

Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 2012

Περιεχόμενα

1	Βαθμωτά Πεδία	7
1.1	Εξίσωση Klein-Gordon	7
1.2	Αντισωματίδια	9
1.3	Βαθμωτό πραγματικό πεδίο: Κβάντωση και ανάπτυγμα Fourier	11
1.4	Χώρος του Fock	14
1.5	Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο: Αντισωματίδια	16
1.6	Διαδότες	18
1.6.1	Πραγματικό βαθμωτό πεδίο	18
1.6.2	Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο	21
2	Εικόνες	23
2.1	Εικόνες στην Κβαντική Μηχανική	23
2.1.1	Εικόνα του Schrödinger	24
2.1.2	Εικόνα του Heisenberg	24
2.1.3	Εικόνα της αλληλεπίδρασης	25
2.2	Ακτινοβολία: παράδειγμα χρήσης της εικόνας αλληλεπίδρασης.	27
2.3	Λύση της εξίσωσης $i\frac{d}{dt}U_I(t) = \hat{H}'_I(t)U_I(t)$: Ανάπτυγμα του Dyson	28
2.3.1	Πίνακας σκέδασης	30
2.3.2	Κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις	31
2.4	Παράδειγμα: Σκέδαση δύο μποζονίων	34
2.5	Θεώρημα του Wick	35
2.6	Διαγράμματα Feynman	42
2.6.1	Γραφική παράσταση των διαγραμμάτων	42
2.6.2	Τιμή των διαγραμμάτων	43
3	Ενεργοί διατομές	45
3.1	Ορισμός και συναλλοίωτη μορφή	45
3.2	Σύστημα εργαστηρίου	50
3.3	Σύστημα κέντρου μάζας	53

3.4	Διασπάσεις σωματιδίων	55
4	Βαθμωτή Ηλεκτροδυναμική	61
4.1	Αναλλοιότητα βαθμίδας	61
4.2	Κανόνες Feynman	65
4.3	H/M σκέδαση δύο (διαφορετικών) βαθμωτών	67
4.4	Συμμετρία διασταύρωσης	69
5	Σπινοριακά πεδία	73
5.1	Εξίσωση του Dirac	73
5.2	Μετασχηματισμοί Lorentz	75
5.3	Λύσεις επιπέδων κυμάτων	79
5.3.1	Σχέση πληρότητας	81
5.4	Ρητές λύσεις της εξίσωσης του Dirac	81
5.5	Προβολικοί τελεστές	83
5.5.1	Προβολή σε θετικές και αρνητικές ενέργειες	83
5.5.2	Προβολή σε θετικές και αρνητικές ελικότητες	84
5.5.3	Άλλες προβολές	85
5.6	Λαγκρανζιανή, Χαμιλτονιανή και ρεύμα του Dirac	85
5.7	Ανάπτυγμα Fourier και κβάντωση	87
5.8	Φερμιονικός διαδότης	90
6	Σπινοριακή Ηλεκτροδυναμική	93
6.1	Αναλλοιότητα βαθμίδας	93
6.2	Διαγράμματα Feynman	94
6.2.1	Κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις	94
6.2.2	Κανόνες	94
6.3	Ενεργοί διατομές	98
6.3.1	Το τέχνασμα του Casimir	99
6.3.2	Υπολογισμός ιχνών γινομένων πινάκων γάμμα	99
6.4	Ενδεικτικοί υπολογισμοί	100
6.4.1	Αντίδραση $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$: πλάτος σκέδασης	100
6.4.2	Αντίδραση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$: πλάτος σκέδασης	101
6.5	Εξειδίκευση στο σύστημα κέντρου μάζας	102
6.5.1	Αντίδραση $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$: ενεργός διατομή	103
6.5.2	Αντίδραση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$: ενεργός διατομή	104

7	Παράρτημα: Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	107
7.1	Κλασική θεωρία	107
7.2	Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	110
7.3	Διαδότης	111
7.4	Ανάπτυγμα Fourier	112
7.5	Παρατηρήσεις σχετικά με τον διαδότη	115
7.6	Κανόνες Feynman για τα φωτόνια	118

Κεφάλαιο 1

Βαθμωτά Πεδία

1.1 Εξίσωση Klein-Gordon

Για να βρει κανείς μια κυματική εξίσωση που να συμβαδίζει με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, πρέπει κατ' αρχάς να εγκαταλείψει τη μη σχετικιστική σχέση διασποράς $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ και να υιοθετήσει τη σχετικιστική εξίσωση $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, που στο φυσικό σύστημα μονάδων μπορεί να γραφτεί με τη μορφή: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Στη συνέχεια αντικαθιστά κανείς το E με τον τελεστή $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ή $i \frac{\partial}{\partial t}$ και το \vec{p} με τον τελεστή $-i\hbar \vec{\nabla}$ ή $-i \vec{\nabla}$. Προκύπτει η εξίσωση Klein-Gordon: $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi$, που μπορεί να γραφτεί ως:

$$\boxed{(\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2) \phi = 0.} \quad (1.1)$$

Προφανώς ισχύει και η μιγαδική συζυγής εξίσωση:

$$(\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2) \phi^* = 0. \quad (1.2)$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την (1.1) με $i\phi^*$ και την (1.2) με $i\phi$ και να αφαιρέσουμε:

$$\begin{aligned} i\phi^* * (\partial_{tt}\phi - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi) - (i\phi) * (\partial_{tt}\phi^* - \vec{\nabla}^2\phi^* + m^2\phi^*) &= 0 \\ \Rightarrow - (i\phi\partial_{tt}\phi^* - i\phi^*\partial_{tt}\phi) + (i\phi\vec{\nabla}^2\phi^* - i\phi^*\vec{\nabla}^2\phi) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t [i(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*)] + \vec{\nabla} \cdot [-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*)] &= 0. \end{aligned}$$

Πρόκειται για μιá εξίσωση συνέχειας, που για να τη δει κανείς καθαρά αρκεί να κάνει τις αναγκαίες ταυτοποιήσεις:

$$\rho \equiv i(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*), \quad \vec{J} \equiv -i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*), \quad (1.3)$$

οπότε η εξίσωση θα πάρει την οικεία μορφή της εξίσωσης συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (1.4)$$

Δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας θα ισούται με ρ και η πυκνότητα ρεύματος πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με \vec{J} . Αυτά μπορούν να γραφτούν και σε μορφή τετραδιανύσματος:

$$\boxed{J^\mu = (\rho, \vec{J}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad \partial_\mu J^\mu = 0}. \quad (1.5)$$

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά χαρακτηριστικά των λύσεων της εξίσωσης (1.1). Οι λύσεις θα έχουν τη μορφή επίπεδων κυμάτων

$$\phi(t, \vec{x}) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \quad (1.6)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Klein-Gordon (1.1) αυτή τη λύση, θα προκύψει η σχέση:

$$[-E^2 - (-\vec{p}^2) + m^2] N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = 0 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (1.7)$$

Δηλαδή, για να είναι πράγματι λύση η λύση των επίπεδων κυμάτων, πρέπει να ισχύει η σχετικιστική σχέση διασποράς, το οποίο είναι θετικό στοιχείο. Ο επόμενος έλεγχος έχει να κάνει με τα μεγέθη ρ και \vec{J} . Αν αντικαταστήσουμε τη λύση (1.6) στις εκφράσεις (1.3) θα προκύψει ότι:

$$\rho = 2|N|^2 E, \quad \vec{J} = 2|N|^2 \vec{p}, \quad (1.8)$$

που μπορεί να γραφτεί και ως

$$J^\mu = 2|N|^2 p^\mu. \quad (1.9)$$

Παρατηρούμε ότι το $\rho \equiv J^0$ μετασχηματίζεται ως η μηδενική συνιστώσα τετραδιανύσματος, δηλαδή $\rho \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αριθμός ρd^3x είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, όπως θα έπρεπε, αφού $d^3x \rightarrow d^3x \sqrt{1-v^2}$.

Η μακράν πιο σημαντική παρατήρηση είναι ότι η τελευταία εξίσωση στην (1.7) έχει ως λύσεις τις $E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, δηλαδή εκτός από τις ευπρόσδεκτες θετικές ενέργειες εμφανίζονται και οι προβληματικές **αρνητικές ενέργειες**. Επί πλέον, λόγω της σχέσης $\rho = 2|N|^2 E$, οι αρνητικές ενέργειες συνδέονται με αρνητικές πυκνότητες πιθανότητας (!) Μ' άλλα λόγια, η εξίσωση Klein-Gordon δείχνει να έχει τραγικά προβλήματα ήδη από τη γένεσή της και πάντως σ' ένα πολύ πρώιμο στάδιο, που είναι τόσο σοβαρά που απειλούν την ίδια την επιβίωσή της ως αξιόπιστη σχετικιστική εξίσωση. Αυτά τα προβλήματα ήταν που ανάγκασαν τον Schrödinger (που στην πραγματικότητα είχε επινοήσει την εξίσωση Klein-Gordon πριν από τους Klein και Gordon) να την εγκαταλείψει και να ασχοληθεί με τη μη σχετικιστική εξίσωση που φέρει το όνομά του. Το πρόβλημα με τις αρνητικές πιθανότητες μπορεί με κάποια έννοια να αντιμετωπιστεί, με ένα τέχνασμα που πρότειναν οι Pauli και Weiskopf: πολλαπλασίασαν την πυκνότητα με το φορτίο q του σωματιδίου και ερμήνευσαν την έκφραση $\rho \equiv iq(\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*) \rightarrow 2q|N|^2 E$ που προέκυψε ως πυκνότητα φορτίου

αντί για πυκνότητα πιθανότητας (αντίστοιχα χειρίστηκαν και την πυκνότητα ρεύματος), οπότε οι τυχόν αρνητικές της τιμές δε δημιουργούσαν εννοιολογικό πρόβλημα. Όμως το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών παρέμενε και απαιτούσε μια πιο ριζική αλλαγή αντίληψης.

