$4^η$ Εργασία
Παράδοση 12/6/2003

1

Δυο σωματίδια με ίσες μάζες συγκρούονται ελαστικά (η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων διατηρείται). Δείξτε ότι αν αρχικά το ένα είχε ταχύτητα μηδέν, τότε μετά την κρούση αν και τα δύο σώματα κινούνται, οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων σχηματίζουν γωνία 90^o .

(Βαθμοί 4)

2

Ένα σώμα μάζας $m = 0,1\,kg$ κρεμιέται από την άκρη ενός νήματος μήκους $0,9\,m$. Το σώμα αποκτά οριζόντια ταχύτητα $v_0 = 6\,m/s$ και διαγράφει τροχιά πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογιστεί η τάση στο νήμα σε συνάρτηση με τη γωνία πού σχηματίζει με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία το σώμα εγκαταλείπει την κυκλική του τροχιά;

(Βαθμοί 4)

3

Να εξεταστεί το ποσό της ενέργειας πού καταναλώνει μία ηλεκτροκίνητη σκάλα πού έχει ταχύτητα v όταν (α) ο άνθρωπος πού ανεβαίνει στέκεται ακίνητος πάνω της ή (β) βαδίζει πάνω σ' αυτή με σχετική ταχύτητα V'. Ποια είναι η ισχύς και στις δύο περιπτώσεις;

(Βαθμοί 4)

4

Σωματίδιο μάζας m_1 και ορμής p_1 συγκρούεται ελαστικά με άλλο σωματίδιο μάζας m_2 και ορμής p_2, ενώ αυτά κινούνται με αντίθετη κατεύθυνση. Αν το πρώτο σωματίδιο μετά την σύγκρουση σχηματίζει γωνία θ_1 με την αρχική του κατεύθυνση, γράψτε τις εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και ορμής και δείξετε ότι το μέτρο της ορμής του πρώτου σωματιδίου μετά τη κρούση είναι μια από τις ρίζες του τριωνύμου:

$$x^2(1+\gamma) - 2x(p_1 - p_2)\cos\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - (\gamma p_1^2 + p_2^2) = 0$$

όπου $\gamma = m_2/m_1$.

(Βαθμοί 5)

5

Αφήνουμε μία σφαίρα να πέσει από ύψος $10m$. Αν το 80% της μηχανικής ενέργειας σε κάθε αναπήδηση της σφαίρας στο έδαφος μετατρέπεται σε θερμότητα, να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα ηρεμήσει η σφαίρα.

(Δίνεται ότι:

$$\sum_{n=1}^{n} x^n = \frac{x}{1-x}$$

για $|x| < 1$)

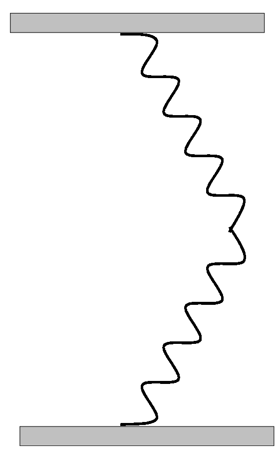
(Βαθμοί 5)

6

Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του συστήματος των δύο ελατηρίων του σχήματος 6, όταν η οριζόντια μετατόπιση x είναι μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος ℓ_0 των ελατηρίων. Η σταθερά κάθε ελατηρίου είναι k.

(Ισχύει ότι: Για μικρές τιμές του x μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $(1+x)^n \simeq 1+nx$)

(Βαθμοί 6)



Σχήμα 6:

