \sin\omega \cot 60 + (w_2 - w_1) l^2 \cos\omega = 0$

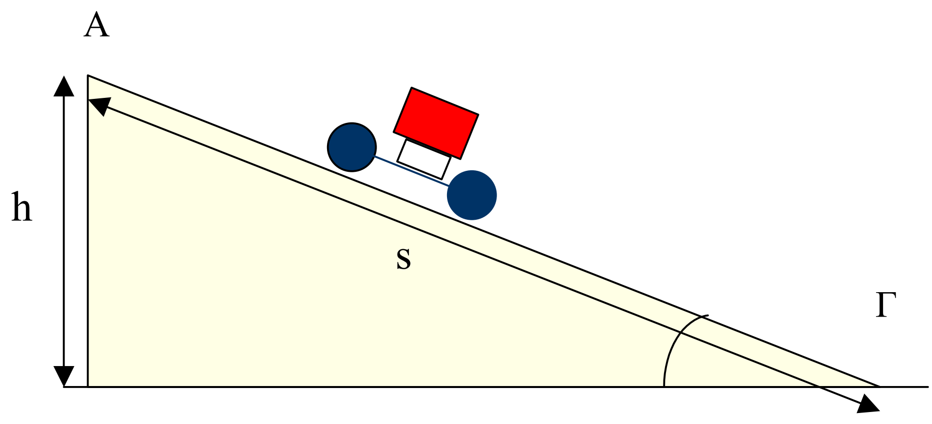
$$\tan\omega = \frac{w_1 - w_2}{(w_1 + w_2)\cot 60} \Rightarrow \tan\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = 30^0$$

13. *Βαγόνι, μάζας Μ, έχει τέσσερις τροχούς. Ο κάθε τροχός έχει μάζα m, ακτίνα r και ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής του* ***I =1/2mr²***. *Το βαγόνι βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας* ***φ*** *και αφήνεται ελεύθερο από τη ακινησία, να κυλήσει πάνω στο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές**

1) *Να βρεθεί η έκφραση της επιτάχυνσης την οποία αποκτά το κινούμενο σύστημα*
2) *Η τιμή του λόγου* ***M/m,*** *για να διαφέρει η επιτάχυνση αυτή κατά 1/10 από την επιτάχυνση την οποία θα είχε το σύστημα , αν ολίσθαινε χωρίς να κυλήσει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.*

**χωρίς τριβές αναφέρεται ως προς τον άξονα των τροχών και τον αέρα όχι μεταξύ τροχών και επιπέδου, γιατί τότε θα είχαμε μόνο ολίσθηση.*

Μονάδες 7



I) **I)** Θεωρούμε ότι όταν αφήνουμε το βαγόνι από το Α, αυτό διανύει διάστημα S και κατέβαινε μέχρι το Γ. Τότε το κέντρο βάρους του θα έχει κατέβει κατά ύψος
II) $h = s \sin\varphi$ (1)
και θα έχει αποκτήσει ταχύτητα v. Επειδή δεν έχουμε τριβές στους άξονες, θα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Α και Γ. Αν θεωρήσουμε $E_{δυν} = 0$ στο Γ, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi.A} = E_{\mu\eta\chi.\Gamma} \Rightarrow E_{\delta\upsilon\nu.A} = E_{\kappa\iota\nu.\mu\varepsilon\tau.\Gamma} + E_{\kappa\iota\nu.\sigma\tau\rho.\Gamma}$$

Αλλά η δυναμική ενέργεια στο Α είναι:

$E_{\delta\upsilon\nu.A} = (M + 4m)gh$ (2)

Επίσης η κινητική ενέργεια που οφείλεται στη μεταφορική κίνηση στο Γ¨ είναι:

$E_{\kappa\iota\nu.\mu\varepsilon\tau.} = \frac{1}{2}(M + 4m)v^2$ (3)

και αυτή που οφείλεται στη στροφική κίνηση των τεσσάρων τροχών:

$$E_{\kappa\iota\nu.\sigma\tau\rho.} = 4\frac{1}{2}I\omega^2$$

Όπου $I = \frac{1}{2}mr^2$ και $\omega = \frac{v}{r}$

Επειδή η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας των τροχών έχει μέτρο ίσο με την ταχύτητα του κέντρου των τροχών, η οποία είναι ίση με v, έχουμε:

$E_{\kappa\iota\nu.\sigma\tau\rho.} = 4\frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu.\sigma\tau\rho} = mv^2$ (4)

Άρα έχουμε:

$$(M + 4m)gs\sin\varphi = \frac{1}{2}(M + 4m)v^2 + mv^2$$

Αλλά η ταχύτητα είναι:

$$v = \sqrt{2as}$$

Άρα:

$$a = \frac{(M + 4m)g\sin\varphi}{M + 6m}$$

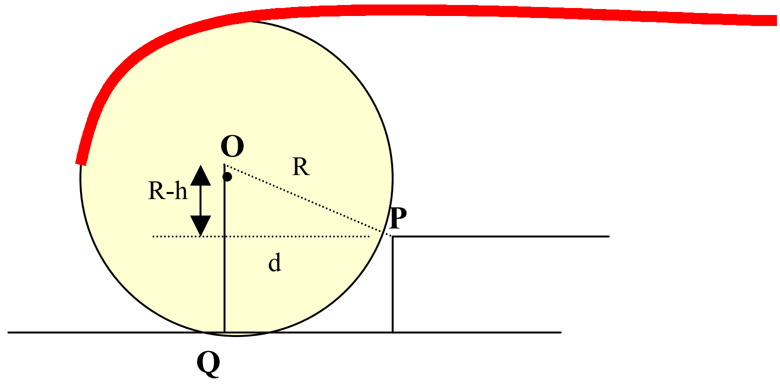
II) Αν συνέβαινε ολίσθηση χωρίς τριβή θα ήταν $\alpha_{o\lambda}$=gsinφ

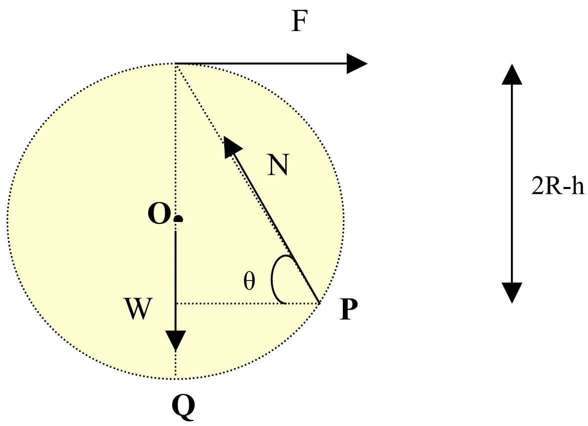
Άρα για να είναι α΄=9/10$\alpha_{o\lambda}$

πρέπει:
$$\frac{9}{10}g\sin\varphi = \frac{M + 4m}{M + 6m}g\sin\varphi \Rightarrow 9M + 54m = 10M + 40m \Rightarrow M = 14m \Rightarrow$$
$$\frac{M}{m} = 14$$

14. *Ένας κύλινδρος βάρους* ***W*** *και ακτίνας* ***R*** *πρέπει να ανέβει σε σκαλοπάτι ύψους* ***h****. Τυλίγουμε το σχοινί γύρω από τον κύλινδρο και το τραβάμε κατά οριζόντια διεύθυνση. Να υποτεθεί ότι ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει στο σκαλοπάτι , καθώς ανεβαίνει υπό την επίδραση της ελαχίστης αναγκαίας δύναμης* ***F****. Υπολογίσετε την αντίδραση στο σημείο* ***P*** *καθώς και το ύψος* ***h.***
Δίδεται:
W = 500 N, R= 0,8 m F= 385 N

Μονάδες 6





Μόλις ο κύλινδρος αρχίσει να σηκώνεται, η δύναμη αντίδρασης στο σημείο Q γίνεται μηδενική. Έτσι λοιπόν, τη στιγμή αυτή μόνο τρεις εξωτερικές δυνάμεις δρουν πάνω στον κύλινδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίζουμε τις ροπές ως προς το σημείο P. Από το τρίγωνο OPQ βρίσκουμε τον μοχλοβραχίονα του βάρους ως προς το P .