1.2 Αντισωματίδια

Τελικά η ιδέα που χρειαζόταν προτάθηκε από τους Stückelberg, το 1941, και Feynman, το 1948. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο με φορτίο $+q$ και τετραορμή (E, \vec{p}) . Η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος μπορεί να γραφτούν με τη μορφή:

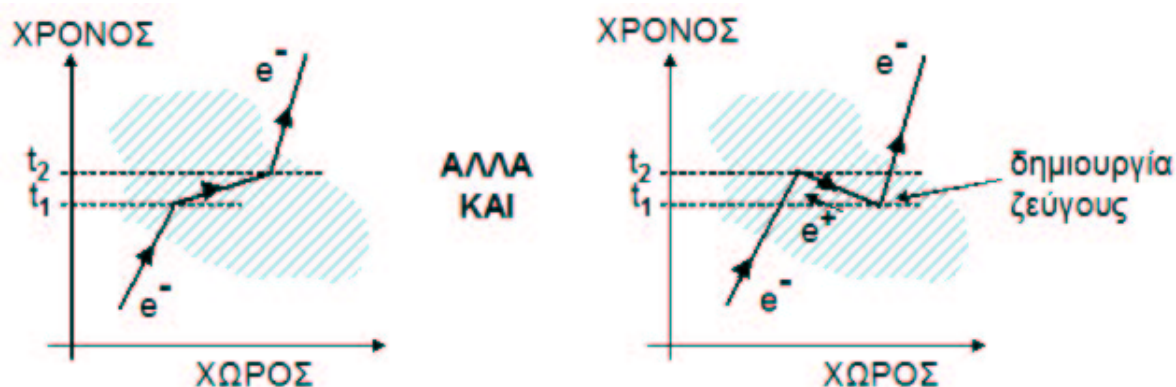
$$J^\mu(+q) = +2q|N|^2(E, \vec{p}).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα **αντι-σωματίδιο** με φορτίο $-q$ και την ίδια τετραορμή (E, \vec{p}) . Οι πυκνότητες θα γίνουν:

$$J^\mu(-q) = -2q|N|^2(E, \vec{p}) = +2q|N|^2(-E, -\vec{p}),$$

το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο με το ρεύμα ενός **σωματιδίου** με τετραορμή $(-E, -\vec{p})$. Στον προσδιορισμό του φυσικού νοήματος αυτής της ταύτισης θα μας βοηθήσει η απλή παρατήρηση ότι $e^{-i(-E)(-t)} = e^{-i(+E)(+t)}$, που υποδεικνύει ότι ένα σωματίδιο, με ενέργεια $-E$, που διαδίδεται ανάστροφα στο χρόνο περιγράφει το αντίστοιχο αντισωματίδιο με ενέργεια $+E$, που διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου. Η ερμηνεία που δόθηκε ήταν ότι **καταστάσεις σωματιδίων με αρνητική ενέργεια που διαδίδονται στο χρόνο κατά την ανάστροφη φορά περιγράφουν καταστάσεις αντισωματιδίων με θετική ενέργεια που διαδίδονται στο χρόνο κατά την ορθή φορά**. Για παράδειγμα, η εκπομπή ενός αντιηλεκτρονίου (ποζιτρονίου) με ενέργεια $E > 0$ ταυτίζεται με την απορρόφηση ενός ηλεκτρονίου με ενέργεια $-E < 0$. Αυτό σημαίνει ότι **οι κυματοσυναρτήσεις μας μπορούν στην πραγματικότητα να περιγράψουν καταστάσεις πολλών σωματιδίων και αντισωματιδίων**. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να θεωρήσει τη σκέδαση ενός σωματιδίου από κάποιο εξωτερικό δυναμικό. Θεωρούμε ότι το σωματίδιο σκεδάζεται δύο φορές από το δυναμικό, τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 > t_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.

Η πιο συνηθισμένη αλληλουχία των γεγονότων θα ήταν να γίνει πρώτα μια σκέδαση τη χρονική στιγμή t_1 και να ακολουθήσει η δεύτερη σκέδαση τη χρονική στιγμή t_2 . Όμως, η ερμηνεία των Stückelberg και Feynman μας δίνει το δικαίωμα να θεωρήσουμε και τη δυνατότητα το σωματίδιο να αλληλεπιδράσει τη χρονική στιγμή t_2 , να διαδοθεί ανάστροφα στο χρόνο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , να αλληλεπιδράσει ξανά, και να διαδοθεί στη συνέχεια κατά την ορθή φορά μέχρι την τελική κατάσταση.



Σχήμα 1.1:

Το κομμάτι της διαδρομής που περιλαμβάνει διάδοση κατά την αναστροφή φορά του χρόνου θα ερμηνευτεί ως διάδοση του αντίστοιχου αντισωματιδίου κατά την ορθή φορά του χρόνου. Δηλαδή η δεύτερη δυνατότητα μπορεί να γίνει κατανοητή ως εξής: Το αρχικό σωματίδιο κινείται αρχικά χωρίς να αλληλεπιδρά καθόλου, μέχρι και μετά το χρόνο t_1 . Αυτή τη χρονική στιγμή δημιουργείται από το κενό μέσω του δυναμικού ένα ζεύγари σωματιδίου-αντισωματιδίου, το οποίο διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου. Τη χρονική στιγμή t_2 το παραχθέν αντισωματίδιο (του ζεύγους) συναντά το αρχικό σωματίδιο και εξουδετερώνονται αμοιβαία, ενώ το σωματίδιο (του ζεύγους) συνεχίζει την πορεία του και προβάλλει ως το σωματίδιο της τελικής κατάστασης. Ίσως να αναρωτηθεί κανείς πώς συνέπεσε το ζεύγος να δημιουργηθεί από το κενό την κατάλληλη χρονική στιγμή, έτσι ώστε το αντισωματίδιο να βρεθεί τη χρονική στιγμή t_2 στην κατάλληλη θέση ώστε να αλληλεπιδράσει με το εισερχόμενο σωματίδιο και να αλληλοεξαϋλωθούν. Μα αυτό ακριβώς μας λέει ότι πρέπει να αλλάξουμε αντίληψη σχετικά με το τι λέμε κενό: δεν είναι ο άδειος χώρος, αλλά ένα περίπλοκο σύστημα, που μέσα του γεννιούνται και αλληλοεξαϋλώνονται συνεχώς σωματίδια και αντισωματίδια. Κάποια από αυτά είναι ενδεχόμενο να αλληλεπιδράσουν με εισερχόμενα σωματίδια, όπως στο παράδειγμά μας, και να επηρεάσουν κάποια αντίδραση. Όμως η δραστηριότητα της συνεχούς δημιουργίας και καταστροφής είναι ασταμάτητη και μας δείχνει ότι το κενό είναι στην πραγματικότητα μια πολύ σύνθετη οντότητα. Για τη δεύτερη δυνατότητα παρατηρούμε ότι, μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 , υπάρχουν τρία σωματίδια, αντί για ένα: το αρχικό συν το ζεύγος σωματιδίου-αντισωματιδίου που γεννιέται από το κενό με τη βοήθεια του δυναμικού. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η εξίσωση Klein-Gordon, αν υιοθετήσει κανείς αυτήν την ερμηνεία, δεν είναι πια μια εξίσωση που περιγράφει **ένα μόνο** σωματίδιο (όπως, ας πούμε, η εξίσωση του Schrödinger) αλλά πρέπει να θεωρηθεί ως έκφραση μιας θεωρίας πολλών σωματιδίων, ή αλλιώς μιας **κβαντικής θεωρίας πεδίου**.

1.3 Βαθμωτό πραγματικό πεδίο: Κβάντωση και ανάπτυγμα Fourier

Έχουμε ήδη εξηγήσει (και αποτυπώσει στην εξίσωση (1.6)) ότι η λύση της εξίσωσης Klein-Gordon είναι της μορφής

$$Ne^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = Ne^{-ip \cdot x}, \quad p \cdot x \equiv E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}.$$

Έχουμε συμβολίσει με E_p την ποσότητα $+\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, που προκύπτει από τη σχέση (1.7). Υπάρχει επίσης η λύση με αρνητική ενέργεια, η $Ne^{+ip \cdot x}$, η οποία θα ερμηνευτεί ως αντισωματίδιο με θετική ενέργεια. Ο χώρος των λύσεων της εξίσωσης Klein-Gordon εξαντλείται από τις $e^{-ip \cdot x}$ και $e^{+ip \cdot x}$, οπότε η γενική λύση θα δίνεται από μια άπειρη υπέρθεση καταστάσεων με τη μορφή:

$$\phi(x) = \int d^3p \left[A(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + A^*(\vec{p})e^{+ip \cdot x} \right], \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι, για να εκφράσουμε τη γενική λύση, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τόσο τις λύσεις με θετική ενέργεια, όσο και εκείνες με αρνητική ενέργεια. Δεν γίνεται δηλαδή απλά να αγνοήσουμε τις λύσεις αρνητικής ενέργειας, όσο ενοχλητικές και αν είναι. Αυτός ήταν και ο λόγος τόσο μεγάλης προσπάθειας για μια φυσικά αποδεκτή ερμηνεία μέσω των αντισωματιδίων. Άλλη μία παρατήρηση έχει να κάνει με τη μορφή της λύσης (1.10): ο συντελεστής του δεύτερου εκθετικού επελέγη να είναι ο A^* και όχι ένας αυθαίρετος συντελεστής B . Αυτό έγινε διότι επιμένουμε η λύση για το βαθμωτό πεδίο να είναι πραγματική. Θα μπορούσε και να μην είναι (θα το δούμε αργότερα), αλλά σε πρώτη φάση θα ασχοληθούμε με το πραγματικό πεδίο. Αυτό εξαντλεί ό,τι θα είχαμε να πούμε για τις λύσεις της κλασικής εξίσωσης.

Όμως, αυτό που θέλουμε να περιγράψουμε είναι ένα κβαντικό πεδίο, το $\hat{\phi}(x)$. Αυτό προκύπτει αν θεωρήσει κανείς τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (1.11)$$

(που γεννά την εξίσωση Klein-Gordon αν πάρουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange) και ορίσουμε τη συζυγή ορμή

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \dot{\phi}(x). \quad (1.12)$$

Στη συνέχεια, επικαλούμαστε τη στοιχειώδη Κβαντική Μηχανική, όπου η κβάντωση επιτελείται με το αξίωμα $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, δηλαδή η μετατόπιση x μετατρέπεται στον τελεστή της μετατόπισης \hat{x} και η ορμή p μετατρέπεται στον τελεστή της ορμής \hat{p} . Σε πλήρη αντιστοιχία, απαιτούμε να ικανοποιούνται οι σχέσεις μετάθεσης:

$$\boxed{[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0,}$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.13)$$

Αυτές οι σχέσεις αναφέρονται **στον ίδιο χρόνο** (equal time commutation relations).

Ας σκεφτούμε τι κάναμε: πήραμε ένα κλασικό πεδίο, το $\phi(t, \vec{x})$. Αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι περιγράφει κάποιο είδος κλασικού ρευστού με άπειρους βαθμούς ελευθερίας (που ταυτοποιούνται από το \vec{x}) και το ϕ είναι η τιμή κάποιου χαρακτηριστικού μεγέθους του ρευστού, π.χ. της πυκνότητάς του, που εξαρτάται γενικά και από το χρόνο. Στη συνέχεια κβαντώνουμε αυτό το σύστημα. Όμως πρέπει να θυμηθούμε ότι το πεδίο ϕ στην πραγματικότητα δεν προέκυψε από μετρήσεις ενός κλασικού ρευστού, αλλά είναι κυματοσυνάρτηση ενός άλλου συστήματος, για το οποίο έχει προηγηθεί η κβάντωση της τετραορμής, δηλαδή οι αντικαταστάσεις $p^0 \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ και $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$. Δηλαδή **ξανακβαντώνουμε ένα ήδη κβαντισμένο σύστημα**. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως **δεύτερη κβάντωση**.