7

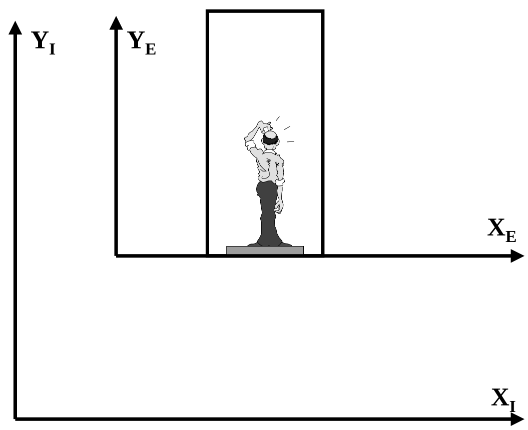
Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $F = kmxv$, όπου v, x είναι το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης του αντίστοιχα σε τυχούσα χρονική στιγμή και k θετική σταθερά. (α) Υπολογίστε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρι να ηρεμήσει ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών.
(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) στην περίπτωση που η ολική αντίσταση είναι της μορφής $F = kmxv^2$.

(Βαθμοί 6)

8

Ένας άνθρωπος με μάζα $70\,kg$ πατάει επάνω σε μια ζυγαριά η οποία βρίσκεται σε ασανσέρ που κινείται κατακόρυφα με κάποια επιτάχυνση. Πόσο βάρος θα δείξει η ζυγαριά αν η επιτάχυνση του ασανσέρ είναι: (α) $0\,m/s^2$, (β) $1,2\,m/s^2$, (γ) $-9,8\,m/s^2$.
Να περιγράψτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο αυτόν για ένα παρατηρητή που βρίσκεται (i) ακίνητος στο έδαφος και (ii) ακίνητος στο ασανσέρ.

(Βαθμοί 6)



Σχήμα 8:

9

Δυο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι:

$$\vec{r}_1 = (t^2 + 3t - 5)\hat{x} + (3t + 7)\hat{y} + (21 - 2t^2)\hat{z}$$

και

$$\vec{r}_2 = (25 - t - t^2)\hat{x} + (5t + 1)\hat{y} + (2t^2 - 5t)\hat{z}$$

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και υπολογίστε πότε θα συμβεί η κρούση.
(β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος;
(γ) Αν η κρούση είναι πλαστική, να βρείτε την ταχύτητά τους μετά την κρούση και την κατοπινή τους θέση συναρτήσει του χρόνου.

(Βαθμοί 9)

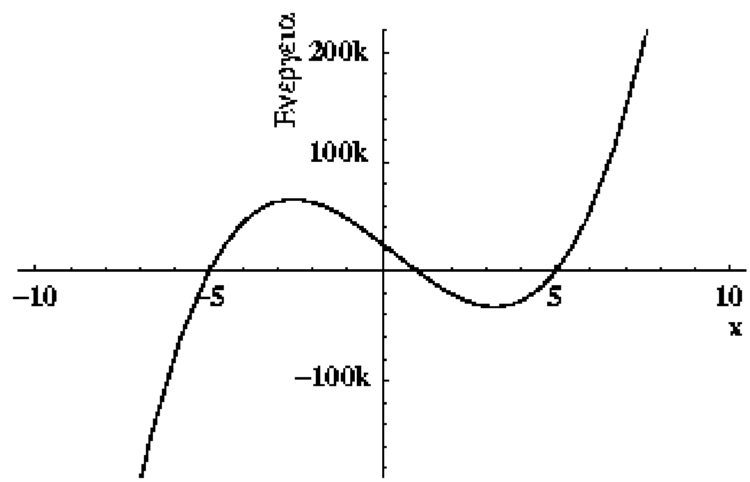
10

) Σώμα κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από την σχέση:

$$U(x) = k(x^3 - x^2 - 25x + 25)$$

όπου k είναι μια θετική σταθερά. Βρείτε τη δύναμη ως συνάρτηση της θέσης. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζοντας το είδος της. Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 2$ με ολική μηχανική ενέργεια $E = 25k$, βρείτε τα όρια της κίνησης του σώματος και περιγράψτε εν συντομία την κίνηση του.

(Βαθμοί 8)



Σχήμα 10:

11

Ένα σώμα μάζας m μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xy, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο $(x = 0,\ y = 0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$, όπου $v_0 > 0$. Πάνω στο σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F} = (\alpha - \beta t)\hat{x} - \beta t\hat{y}$, όπου $\alpha, \beta > 0$ σταθερές.