$$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

Ο μοχλοβραχίονας της F ως προς το P είναι 2R-h Επομένως, η συνολική ροπή που δρά στον κύλινδρο ως προς το P είναι:

$$Wd - F(2R-h) = 0$$

$$W\sqrt{2Rh - h^2} - F(2R-h) = 0$$

Τελικά καταλήγουμε:

$$(F^2 + W^2)h^2 - 2R(2F^2 + W^2)h + 4F^2R^2 = 0$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, προκύπτουν δύο ρίζες ρ_1=0.6, ρ_2=1.6
Η πρώτη **h=0.6 m** γίνεται αποδεκτή.
Η δύναμη N υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε τις συνθήκες ισορροπίας.

$$\sum F_x = F - N\cos\theta = 0$$

$$\sum F_\psi = \sin\theta - W = 0$$

Διαιρούμε και έχουμε

$$\tan\theta = \frac{W}{F}$$

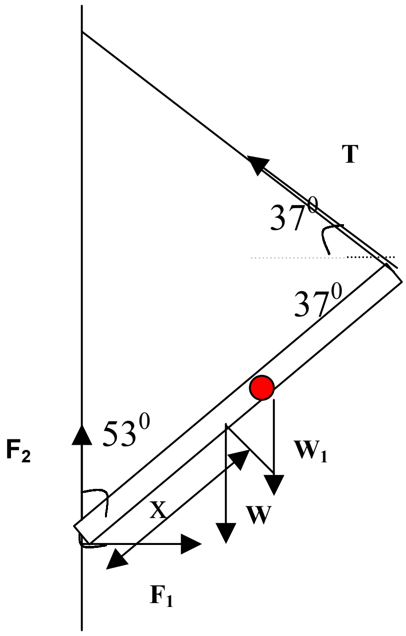
Λύνουμε ως προς N και βρίσκουμε

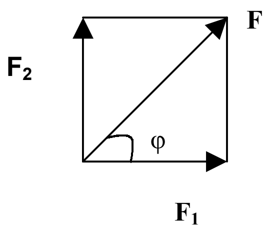
$$N = \sqrt{W^2 + F^2}$$

N=631 N

15. Μία ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους **5 m** και βάρους **50 N** στηρίζεται στο Α και κρατείται σε ισορροπία με ένα σχοινί όπως φαίνεται στο σχήμα . Ένα βάρος **100N** κρέμεται από τη ράβδο σε απόσταση x από το Α. Αν η τάση θραύσης του σχοινιού είναι **50 N,** βρείτε τη μέγιστη τιμή του x.

Μονάδες 6





Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις :α) το βάρος της ράβδου που εφαρμόζεται στο κέντρο της β) το βάρος του αναρτημένου σώματος γ) η τάση του νήματος δ) και η δύναμη από την αντίδραση της άρθρωσης που αναλύεται σε μία οριζόντια και μία κάθετη συνιστώσα.
Εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας

$\sum \tau_i = 0$ όπου $\tau_i = r_i x F_i$

ως προς το σημείο που έχουμε την άρθρωση, ώστε να αποφύγουμε τη δύναμη από την αντίδραση στην άρθρωση. Άρα έχουμε:

$$W\frac{l}{2}\sin 53 + W_1 x \sin 53 - T\sin 37 \cdot l \sin 53 - T\cos 37 \cdot l\cos 53 = 0$$

Αλλά sin37=cos53=0.6 και sin53=cos37=0.8
Επομένως

$$W\frac{l}{2}0.8 + W_1 x 0.8 - Tl 0.8 \cdot 0.6 - T 0.6 \cdot 0.8 = 0$$

χ=1.75
Μπορούμε επίσης εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας

$$\sum F_{\varepsilon\xi} = 0$$

να βρούμε και την αντίδραση της άρθρωσης:

$$F_2 + T\sin 37 = W + W_1 \Rightarrow F_2 = 120N$$
$$F_1 = T\cos 37 \Rightarrow F_1 = 40N$$

$$\tan\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{120}{40} = 3 \Rightarrow \varphi = 72^0$$