Το σύστημα είναι πια κβαντισμένο. Όμως, όλη αυτή η κατασκευή κινδυνεύει να παρεξηγηθεί ως ένα καθαρά φορμαλιστικό δημιούργημα, αν δεν τη συνδέσουμε με κάτι γνωστό. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει η γενική λύση (1.10) της κλασικής εξίσωσης. Το αριστερό μέλος είναι μια κλασική συνάρτηση. Αν θέλουμε το αριστερό μέλος να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά πεδίου, κάποια στοιχεία του δεξιού μέλους πρέπει επίσης να προαχθούν σε πεδία. Αυτά τα στοιχεία θα είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης $A(\vec{p})$ και $A^*(\vec{p})$. Είναι αξιοσημείωτο ότι το βάρος της μετατροπής σε κβαντικό σύστημα δε θα το σηκώσουν τα εκθετικά, που είναι οι λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon, αλλά οι σταθερές ολοκλήρωσης! Για να φτάσουμε στην τελική έκφραση που θέλουμε, θα κάνουμε και μια ανακλιμάκωση:

$$A(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \hat{a}(p), \quad A^*(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \hat{a}^\dagger(p).$$

Δηλαδή οι συντελεστές $A(\vec{p})$ και $A^*(\vec{p})$ γίνονται τελεστές (που θα δούμε ότι είναι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής) και το ανάπτυγμα Fourier του κβαντικού πεδίου $\hat{\phi}(x)$ θα είναι:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x}]. \quad (1.14)$$

Όπως έχουμε εξηγήσει, $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ οπότε και $\hat{\pi}(x) = \dot{\hat{\phi}}(x)$ και τελικά:

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [(-iE_p)\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + (+iE_p)\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x}]. \quad (1.15)$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι σχέσεις μετάθεσης των $\hat{a}(p)$ και $\hat{a}^\dagger(p)$ που απαιτούνται για να ικανοποιηθούν οι σχέσεις μετάθεσης (1.13) των $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ και $\hat{\pi}(t, \vec{x})$ είναι:

$$[\hat{a}(p), \hat{a}(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{a}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.16)$$

Πιό εύκολο είναι να δείξει κανείς το αντίστροφο: ξεκινώντας από τις (1.16) να δείξει τις (1.13). Δίνουμε ένα δείγμα [συμβολισμοί: $x \equiv (t, \vec{x})$, $y \equiv (t, \vec{y})$]:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] &= \left[\int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x}], \right. \\
 &\quad \left. \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} [(-iE_{p'})\hat{a}(p')e^{-ip' \cdot y} + (+iE_{p'})\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip' \cdot y}] \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \\
 &\quad [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x}, (-iE_{p'})\hat{a}(p')e^{-ip' \cdot y} + (+iE_{p'})\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip' \cdot y}] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \\
 &\quad \{ (+iE_{p'})e^{-ip \cdot x} e^{+ip' \cdot y} [\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p')] + (-iE_{p'})e^{+ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} [\hat{a}^\dagger(p), \hat{a}(p')] \} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \\
 &\quad \{ (+iE_{p'})e^{-ip \cdot x} e^{+ip' \cdot y} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') + (-iE_{p'})e^{+ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} (-\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')) \} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (iE_p) \{ e^{-ip \cdot x} e^{+ip \cdot y} + e^{+ip \cdot x} e^{-ip \cdot y} \} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (iE_p) \{ e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{y})} + e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{y})} \} \\
 &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \{ e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),
 \end{aligned}$$

όπως θα έπρεπε. Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Ένας τελεστής με κεντρική σημασία είναι η Χαμιλτονιανή. Ξεκινώντας από τις σχέσεις (1.11) και (1.12) μπορούμε να δείξουμε για τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα ότι:

$$\mathcal{H} \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2], \quad (1.17)$$

όπου αντικαταστήσαμε παντού το $\dot{\phi}$ με το π , αφού η Χαμιλτονιανή εκφράζεται συναρτήσεως της ορμής και όχι της ταχύτητας. Η Χαμιλτονιανή μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσεως των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε κάνει τη (δεύτερη) κβάντωση και τα πεδία $\hat{\pi}$ και $\hat{\phi}$ έχουν προαχθεί σε τελεστές: απλά

αντικαθιστά κανείς στον ορισμό (1.17) της Χαμιλτονιανής τα αναπτύγματα (1.14) και (1.15), οπότε θα προκύψει:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p E_p [\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p)]. \quad (1.18)$$

Με τη βοήθεια τώρα της σχέσης (1.18) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger(p')] = +E_{p'}\hat{a}^\dagger(p'), \quad [\hat{H}, \hat{a}(p')] = -E_{p'}\hat{a}(p'). \quad (1.19)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια ιδιοκατάσταση $|E_p\rangle$, με ιδιοτιμή της Χαμιλτονιανής ίση με E_p : $\hat{H}|E_p\rangle = E_p|E_p\rangle$. Αν δράσουμε και με τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης (1.19) πάνω στην $|E_p\rangle$ θα προκύψει:

$$\begin{aligned} & \hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) - \hat{a}^\dagger(p')(\hat{H}|E_p\rangle) = +E_{p'}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) \\ \Rightarrow & \hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) - E_p(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) = +E_{p'}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) \\ \Rightarrow & \hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle) = (E_p + E_{p'}) (\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle). \end{aligned}$$

Δηλαδή η νέα κατάσταση $\hat{a}^\dagger(p')|E_p\rangle$ που δημιουργείται από τη δράση του τελεστή $\hat{a}^\dagger(p')$ θα έχει ενέργεια $E_p + E_{p'}$. Ακολουθώντας εντελώς αντίστοιχα βήματα βρίσκουμε ότι η κατάσταση $\hat{a}(p')|E_p\rangle$ που δημιουργείται από τη δράση του τελεστή $\hat{a}(p')$ θα έχει ενέργεια $E_p - E_{p'}$.

Έχουμε, επομένως, πλήρη αντιστοιχία με τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή: ο τελεστής $\hat{a}^\dagger(p')$ δημιουργεί ένα σωματίδιο με ορμή p' , δηλαδή είναι τελεστής δημιουργίας, ενώ ο τελεστής $\hat{a}(p')$ καταστρέφει ένα σωματίδιο με ορμή p' , άρα είναι τελεστής καταστροφής. Να επισημάνουμε εδώ παρεμπιπτόντως ότι αυτό που ονομάζουμε **σωματίδιο** σ' αυτή τη διατύπωση είναι μια οντότητα **με καθορισμένη ορμή και όχι καθορισμένη θέση**, δηλαδή διαφέρει πάρα πολύ από τη συνήθη εικόνα που έχουμε για το σωματίδιο, ότι δηλαδή είναι κάτι που είναι χωρικά καλά εντοπισμένο.

Μια ακόμα παρατήρηση προκύπτει αν ξαναθυμηθούμε τη σχέση (1.14), όπου βλέπουμε ότι ο τελεστής καταστροφής πολλαπλασιάζει το εκθετικό με τη θετική συχνότητα. Άρα η συνιστώσα του πεδίου με θετική συχνότητα καταστρέφει το σωματίδιο, ενώ η συνιστώσα με την αρνητική συχνότητα συνδέεται με τον τελεστή δημιουργίας και το κατασκευάζει. Το σωματίδιο **έχει πάντα θετική ενέργεια**, απλά οι δύο συνιστώσες (θετική ή αρνητική συχνότητα) σηματοδοτούν το αν το σωματίδιο καταστρέφεται ή δημιουργείται.

1.4 Χώρος του Fock

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι τελεστές καταστροφής εξαφανίζουν σωματίδια με ορμή p' , άρα ενέργεια $E_{p'}$, δηλαδή μειώνουν την ενέργεια κατά $E_{p'}$.

Όμως αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, γιατί τότε θα μπορούσαμε να αντλήσουμε άπειρη ενέργεια από το φυσικό σύστημα. Υπάρχει, επομένως, μια κατάσταση $|0\rangle$, πάνω στην οποία αν δράσουν οι τελεστές καταστροφής (για όλες τις τιμές της τετραορμής), πρέπει να δώσουν μηδέν, ώστε να τερματιστεί η διαδικασία. Αυτή η θεμελιώδης κατάσταση ονομάζεται **κενό** της θεωρίας, συμβολίζεται με $|0\rangle$ (ενώ ακριβέστερος θα ήταν ίσως ο συμβολισμός $|0, 0, 0, \dots\rangle$, που υποβάλλει την ιδέα ότι αυτή είναι η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_1 , η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_2 , η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_3 κλπ) και ορίζεται με βάση τη σχέση

$$\hat{a}(p)|0\rangle = 0, \quad \forall p. \quad (1.20)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η θεμελιώδης κατάσταση είναι κανονικοποιημένη:

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (1.21)$$

Η Χαμιλτονιανή (1.18) μπορεί, αν ληφθούν υπόψη οι σχέσεις μετάθεσης (1.16), να γραφτεί με την εναλλακτική μορφή:

$$\hat{H} = \int d^3p E_p \left[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0}) \right]. \quad (1.22)$$

Αυτός ο τρόπος γραφής γινομένων τελεστών όπου οι τελεστές δημιουργίας βρίσκονται στα αριστερά όλων των τελεστών καταστροφής λέγεται **φυσική διάταξη** και είναι ο συνηθισμένος τρόπος γραφής στην κβαντική θεωρία πεδίου. Επίσης, αυτή η γραφή δείχνει ανάγλυφα ότι το ελεύθερο βαθμωτό πεδίο, με το οποίο ασχολούμαστε, μπορεί να θεωρηθεί ως **συλλογή άπειρων το πλήθος κβαντικών αρμονικών ταλαντωτών**. Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της Χαμιλτονιανής στο κενό ισούται με:

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \int d^3p E_p \left[\langle 0|\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p)|0\rangle + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0}) \langle 0|0\rangle \right] = \int d^3p E_p \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0}),$$

που είναι **άπειρο!** Αυτό δεν είναι τόσο παράδοξο όσο δείχνει: ο κάθε αρμονικός ταλαντωτής έχει ενέργεια $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ με ελάχιστη τιμή $\rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega$, που στην περίπτωσή μας γράφεται: $\frac{1}{2}E_p$. Αφού, λοιπόν, οι ταλαντωτές είναι άπειροι, θα απειρίζεται και η ελάχιστη ενέργειά τους. Αυτή η άπειρη ενέργεια ονομάζεται ενέργεια μηδενικού σημείου και στις συνηθισμένες φυσικές καταστάσεις δεν έχει καμμία επίδραση, γι' αυτό συνήθως παραλείπεται ¹.

Από τη στιγμή που εντοπίσαμε τη θεμελιώδη κατάσταση μπορούμε να δράσουμε επάνω της με τελεστές δημιουργίας και να φτιάξουμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή καταστάσεις ενός σωματιδίου $|p\rangle$ (ανάλογες προς την έκφραση $\hat{a}^\dagger(p)|0\rangle$),

¹Υπάρχει, πάντως, το πολύ γνωστό φαινόμενο Casimir, το οποίο είναι εκδήλωση της ενέργειας μηδενικού σημείου.