(α) Διατυπώσατε την εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Υπολογίστε την ταχύτητα, $\vec{v}(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(γ) Υπολογίστε τις συντεταγμένες $x(t),\ y(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(δ) Βρείτε τη σχέση που πρέπει να συνδέει τις σταθερές $\alpha,\ \beta$ και v_0, ώστε να μπορέσει το σώμα να ξαναπεράσει από το σημείο $x = 0,\ y = 0$.

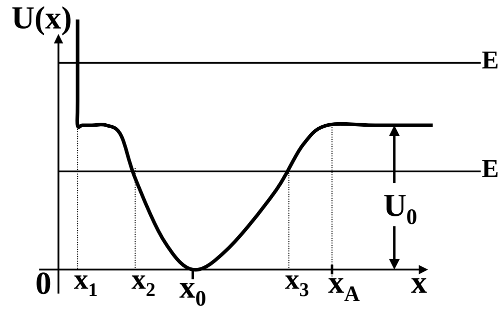
(Βαθμοί 10)

12

(α) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο δυναμικό πεδίο του σχήματος 12. Αρχικά ($t = 0$) βρίσκεται στη θέση x_A με ταχύτητα $-v_A\hat{x}$. Δείξτε ότι μετά πάροδο χρόνου t_π το σωματίδιο θα βρεθεί και πάλι στη θέση x_A με ταχύτητα $v_A\hat{x}$ όπου $v_A > 0$. Δείξτε ότι $t_\pi < 2(x_A - x_E)/v_A$, όπου x_E προσδιορίζεται

από την σχέση $U(x_E) = E$, όπου E είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου. (β) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου όταν η ολική του ενέργεια, E, είναι πολύ μικρή, $0 < E \ll U_0$, είναι αρμονική περιοδική. Ποια είναι η χωρική περιοχή και ποια η περίοδος της κίνησης; (γ) Έστω ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι αρκετά μεγάλη αλλά μικρότερη του U_0, $0 \ll E < U_0$. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σωματιδίου. Δώστε ένα ακριβές κάτω όριο της περιόδου, και ένα πολύ προσεγγιστικό τύπο για το μέγεθος της.

(Βαθμοί 9)



Σχήμα 12:

13

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα εξασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος του $\vec{B} = mg\hat{z}$, η άνωση $\vec{A} = -A\hat{z}$ και μια δύναμη αντίστασης $-\gamma\vec{v}$, όπου γ είναι μία σταθερά και $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ έχει διεύθυνση κατακόρυφη προς τον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτουμε ότι $A < mg$. (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σώματος για $t > 0$. (β) Βρείτε τη θέση του σώματος (δηλ. την απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης) για $t > 0$. (γ) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου για $t \gg 1/\lambda$, όπου $\lambda \equiv \gamma/m$. (δ) Υπολογίστε το έργο της βάρους $\vec{B} = mg\hat{z}$ μέχρι την χρονική στιγμή t, υποθέτοντας ότι $t \gg 1/\lambda$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτήσεων (γ) και (δ) σχετικά με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας.

(Βαθμοί 12)

14

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια είναι:

$$U(x) = D\left[e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)}\right]$$

όπου x_0, D και a είναι θετικές ποσότητες.
(α) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας και τη θέση που συμβαίνει.
(β) Υπολογίστε τις οριακές τιμές της $U(x)$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$, και σχεδιάστε ποιοτικά την $U(x)$.
(γ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας E το σωματίδιο θα παραμένει φραγμένο σε μια περιοχή του χώρου; Σχεδιάστε την αντίστοιχη περιοχή σε μια τυπική περίπτωση.
(δ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο; Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα (σε άπειρη απόσταση) από το θεώρημα της διατήρησης της ενέργειας.
(Βαθμοί 12)

Καλή επιτυχία