καταστάσεις δύο σωματιδίων $|p_1 p_2 \rangle$ (ανάλογες προς την έκφραση $\hat{a}^\dagger(p_1)\hat{a}^\dagger(p_2)|0 \rangle$), κλπ. Οι σταθερές αναλογίας εξηγούνται λεπτομερειακά στην παράγραφο 2.3.2. Ο χώρος που κατασκευάζεται λέγεται **χώρος του Fock** και είναι το κατάλληλο πλαίσιο για να περιγραφούν διαδικασίες που περιλαμβάνουν μεταβαλλόμενο αριθμό σωματιδίων. Ένας τελεστής που δίνει τον αριθμό των σωματιδίων που περιέχονται σε μια κατάσταση είναι ο τελεστής αρίθμησης:

$$\hat{\mathcal{N}} \equiv \int d^3p \hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p). \quad (1.23)$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$[\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}^\dagger(p')] = +\hat{a}^\dagger(p'), \quad [\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}(p')] = -\hat{a}(p'),$$

οπότε

$$\hat{\mathcal{N}}|0 \rangle = 0, \quad \hat{\mathcal{N}}|p \rangle = |p \rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}|p_1 p_2 \rangle = 2|p_1 p_2 \rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}|p_1 p_2 p_3 \rangle = 3|p_1 p_2 p_3 \rangle, \dots,$$

όπως είπαμε.

1.5 Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο: Αντισωματίδια

Κατ' αναλογία με το πραγματικό βαθμωτό πεδίο μπορούμε να ορίσουμε και το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Πολλά πράγματα θα είναι παρόμοια, αλλά παρουσιάζει και κάποια ενδιαφέροντα νέα χαρακτηριστικά. Έχει ενδιαφέρον, γιατί, αν θέλει κανείς να περιγράψει φορτισμένα βαθμωτά σωματίδια, αυτό είναι το πεδίο που πρέπει να χρησιμοποιήσει. Το λέμε μιγαδικό ακριβώς γιατί το ερμιτιανό συζυγές πεδίο $\hat{\phi}^\dagger$ δεν ταυτίζεται με το $\hat{\phi}$, όπως στην περίπτωση του πραγματικού πεδίου. Θα χρησιμοποιήσουμε και τα δύο γραμμικά ανεξάρτητα πεδία. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα γράφεται:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (1.24)$$

ενώ το ανάπτυγμα σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x}], \\ \hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip \cdot x} + \hat{b}(p)e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι, σε αντίθεση με το ανάπτυγμα (1.14) για το πραγματικό πεδίο, ο τελεστής $\hat{b}^\dagger(p)$ που πολλαπλασιάζει το εκθετικό $e^{+ip \cdot x}$ με τις αρνητικές συχνότητες δεν είναι ερμιτιανός συζυγής του τελεστή $\hat{a}(p)$, που πολλαπλασιάζει το $e^{-ip \cdot x}$ των θετικών συχνοτήτων. Αυτό για να είναι συμβατό με την απαίτηση $\hat{\phi}^\dagger(x) \neq \hat{\phi}(x)$. Οι σχέσεις μετάθεσης είναι:

$$[\hat{a}(p), \hat{a}(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{a}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$\boxed{[\hat{b}(p), \hat{b}(p')] = 0, \quad [\hat{b}^\dagger(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{b}(p), \hat{b}^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),}$$

$$\boxed{[\hat{a}(p), \hat{b}(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{b}(p')] = 0}$$
(1.26)

Η θεμελιώδης κατάσταση (κενό) της θεωρίας ορίζεται μέσω των σχέσεων

$$\hat{a}(p)|0\rangle = 0, \quad \hat{b}(p)|0\rangle = 0, \quad \forall p. \quad (1.27)$$

και η Χαμιλτονιανή προκύπτει ίση με:

$$\boxed{\hat{H} = \int d^3p E_p [\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p)].} \quad (1.28)$$

Εξ άλλου οι διεγερμένες καταστάσεις που περιέχουν ένα, δύο, τρία κλπ σωματίδια τύπου a ή/και b παράγονται δρώντας στη θεμελιώδη κατάσταση με τους τελεστές δημιουργίας $\hat{a}^\dagger(p)$ και $\hat{b}^\dagger(p)$, όπως και στην περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Είναι προφανές ότι η Λαγκρανζιανή (1.24) είναι αναλλοίωτη υπό τον μετασχηματισμό

$$\phi(x) \rightarrow e^{-iq\theta} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{+iq\theta} \phi^\dagger(x),$$

με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι το θ δεν εξαρτάται από το x . Θεωρούμε τώρα απειροστούς τέτοιους μετασχηματισμούς, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της Noether και να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο διατηρούμενο ρεύμα. Θεωρούμε λοιπόν ότι το θ είναι απειροστό: $\theta \rightarrow \epsilon$. Τότε:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-iq\epsilon} \phi(x) \approx \phi(x) - iq\epsilon\phi(x) \equiv \phi(x) + \epsilon\Delta\phi(x),$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow e^{+iq\epsilon} \phi^\dagger(x) \approx \phi^\dagger(x) + iq\epsilon\phi^\dagger(x) \equiv \phi^\dagger(x) + \epsilon\Delta\phi^\dagger(x).$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$\Delta\phi(x) = -iq\phi(x), \quad \Delta\phi^\dagger(x) = +iq\phi^\dagger(x).$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα της Noether βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \Delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger(x))} \Delta\phi^\dagger(x) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} (-iq\phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger(x))} (+iq\phi^\dagger(x)) \\ &= iq [(\partial^\mu \phi)\phi^\dagger - (\partial^\mu \phi^\dagger)\phi]. \end{aligned}$$

Μπορούμε, συνεπώς να υπολογίσουμε το διατηρούμενο φορτίο:

$$Q = \int d^3x J^0 = \int d^3x iq [(\partial^0 \phi)\phi^\dagger - (\partial^0 \phi^\dagger)\phi].$$

Αν αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα (1.25) στην έκφραση για το διατηρούμενο φορτίο προκύπτει:

$$Q = q \int d^3p [\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) - \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p)].$$

Ο πρώτος όρος είναι ο τελεστής αρίθμησης των κβάντων τύπου a :

$$\mathcal{N}_a \equiv \int d^3p \hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p).$$

Παρόμοια, ορίζουμε τον δεύτερο τελεστή αρίθμησης, για τα σωματίδια τύπου b :

$$\mathcal{N}_b \equiv \int d^3p \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p).$$

Το διατηρούμενο φορτίο γράφεται:

$$Q = q\mathcal{N}_a - q\mathcal{N}_b.$$

Η ερμηνεία είναι πάρα πολύ ενδιαφέρουσα: η ποσότητα q είναι το φορτίο του σωματιδίου τύπου a , οπότε ο πρώτος όρος, ο $q\mathcal{N}_a$, αντιπροσωπεύει το συνολικό φορτίο αυτών των σωματιδίων. Τότε τα σωματίδια τύπου b έχουν το ακριβώς αντίθετο φορτίο και ονομάζονται **αντισωματίδια** των σωματιδίων τύπου a . Το συνολικό φορτίο των αντισωματιδίων εκφράζεται από τον δεύτερο όρο, τον $-q\mathcal{N}_b$. Αν τώρα θυμηθούμε τα αναπτύγματα (1.25), βλέπουμε ότι το πεδίο $\hat{\phi}(x)$ μπορεί να δράσει πάνω σε μια κατάσταση είτε με τον πρώτο όρο, που καταστρέφει σωματίδια είτε με τον δεύτερο όρο, που δημιουργεί αντισωματίδια. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο περιπτώσεις, το φορτίο της νέας κατάστασης θα είναι μικρότερο κατά q από εκείνο της αρχικής. Τα αντίστροφα θα συμβούν αν δράσει το πεδίο $\hat{\phi}^\dagger(x)$: είτε ο πρώτος όρος θα δημιουργήσει σωματίδια, είτε ο δεύτερος όρος θα καταστρέψει αντισωματίδια, με τελικό αποτέλεσμα η νέα κατάσταση να έχει φορτίο μεγαλύτερο κατά q από εκείνο της αρχικής.

1.6 Διαδότες

Ο διαδότης είναι ένα βασικό στοιχείο της θεωρίας διαταραχών που θα αναπτύξουμε αργότερα. Βασικά είναι ένα πλάτος μετάβασης από ένα χωροχρονικό σημείο σ' ένα άλλο. Όμως αυτή η αόριστη διατύπωση μπορεί να περιλαμβάνει διάφορες διαδικασίες και θα προσπαθήσουμε να την κάνουμε όσο πιο σαφή γίνεται.

1.6.1 Πραγματικό βαθμωτό πεδίο

Ας θεωρήσουμε το πλάτος μετάβασης ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου $\hat{\phi}(x)$ από το σημείο $x' \equiv (t', \vec{x}')$ στο σημείο $x \equiv (t, \vec{x})$ όπου $t < t'$. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στο σημείο x' είναι $\langle 0 | \hat{\phi}(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip' \cdot x'} < 0 | \hat{a}(p')$, ενώ

εκείνη του σωματιδίου στο x είναι: $\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ip \cdot x} \hat{a}^\dagger(p)|0\rangle$. Εκείνο που χρειαζόμαστε για να βρούμε το πλάτος μετάβασης είναι η προβολή της μιας κυματοσυνάρτησης πάνω στην άλλη, δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x'} \langle 0|\hat{a}(p')\hat{a}^\dagger(p)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x'} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot (x-x')}, \quad t < t'. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Όταν $t > t'$ τα πράγματα είναι αντίστοιχα και γράφουμε τις σχέσεις χωρίς σχόλια:

$$\begin{aligned} \left\{ \langle 0|\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{-ip \cdot x} \langle 0|\hat{a}(p), \quad \hat{\phi}(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{+ip' \cdot x'} \hat{a}^\dagger(p')|0\rangle \right\} \\ \Rightarrow \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} \langle 0|\hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p')|0\rangle \\ = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x-x')}, \quad t > t'. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Τις παραστάσεις $\langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle$ (αν $t < t'$) και $\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle$ (αν $t > t'$) μπορεί να τις καταλάβει κανείς και ως εξής: (1) Αν $t < t'$, ο τελεστής $\hat{\phi}(x)$ δρα πρώτος στο κενό και δημιουργεί ένα σωματίδιο στο σημείο \vec{x} , ενώ στη συνέχεια δρα ο τελεστής $\hat{\phi}(x')$ και καταστρέφει το σωματίδιο αυτό όταν φτάσει στο σημείο \vec{x}' . (2) Αν $t > t'$, δρα πρώτος στο κενό ο τελεστής $\hat{\phi}(x')$ και δημιουργεί ένα σωματίδιο στο σημείο \vec{x}' , ενώ στη συνέχεια δρα ο τελεστής $\hat{\phi}(x)$ και καταστρέφει το σωματίδιο αυτό όταν φτάσει στο σημείο \vec{x} . Δηλαδή συνοπτικά, **αν $t < t'$, το σωματίδιο δημιουργείται στο \vec{x} και καταστρέφεται στο \vec{x}' , ενώ για $t > t'$, το σωματίδιο δημιουργείται στο \vec{x}' και καταστρέφεται στο \vec{x} .**

Στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρει το πλάτος μετάβασης μεταξύ των σημείων \vec{x} και \vec{x}' σε χρόνο $|t - t'|$, ανεξάρτητα από το αν προηγείται η χρονική στιγμή t ή η t' . Το μέγεθος που είναι σημαντικό είναι ο λεγόμενος **διαδότης του Feynman**, που ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$i\Delta_F(x - x') \equiv \Theta(t' - t) \langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle + \Theta(t - t') \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle. \quad (1.31)$$

Έχουμε ορίσει τον διαδότη έτσι, ώστε να συνεισφέρουν και οι δύο χρονικές διατάξεις εξ ίσου. Στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε στην (1.31) τις αναμενόμενες τιμές στο κενό με τα ίσα τους από τις εξισώσεις (1.29) και (1.30):

$$i\Delta_F(x - x') = \Theta(t' - t) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot (x-x')} + \Theta(t - t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x-x')}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t' - t) e^{iE_p(t-t') - i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t - t') e^{-iE_p(t-t') + i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t' - t) e^{iE_p(t-t') + i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t - t') e^{-iE_p(t-t') + i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')},
\end{aligned} \tag{1.32}$$

αφού η τρισδιάστατη ορμή είναι βουβή μεταβλητή και η εξάρτηση είναι τέτοια ώστε μπορούμε να αλλάξουμε το \vec{p} σε $-\vec{p}$ μέσα στην ολοκλήρωση. Δηλαδή:

$$i\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left[\Theta(t' - t) e^{iE_p(t-t')} + \Theta(t - t') e^{-iE_p(t-t')} \right], \tag{1.33}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε μια αναπαράσταση της βηματικής συνάρτησης Θήτα, γνωστή από τη μιγαδική ανάλυση:

$$\Theta(\tau) = i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{-i\rho\tau}}{\rho + i\epsilon},$$

που μπορεί ν' αποδειχτεί πολύ εύκολα, ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος και χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Αυτή η σχέση συνεπάγεται τις

$$\Theta(t - t') = i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t-t')}}{p'_0 + i\epsilon}, \quad \Theta(t' - t) = -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t'-t)}}{-p'_0 - i\epsilon}.$$

Αυτές οι εκφράσεις θα αντικατασταθούν στην εξίσωση (1.33) και θα δώσουν:

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x - x') &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&\cdot \left[-i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t'-t)}}{-p'_0 - i\epsilon} e^{iE_p(t-t')} + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t-t')}}{p'_0 + i\epsilon} e^{-iE_p(t-t')} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&\cdot \left[-i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-i(-p'_0 - E_p)(t-t')}}{-p'_0 - i\epsilon} + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-i(p'_0 + E_p)(t-t')}}{p'_0 + i\epsilon} \right] \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Στον πρώτο όρο κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $-p'_0 - E_p = p_0$ ενώ στον δεύτερο όρο: $p'_0 + E_p = p_0$, οπότε:

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x - x') &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&\cdot \left[-i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 + E_p - i\epsilon} + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 - E_p + i\epsilon} \right] \tag{1.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\Delta_F(x-x') &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t-t') + i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \\ &\cdot \frac{1}{2E_p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{i}{p_0 + E_p - i\epsilon} + \frac{i}{p_0 - E_p + i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ανακατασκευάσει την τετραδιάστατη εκδοχή του μετασχηματισμού Fourier:

$$\boxed{\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \tilde{\Delta}_F(p),} \quad (1.37)$$

και αποδείξαμε ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_F(p) &= \frac{1}{2E_p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{p_0 - (E_p - i\epsilon)} - \frac{1}{p_0 + (E_p - i\epsilon)} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p_0^2 - (E_p - i\epsilon)^2} \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i(2\epsilon E_p)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Όμως το ϵ είναι απλά μια απειροστή θετική ποσότητα, οπότε και το $2\epsilon E_p$ μπορεί να παίζει ακριβώς τον ίδιο ρόλο: μ' αυτό το σκεπτικό θα συμβολίζουμε στο εξής το $2\epsilon E_p$ με ϵ για απλότητα. Εξ άλλου, όπως ξέρουμε, $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$ και $p_0^2 - \vec{p}^2 = p^2$, οπότε ο διαδότης γράφεται τελικά με τη μορφή:

$$\boxed{\tilde{\Delta}_F(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.}$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, αν δράσουμε στη συνάρτηση $\Delta_F(x)$ με τον τελεστή $\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2$ των Klein-Gordon, θα πάρουμε συνάρτηση δέλτα. Η απόδειξη είναι πολύ απλή:

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2)\Delta_F(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2) e^{-ip \cdot x} \tilde{\Delta}_F(p) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) e^{-ip \cdot x} \tilde{\Delta}_F(p) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) e^{-ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} = -\delta^{(4)}(x). \end{aligned}$$

Συνεπώς ο διαδότης του Feynman είναι μια συνάρτηση Green για τον τελεστή Klein-Gordon.

1.6.2 Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον διαδότη του Feynman για μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Εκτός από το ενδιαφέρον που πηγάζει από την πιθανή συμμετοχή φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες αλληλεπιδράσεις, παρουσιάζει και μεγάλο εννοιολογικό ενδιαφέρον, όπως θα δούμε.

Ο διαδότης ορίζεται ως:

$$i\Delta_F(x-x') \equiv \Theta(t-t') \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(x')|0 \rangle + \Theta(t'-t) \langle 0|\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x)|0 \rangle. \quad (1.39)$$

Μπορεί κανείς να δει ότι οι αντίστοιχες παραστάσεις με δύο $\hat{\phi}$ ή με δύο $\hat{\phi}^\dagger$ μηδενίζονται.

Ξαναγράφουμε το ανάπτυγμα (1.25):

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{ip \cdot x}],$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} [\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip' \cdot x'} + \hat{b}(p')e^{-ip' \cdot x'}],$$

το οποίο συνεπάγεται τις σχέσεις:

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(x')|0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x-x')},$$

$$\langle 0|\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x)|0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{+ip \cdot (x-x')}.$$

Άρα ο διαδότης (1.39) γράφεται:

$$i\Delta_F(x-x') = \Theta(t-t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x-x')} + \Theta(t'-t) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{+ip \cdot (x-x')}. \quad (1.40)$$

Απλή σύγκριση με την πρώτη γραμμή της (1.32) είναι αρκετή για να μας πείσει ότι είναι ακριβώς ίσος με τον διαδότη του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Όμως το σημαντικότερο θέμα είναι η ερμηνεία που θα δώσει κανείς σ' αυτόν το διαδότη και πιο συγκεκριμένα στον καθένα από τους δύο όρους του. Όταν $t > t'$, δρα το πεδίο και δημιουργεί σωματίδια με τον τελεστή \hat{a}^\dagger στο σημείο x' , το οποίο διαδίδεται μέχρι το σημείο x , όπου το πεδίο δρα και πάλι και το καταστρέφει με τον τελεστή \hat{a} . Δηλαδή, **όταν $t > t'$, διαδίδονται σωματίδια από το x' μέχρι το x .**

Όταν $t < t'$, δρα το πεδίο και δημιουργεί αντισωματίδια με τον τελεστή \hat{b}^\dagger στο σημείο x , το οποίο διαδίδεται μέχρι το σημείο x' , όπου το πεδίο δρα και πάλι και το καταστρέφει με τον τελεστή \hat{b} . Δηλαδή, **όταν $t < t'$, διαδίδονται αντισωματίδια από το x μέχρι το x' .**

Κεφάλαιο 2

Εικόνες

2.1 Εικόνες στην Κβαντική Μηχανική

Θεωρούμε φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'. \quad (2.1)$$

Στο μακρινό παρελθόν θεωρούμε ότι η συνεισφορά του \hat{H}' είναι μηδενική, οπότε το σύστημα περιγράφεται πλήρως από το ελεύθερο κομμάτι της Χαμιλτονιανής, το \hat{H}_0 . Στη συνέχεια ενεργεί η αλληλεπίδραση και το ερώτημα είναι ποια θα είναι η κατάσταση του συστήματος στο μακρινό μέλλον. Η κυματοσυνάρτηση $|\Psi(t)\rangle$ θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}')|\Psi(t)\rangle. \quad (2.2)$$

Παραδείγματος χάριν, στην στοιχειώδη Κβαντική Μηχανική, η αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή \hat{H}_0 θα μπορούσε να είναι:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (2.3)$$

ενώ το κομμάτι \hat{H}' , που λέγεται διαταραχή, θα μπορούσε να είναι κάποιο δυναμικό $V(x)$, όπως το δυναμικό ενός αρμονικού ή και αναρμονικού ταλαντωτή. Το κομμάτι \hat{H}_0 είναι συνήθως εύκολο να λυθεί, δηλαδή μπορεί να βρεθεί κάποια κυματοσυνάρτηση $|\Psi_0(t)\rangle$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_0(t)\rangle = \hat{H}_0|\Psi_0(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Στα προβλήματα τα οποία θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο, το σύστημα περιγράφεται στο μακρινό παρελθόν από την κυματοσυνάρτηση

$$|i\rangle = |\Psi_0(t_0)\rangle \quad (2.5)$$

και το ζητούμενο είναι η εξέλιξή της με το χρόνο υπό την επίδραση της διαταραχής. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές εικόνες με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να διατυπωθεί η λύση του προβλήματος.

2.1.1 Εικόνα του Schrödinger

Είναι η συνηθισμένη εικόνα, την οποία συναντάει κανείς όταν πρώτη φορά διδάσκεται Κβαντική Μηχανική. Η κυματοσυνάρτηση Schrödinger $|\Psi_S(t)\rangle$ θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_S(t)\rangle = (\hat{H}_{0S} + \hat{H}'_S)|\Psi_S(t)\rangle. \quad (2.6)$$

(Ο δείκτης S απλά μας υπενθυμίζει ότι βρισκόμαστε στην εικόνα του Schrödinger). Η χρονική εξέλιξη βρίσκεται ολόκληρη μέσα στην κυματοσυνάρτηση. Η κυματοσυνάρτηση θα μπορούσε να εκφραστεί ως

$$|\Psi_S(t)\rangle = U(t)|\Psi_S(t_0)\rangle \equiv U(t)|\Psi_0\rangle, \quad (2.7)$$

δηλαδή να χρησιμοποιηθεί η κυματοσυνάρτηση το μακρινό παρελθόν και ένας μοναδιαίος (unitary) τελεστής, ο $U(t)$, που ονομάζεται **τελεστής εξέλιξης**. Φυσικά, $U^\dagger(t) = U^{-1}(t)$, διότι αυτό σημαίνει μοναδιαίος τελεστής. Τα στοιχεία πίνακα, όπως π.χ. το $\langle \Psi_S(t)|\hat{A}_S|\Psi_S(t)\rangle$, που συνδέονται άμεσα με παρατηρήσιμα μεγέθη (π.χ. το τετράγωνο του μέτρου του δίνει την αναμενόμενη τιμή του μεγέθους A) μπορεί να έχουν χρονική εξάρτηση, η οποία όμως περιγράφεται εξ ολοκλήρου από την κυματοσυνάρτηση και όχι, για παράδειγμα, από τον τελεστή \hat{A}_S .

Αν συνδυάσουμε την εξίσωση (2.6) με τη σχέση $|\Psi_S(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle$ και θεωρήσουμε ότι η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων $|\Psi_0\rangle$, παίρνουμε μια εξίσωση για τον τελεστή:

$$i\frac{d}{dt}U(t) = (\hat{H}_{0S} + \hat{H}'_S)U(t) = \hat{H}_S U(t). \quad (2.8)$$

Σημειώνουμε ότι, αν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη από το χρόνο, η εξίσωση μπορεί να λυθεί. Προκύπτει ότι:

$$U(t) = e^{-i\hat{H}_S(t-t_0)}. \quad (2.9)$$

2.1.2 Εικόνα του Heisenberg

Θα μπορούσε κανείς να αντιστρέψει την $|\Psi_S(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle$ και να συμπεράνει ότι

$$|\Psi_0\rangle = U^{-1}(t)|\Psi_S(t)\rangle = U^\dagger(t)|\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_0\rangle \equiv |\Psi_H\rangle = U^\dagger(t)|\Psi_S(t)\rangle. \quad (2.10)$$

Δηλαδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή εξέλιξης ώστε να βρούμε μια κυματοσυνάρτηση, την $|\Psi_H\rangle \equiv |\Psi_0\rangle$, η οποία να είναι χρονικά ανεξάρτητη. Φυσικά η χρονική εξάρτηση του συστήματος θα μεταφερθεί στους τελεστές. Ένας εύκολος τρόπος να δει κανείς τον ακριβή τρόπο που αυτό γίνεται είναι να επικαλεστεί το γεγονός ότι τα στοιχεία πίνακα δεν πρέπει να εξαρτώνται από τη διατύπωση, την οποία χρησιμοποιούμε. Άρα

$$\langle \Psi_S(t) | \hat{A}_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_0 | U^\dagger(t) \hat{A}_S U(t) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_H | \hat{A}_H(t) | \Psi_H \rangle, \quad (2.11)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτοποίηση $|\Psi_H\rangle \equiv |\Psi_0\rangle$ και τον επί πλέον ορισμό:

$$\hat{A}_H(t) \equiv U^\dagger(t) \hat{A}_S U(t). \quad (2.12)$$

Είναι σαφές ότι ο νέος τελεστής για το μέγεθος A εξαρτάται από το χρόνο, ακόμα και αν ο αρχικός αντίστοιχος τελεστής του Schrödinger ήταν χρονοανεξάρτητος. Οι νέοι τελεστές και οι νέες κυματοσυναρτήσεις συναποτελούν την εικόνα του Heisenberg. Η εξίσωση του Schrödinger για τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης προφανώς δεν έχει πια νόημα, αφού η χρονική εξάρτηση έχει μεταφερθεί στους τελεστές. Τη θέση της παίρνει μια εξίσωση για τη χρονική εξέλιξη των τελεστών. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.8) και (2.12) είναι απλό να δούμε ότι:

$$i \frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \hat{H}_H] + iU^\dagger(t) \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t} U(t). \quad (2.13)$$

Σημειώνουμε ότι για χρονοανεξάρτητη Χαμιλτονιανή \hat{H}_S του Schrödinger μπορούμε εύκολα να δούμε, χρησιμοποιώντας τη λύση (2.9), ότι

$$\hat{H}_H = \hat{H}_S. \quad (2.14)$$

2.1.3 Εικόνα της αλληλεπίδρασης

Η εικόνα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι μια κατά κάποιον τρόπο ενδιάμεση μεταξύ των εικόνων Schrödinger και Heisenberg. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η Χαμιλτονιανή αποτελείται από ένα κομμάτι (το \hat{H}_0), του οποίου η λύση είναι εύκολη και από το υπόλοιπο. Ορίζουμε τον τελεστή εξέλιξης που έχει να κάνει μ' αυτό το κομμάτι μόνο, δηλαδή ικανοποιεί, αντί για την (2.8), την

$$i \frac{d}{dt} U_0(t) = \hat{H}_{0I} U_0(t). \quad (2.15)$$

με αντίστοιχη λύση την

$$U_0(t) = e^{-i\hat{H}_{0S}(t-t_0)}. \quad (2.16)$$

Αυτή η λύση ισχύει μόνο για χρονικά ανεξάρτητη \hat{H}_{0S} , η οποία πάντως είναι η πιο συνηθισμένη περίπτωση.

Γράφουμε τον τελεστή χρονική εξέλιξης $U(t)$, που χρησιμοποιήσαμε στις δύο προηγούμενες εικόνες, με τη μορφή:

$$U(t) = U_0(t)U_I(t) \Rightarrow U_I(t) = U_0^\dagger(t)U(t).$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$|\Psi_S(t)\rangle = U_0(t)U_I(t)|\Psi_0\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = U_0(t)|\Psi_I(t)\rangle,$$

όπου έχουμε ορίσει την νέα κυματοσυνάρτηση:

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv U_I(t)|\Psi_0\rangle = U_0^\dagger(t)|\Psi_S(t)\rangle.$$

Η ισότητα $|\Psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t)|\Psi_S(t)\rangle$ είναι ακριβώς ανάλογη της (2.10), μόνο που ο τελεστής $U(t)$ έχει αντικατασταθεί με τον $U_0(t)$. Κατ' αναλογία με την εικόνα του Heisenberg υιοθετούμε τους ορισμούς των τελεστών στην εικόνα της αλληλεπίδρασης:

$$\hat{A}_I(t) \equiv U_0^\dagger(t)\hat{A}_S U_0(t). \quad (2.17)$$

(Αντίστοιχα με πριν, είναι εύκολο σ' αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιώντας τη λύση (2.16), να δει κανείς ότι $\hat{H}_{0I} = \hat{H}_{0S}$.) Συνδυάζοντας τους ορισμούς αυτούς με την (2.15) και κάποιες σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης για την κυματοσυνάρτηση και τους τελεστές:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_I(t)\rangle = \hat{H}'_I|\Psi_I(t)\rangle, \quad i\frac{d\hat{A}_I}{dt} = [\hat{A}_I, \hat{H}_{0I}] + iU_0^\dagger(t)\frac{\partial\hat{A}_I}{\partial t}U_0(t) \quad (2.18)$$

Παρατηρούμε ότι η χρονική εξέλιξη έχει μοιραστεί και στις κυματοσυναρτήσεις και στους τελεστές. Συγκεκριμένα η χρονική εξάρτηση των τελεστών διέπεται από το ελεύθερο κομμάτι \hat{H}_{0I} της Χαμιλτονιανής, ενώ των κυματοσυναρτήσεων από το κομμάτι αλληλεπίδρασης, το \hat{H}'_I . Σημειώνουμε ότι $\hat{H}_{0I}(t) \equiv U_0^\dagger(t)\hat{H}_{0S}U_0(t) = \hat{H}_{0S}$, ενώ $\hat{H}'_I(t) \equiv U_0^\dagger(t)\hat{H}'_S U_0(t)$. Η εικόνα αυτή είναι πολύ χρήσιμη στην κβαντική θεωρία πεδίου, αλλά και σε πιο στοιχειώδη προβλήματα, όπως η κβαντική αντιμετώπιση της ακτινοβολίας των ατόμων.

Πρέπει να πούμε ότι η εξίσωση για την κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$i\frac{d}{dt}U_I(t)|\Psi_0\rangle = \hat{H}'_I U_I(t)|\Psi_0\rangle. \quad (2.19)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε απ' αυθείας τον τελεστή $U(t)$ συναρτήσει της $\hat{H}'_I(t)$. Αφού οι αρχικές κυματοσυναρτήσεις $|\Psi_0\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα συναρτήσεων, η εξίσωση αναβαθμίζεται σε εξίσωση για τους τελεστές και όχι απλά για τις κυματοσυναρτήσεις, δηλαδή γράφεται:

$$i\frac{d}{dt}U_I(t) = \hat{H}'_I(t)U_I(t). \quad (2.20)$$

Τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.20) δρούν πάνω σε ελεύθερες κυματοσυναρτήσεις. Οι κυματοσυναρτήσεις στην εικόνα της αλληλεπίδρασης θα ήταν οι κυματοσυναρτήσεις του συστήματος αν αυτό είχε αφαιρεθεί να εξελιχθεί χωρίς την παρουσία της αλληλεπίδρασης. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$\langle \Psi_0 | \hat{H}'_I(t) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_I(t) | \hat{H}'_S | \Psi_I(t) \rangle, \quad (2.21)$$

δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της \hat{H}'_I στις αρχικές αδιατάραχτες συναρτήσεις ισούται με την αναμενόμενη τιμή της \hat{H}'_S στις εξελιγμένες αδιατάραχτες συναρτήσεις.

2.2 Ακτινοβολία: παράδειγμα χρήσης της εικόνας αλληλεπίδρασης.

Θεωρούμε ότι είναι γνωστές οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του ελεύθερου κομματιού της Χαμιλτονιανής:

$$\hat{H}_{0S} |\chi_k\rangle = E_k^0 |\chi_k\rangle. \quad (2.22)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις $|\chi_k\rangle$ θα μπορούσαν να είναι αρκετά περίπλοκες. Αν το πρόβλημα αναφέρεται σε ακτινοβολία ατόμων, θα είναι οι γνωστές κυματοσυναρτήσεις του ατόμου (του υδρογόνου, για παράδειγμα) και τα k θα είναι η τετράδα κβαντικών αριθμών (n, l, m_l, m_s) . Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση $i \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \hat{H}'_I |\Psi_I(t)\rangle$ με τα $\langle \chi_m |$ από αριστερά, οπότε:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle \chi_m | \Psi_I(t) \rangle &= \langle \chi_m | \hat{H}'_I | \Psi_I(t) \rangle \\ \Rightarrow i \frac{d}{dt} \langle \chi_m | \Psi_I(t) \rangle &= \sum_p \langle \chi_m | \hat{H}'_I | \chi_p \rangle \langle \chi_p | \Psi_I(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

όπου στο τελευταίο βήμα έχουμε εισαγάγει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων της \hat{H}_{0S} στο δεύτερο μέλος. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\langle \chi_m | \Psi_I(t) \rangle = c_m(t)$ και την ισότητα

$$\hat{H}'_I(t) \equiv U_0^\dagger(t) \hat{H}'_S U_0(t) = e^{+i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} \hat{H}'_S e^{-i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} \quad (2.24)$$

καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$i \frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_p \langle \chi_m | e^{+i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} \hat{H}'_S e^{-i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} | \chi_p \rangle \langle \chi_p | \Psi_I(t) \rangle \Rightarrow \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow i \frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_p e^{-i(E_p^0 - E_m^0)(t-t_0)} \langle \chi_m | \hat{H}'_S | \chi_p \rangle c_p(t), \quad (2.26)$$

όπου αξιοποιήσαμε την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\hat{H}_{0S} |\chi_k\rangle = E_k^0 |\chi_k\rangle \Rightarrow e^{-i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} |\chi_k\rangle = e^{-iE_k^0(t-t_0)} |\chi_k\rangle,$$

και τη συζυγή της:

$$\langle \chi_k | \hat{H}_{0S} = E_k^0 \langle \chi_k | \Rightarrow \langle \chi_k | e^{+i\hat{H}_{0S}(t-t_0)} = e^{+iE_k^0(t-t_0)} \langle \chi_k |.$$

Η εξίσωση (2.26) είναι εκείνη που εμφανίζεται συνήθως σε βιβλία στοιχειώδους Κβαντικής Μηχανικής υπό τον τίτλο της *χρονικά εξαρτημένης θεωρίας διαταραχών*.

2.3 Λύση της εξίσωσης $i\frac{d}{dt}U_I(t) = \hat{H}'_I(t)U_I(t)$: Ανάπτυγμα του Dyson

Το επόμενο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι η λύση της εξίσωσης (2.20) για τον τελεστή εξέλιξης. Αν ήταν μια συνηθισμένη διαφορική εξίσωση, η λύση της θα ήταν απλή:

$$i\frac{d}{dt}U_I(t) = \hat{H}'_I(t)U_I(t) \Rightarrow U_I(t) = e^{-i\int_{t_0}^t dt' H'_I(t')}. \quad (2.27)$$

Όμως δεν είναι συνηθισμένη διαφορική εξίσωση, υπό την έννοια ότι περιλαμβάνει τελεστές, όπως ο $\hat{H}'_I(t)$, οι οποίοι γενικά δεν μετατίθενται μεταξύ τους, αν αναφέρονται για παράδειγμα σε διαφορετικούς χρόνους. Η λύση, λοιπόν, απαιτεί περισσότερη προσοχή. Θα καταλήξουμε σε κάτι που θα έχει κοινά στοιχεία με τη λύση (2.27), αλλά θα έχει και διαφορές.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι η διαφορική εξίσωση (2.20) είναι ισοδύναμη με μια ολοκληρωτική εξίσωση, την:

$$U_I(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{H}'_I(t_1) U_I(t_1), \quad (2.28)$$

όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει εύκολα, παραγωγίζοντας την τελευταία και ελέγχοντας την οριακή συνθήκη. Η ολοκληρωτική εξίσωση είναι ακριβής (αφού δεν περιλαμβάνει καμιά προσέγγιση) αλλά μάλλον άχρηστη, αφού ο άγνωστος $U_I(t_1)$ περιλαμβάνεται στο δεύτερο μέλος. Μπορεί, παρ' όλ' αυτά, να γίνει η βάση για την επινόηση μιας λύσης με τη χρήση της εξής επαναληπτικής μεθόδου: αντικαθιστούμε στο δεξί μέλος της εξίσωσης το $U_I(t_1)$ με $1 - i \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_2) U_I(t_2)$, δηλαδή με το δεξί μέλος της ίδιας της εξίσωσης. Το αποτέλεσμα είναι:

$$U_I(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{H}'_I(t_1) \left[1 - i \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_2) U_I(t_2) \right] \quad (2.29)$$

$$= 1 - i \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{H}'_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_2) U_I(t_2). \quad (2.30)$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον προκύπτει η σχέση:

$$U_I(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{k-1}} dt_k \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_k). \quad (2.31)$$

Μπορεί κανείς αυτή τη λύση να την εκφράσει μ' έναν πολύ συμπαγή και κομψό τρόπο. Θα χρειαστούμε τον ορισμό του χρονολογικού γινομένου τελεστών. Ορίζουμε ως **χρονολογικό γινόμενο** T των τελεστών το γινόμενό τους με τέτοια σειρά που ο τελεστής που έχει τον πιο μεγάλο χρόνο να βρίσκεται στην άκρη αριστερά, ο τελεστής με τον αμέσως μικρότερο χρόνο να βρίσκεται δεξιά του κ.ο.κ., με τελευταίον δεξιά τον τελεστή με το μικρότερο χρόνο. Δηλαδή αριστερά θα βρίσκονται οι πιο πρόσφατοι χρόνοι και θα ακολουθούν κατά σειρά οι παλιότεροι. Παραδείγματος χάριν, αν $t_1 > t_2$, τότε

$$T[\phi(t_1)\phi(t_2)] = \phi(t_1)\phi(t_2), \quad T[\phi(t_2)\phi(t_1)] = \phi(t_1)\phi(t_2), \quad t_1 > t_2. \quad (2.32)$$

Επίσης, αν $t_1 > t_2 > t_3$, τότε:

$$T[\phi(t_3)\phi(t_1)\phi(t_2)] = \phi(t_1)\phi(t_2)\phi(t_3), \quad t_1 > t_2 > t_3,$$

$$T[\phi(t_2)\phi(t_3)\phi(t_1)] = \phi(t_1)\phi(t_2)\phi(t_3), \quad t_1 > t_2 > t_3.$$

(Σημειώνουμε εδώ ότι μιλάμε για μποζονικά πεδία. Για φερμιονικά πεδία ο ορισμός είναι παρόμοιος, αλλά εμφανίζονται και αρνητικά πρόσημα, για ορισμένες αναδιατάξεις. Δεν θα επιμείνουμε σ' αυτό το θέμα.) Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 T[\hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2)].$$

Αυτό δέχεται δύο ειδών συνεισφορές: υπάρχει περίπτωση το t_1 να είναι μεγαλύτερο από το t_2 , οπότε αυτή η συνεισφορά μπορεί να γραφτεί $\frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2)$. Επίσης, υπάρχει περίπτωση το t_2 να είναι μεγαλύτερο από το t_1 , οπότε αυτή η συνεισφορά μπορεί να γραφτεί $\frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \hat{H}'_I(t_2)\hat{H}'_I(t_1)$. Τελικά:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 T[\hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2)] \\ &= \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2) + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \hat{H}'_I(t_2)\hat{H}'_I(t_1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα ταυτίζεται με το πρώτο, αν εναλλάξουμε τα t_1 και t_2 . Άρα

$$\frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 T[\hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2)] = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_1)\hat{H}'_I(t_2). \quad (2.34)$$

Άρα, με τη βοήθεια του χρονολογικού γινομένου, μπορούμε να επεκτείνουμε την ολοκλήρωση σε ολόκληρο το πεδίο $(-\infty, t)$ και δεν είναι υποχρεωτικό να προσέχουμε τα όρια των ολοκληρωμάτων σε κάθε μια συνιστώσα της πολλαπλής ολοκλήρωσης. Φυσικά, πρέπει να διαιρέσουμε με $2!$, από τη στιγμή που επεκτείνουμε το πεδίο ολοκλήρωσης. Όλα αυτά ισχύουν για k -πλό ολοκλήρωμα κι όχι μόνο για διπλό,

μόνο που πρέπει να διαιρέσουμε με $k!$ αυτή τη φορά. Τελικά ο τελεστής εξελίξης γράφεται:

$$U_I(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{k-1}} dt_k T [\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_k)]. \quad (2.35)$$

Η σχέση αυτή λέγεται ανάπτυγμα του Dyson και γράφεται συχνά με τη συμπαγή μορφή

$$U_I(t) = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^t dt' \hat{H}'_I(t') \right) \right], \quad (2.36)$$

όπου το νόημα αυτής της έκφρασης είναι ακριβώς η (2.35). Βλέπουμε ότι, όπως είχαμε αναγγείλλει, η λύση μοιάζει από κάποιες απόψεις με την απλοϊκή λύση (2.27), αλλά υπάρχει το νέο στοιχείο του χρονολογικού γινομένου. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η σειρά δεν είναι βέβαιον ότι συγκλίνει, οπότε η όλη κατασκευή μπορεί να τεθεί σε αμφισβήτηση. Το πιθανότερο είναι ότι είναι ασυμπτωτική και όχι συγκλίνουσα σειρά για τις πιο πολλές θεωρίες. Πάντως, η λύση αυτή εμφανίζει εκπληκτική συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα και αυτή είναι η πιο σημαντική συνηγορία υπέρ της κβαντικής θεωρίας πεδίου, παρά το ότι έχει σοβαρά μαθηματικά προβλήματα.

2.3.1 Πίνακας σκέδασης

Ο πίνακας σκέδασης (S-matrix) είναι το όριο του $U_I(t)$ για μεγάλους χρόνους:

$$\hat{S} = \lim_{t \rightarrow \infty} U_I(t) = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \hat{H}'_I(t') \right) \right]. \quad (2.37)$$

Είναι αντικείμενο πολύ μεγάλης σημασίας για τη σύγκριση θεωρίας και πειράματος, αφού προσομοιώνει τις περισσότερες αντιδράσεις στοιχειωδών σωματιδίων: πριν την αντίδραση τα σωματίδια είναι ουσιαστικά ελεύθερα και περιγράφονται από τις χρονο-ανεξάρτητες κυματοσυναρτήσεις $|\Psi_i\rangle$ (που ανήκουν στο σύνολο που συμβολίσαμε προηγουμένως με $|\Psi_0\rangle$), στη συνέχεια εξελίσσονται μέσω μιας σύντομης αλληλεπίδρασης στις καταστάσεις $U_0(t)U_I(t)|\Psi_i\rangle$ και το κεντρικό ερώτημα είναι να προσδιοριστεί η προβολή τους στις εξελιγμένες καταστάσεις $\langle \Psi_f | U_0^\dagger(t)$ που δίνεται από την έκφραση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Psi_f | U_0^\dagger(t) U_0(t) U_I(t) | \Psi_i \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Psi_f | U_I(t) | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \hat{S} | \Psi_i \rangle \equiv S_{fi}, \quad (2.38)$$

που είναι το στοιχείο του τελεστή σκέδασης μεταξύ ελεύθερων καταστάσεων. Για να υπολογίσουμε αυτό το στοιχείο πίνακα το συνηθέστερο μέσο είναι η θεωρία διαταραχών: αναπτύσσουμε το εκθετικό στην εξίσωση (2.37) μέχρι δεύτερη τάξη, με

τη βοήθεια, επίσης, της (2.35):

$$\hat{S} = 1 + (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt T [\hat{H}'_I(t_1)] + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T [\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2)]. \quad (2.39)$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν περιοριστούμε σε όρους το πολύ δεύτερης τάξης (η τάξη υπολογίζεται ως η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η σταθερά ζεύξης που βρίσκεται μέσα στη Χαμιλτονιανή), το στοιχείο πίνακα θα αποτελείται από τρεις κατ' αρχήν όρους:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\approx \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle \\ &+ (-i) \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}'_I(t) | \Psi_i \rangle \\ &+ \frac{(-i)^2}{2!} \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T [\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2)] | \Psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Βέβαια, συνήθως η Χαμιλτονιανή εκφράζεται ως το ολοκλήρωμα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας:

$$\hat{H}'_I(t) = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}'_I(t, \vec{x}) \equiv \int d^3x \hat{\mathcal{H}}'_I(x), \quad (2.41)$$

οπότε η σχέση που δίνει το στοιχείο του πίνακα σκέδασης σε δεύτερη τάξη γράφεται:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\approx \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle \\ &+ (-i) \langle \Psi_f | \int d^4x \hat{\mathcal{H}}'_I(t, \vec{x}) | \Psi_i \rangle \\ &+ \frac{(-i)^2}{2!} \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 T [\hat{\mathcal{H}}'_I(t_1, \vec{x}_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(t_2, \vec{x}_2)] | \Psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Το πρόβλημά μας ανάγεται στον υπολογισμό του (2.42), εφόσον περιοριζόμαστε στη δεύτερη τάξη. Η γενίκευση σε ανώτερες τάξεις γίνεται παρόμοια.

2.3.2 Κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις

Όπως περιγράψαμε μόλις, για να σχηματίσουμε το στοιχείο του πίνακα σκέδασης, μας χρειάζονται εκφράσεις για τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν τις ελεύθερες καταστάσεις, την $|\Psi_i\rangle$ και την $\langle \Psi_f|$. Πρόκειται για καταστάσεις που σε πολύ καλή προσέγγιση χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένη τιμή της ορμής.

Θα θεωρήσουμε προς το παρόν βαθμωτά πεδία, που είναι και τα απλούστερα. Μιά πρώτη ιδέα θα ήταν να ορίσουμε τις ιδιοκαταστάσεις της ορμής μέσω σχέσεων της μορφής: $|\chi(\vec{p})\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$. (Σημειώνουμε εδώ ότι αναφερόμαστε μόνο στη χωρική ορμή και όχι στο τετράνυσμα της ορμής, γιατί μιλάμε για ελεύθερα σωματίδια, οπότε η ενέργεια προσδιορίζεται απολύτως από τη χωρική ορμή: $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.) Όμως μια τέτοια προσέγγιση του προβλήματος έχει διάφορα προβλήματα:

(1) Μπορεί να δεί κανείς ότι ο τελεστής δημιουργίας έχει διάσταση μάζας $-3/2$, οπότε οι καταστάσεις $|\chi(\vec{p})\rangle$ ενός σωματιδίου έχουν διαφορετικές διαστάσεις από την κατάσταση του κενού. Συνεχίζοντας, οι καταστάσεις δύο σωματιδίων $|\chi(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle$ θα έχουν διαστάσεις διαφορετικές από το κενό και από τις καταστάσεις ενός σωματιδίου και ούτω καθεξής, οπότε θα έχουμε δυσκολίες να σχηματίσουμε υπερθέσεις καταστάσεων με διαφόρους αριθμούς σωματιδίων, δηλαδή τελικά να ορίσουμε τον λεγόμενο χώρο του Fock. Μια δυνατή λύση του προβλήματος είναι να θεωρήσουμε ότι το σύστημα που εξετάζουμε περιέχεται σ' έναν όγκο V , τον οποίο θα στείλουμε στο άπειρο όταν ολοκληρώσουμε τους υπολογισμούς μας. Ο όγκος έχει διαστάσεις, οπότε, αλλάζοντας την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης, μπορούμε να ορίσουμε:

$$|\chi(\vec{p})\rangle \equiv \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle, \quad \langle \chi(\vec{p})| \equiv \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0|a(\vec{p}). \quad (2.43)$$

Ο παράγοντας $\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}$ έχει διάσταση μάζας $+3/2$, οπότε απαλείφει το $-3/2$ του τελεστή δημιουργίας (ή καταστροφής, αντίστοιχα) και η κατάσταση $|\chi(\vec{p})\rangle$ θα έχει τις ίδιες διαστάσεις με το κενό. Επίσης, οι καταστάσεις δύο, τριών ή περισσότερων σωματιδίων θα έχουν την ίδια διάσταση με το κενό, οπότε η κατασκευή του χώρου του Fock δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.

(2) Ας υπολογίσουμε την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης, στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως:

$$\begin{aligned} \langle \chi(\vec{p}_1)|\chi(\vec{p}_2)\rangle &= \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0|a(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle \\ &= \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0|[a(\vec{p}_1), a^\dagger(\vec{p}_2)]|0\rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Υπάρχει εδώ μια πηγή πιθανού προβλήματος: αν οι δύο ορμές είναι ίσες, προκύπτει ότι

$$\langle \chi(\vec{p})|\chi(\vec{p})\rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^{(3)}(\vec{0}). \quad (2.45)$$

Φαίνεται άπειρο, όμως αυτό δεν έχει να κάνει με την κβαντική θεωρία πεδίου. Στην πραγματικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι ιδιοκαταστάσεις ορμής είναι επίπεδα κύματα. Ήδη στη γνωστή μας Κβαντική Μηχανική οι **ιδιοκαταστάσεις ορμής** δίνονται από τη σχέση

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}},$$

οπότε το εσωτερικό γινόμενο δύο τέτοιων κυματοσυναρτήσεων είναι:

$$\langle \tilde{\psi}(\vec{p})|\tilde{\psi}(\vec{p}')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'),$$

όπου είναι σαφές ότι για $\vec{p} = \vec{p}'$ εμφανίζεται πάλι αυτό το άπειρο με τη μορφή του $\delta^{(3)}(\vec{0})$. Ήδη σε επίπεδο κβαντικής μηχανικής, αντί να κατασκευάσει κανείς ένα πεπερασμένο κυματοπακέτο με πεπερασμένο μέτρο, μπορεί να χρησιμοποιήσει το τέχνασμα που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως, δηλαδή να κλείσει το σύστημα στον πεπερασμένο όγκο V με περιοδικές οριακές συνθήκες. Τότε η συνάρτηση δέλτα είναι το όριο του ολοκληρώματος σ' αυτόν τον πεπερασμένο χώρο:

$$\delta^{(3)}(\vec{p}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}, \quad (2.46)$$

οπότε για την επίμαχη τιμή $\vec{p} = \vec{0}$ προκύπτει:

$$\delta^{(3)}(\vec{0}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r = \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (2.47)$$

Φυσικά απειρίζεται για άπειρο όγκο. Με βάση τα προηγούμενα, η εξίσωση (2.45) συνεπάγεται ότι

$$\langle \chi(\vec{p}) | \chi(\vec{p}) \rangle = 1 \quad (2.48)$$

αν θεωρήσουμε το σύστημα εγκλωβισμένο στον όγκο V , τον οποίο θα στείλουμε στο άπειρο στο τέλος των υπολογισμών. Η κανονικοποίηση παραμένει πεπερασμένη σ' αυτό το όριο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι με την επιλογή (2.43) λύσαμε και τα δύο προβλήματα: **οι κυματοσυναρτήσεις (2.43) έχουν όλες τις ίδιες μονάδες και είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα.**

Θα δούμε ότι είναι απαραίτητη η σχέση

$$\boxed{\langle 0 | \hat{\Phi}(\vec{r}) | \chi(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}V}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}.} \quad (2.49)$$

Αυτή η σχέση δείχνει μεταξύ άλλων και τη σχέση των τελεστών πεδίου και των καταστάσεων ενός σωματιδίου με τις συνηθισμένες κυματοσυναρτήσεις. Η απόδειξη είναι απλή, αν χρησιμοποιήσει κανείς τον ως άνω ορισμό της $|\chi(\vec{p})\rangle$ και το ανάπτυγμα του τελεστή $\hat{\Phi}(\vec{r})$ του πεδίου σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.

Είναι χρήσιμο να παραθέσουμε τις σχέσεις για το μετασχηματισμό του Fourier, όταν χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένο τρισδιάστατο όγκο V αντί για άπειρο:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \tilde{f}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}, \quad p_k = \frac{2\pi}{N_k} n_k, \quad n_k = 1, \dots, N_k, \quad V \equiv N_1 N_2 N_3 \quad (2.50)$$

$$\tilde{f}(\vec{p}) = \int d^3 r f(\vec{r}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}}, \quad \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \leftrightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}}. \quad (2.51)$$

2.4 Παράδειγμα: Σκέδαση δύο μποζονίων

Στις σημειώσεις αυτές δεν προσπαθούμε να δώσουμε μια αυστηρή ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Εκείνο που θα κάνουμε, αρχίζοντας από αυτήν την παράγραφο, θα είναι να δώσουμε μερικά παραδείγματα του πώς υπολογίζονται οι ενεργοί διατομές σε συγκεκριμένες διαδικασίες. Το καλύτερο είναι να ξεκινήσει κανείς τη μελέτη από τα βαθμωτά σωματίδια, ώστε να αποφύγει τις επιπλοκές που οφείλονται στο σπιν. Θα ξεκινήσουμε μ' ένα πρότυπο που περιλαμβάνει τρία διαφορετικά βαθμωτά πραγματικά (αφόρτιστα) πεδία, τα ϕ , χ και ψ , που η δυναμική τους περιγράφεται από τη δράση:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\chi} \partial^\mu \hat{\chi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\psi} \partial^\mu \hat{\psi} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_\chi^2 \hat{\chi}^2 + \frac{1}{2} m_\psi^2 \hat{\psi}^2 - g \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) \right]. \quad (2.52)$$

Θα περιοριστούμε στη σκέδαση ενός μποζονίου ϕ με ορμή p_ϕ και ενός μποζονίου χ με ορμή p_χ . Μετά την αλληλεπίδραση οι ορμές θα αλλάξουν και θα γίνουν p'_ϕ και p'_χ αντίστοιχα. Τα αρχικά και τα τελικά σωματίδια θα είναι ελεύθερα, αφού θα έχουν πια απομακρυνθεί από την περιοχή της αλληλεπίδρασης. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν προηγουμένως, η αρχική κυματοσυνάρτηση εκφράζεται ως

$$|\Psi_i\rangle = |\phi(\vec{p}_\phi) \chi(\vec{p}_\chi)\rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) |0\rangle, \quad (2.53)$$

ενώ η τελική κυματοσυνάρτηση εκφράζεται ως:

$$\langle \Psi_f | = \langle \phi(\vec{p}'_\phi) \chi(\vec{p}'_\chi) | \equiv \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) \quad (2.54)$$

Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης θα είναι προφανώς η

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = g \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x). \quad (2.55)$$

Ο πίνακας σκέδασης σε δεύτερη τάξη δίνεται από τη σχέση (2.42), που εξειδικεύεται ως εξής, με βάση τα πιο πάνω:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)}, \\ S_{fi}^{(0)} &= \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle = \frac{(2\pi)^6}{V^2} \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle, \quad (2.56) \\ S_{fi}^{(1)} &= (-i) \int d^4x \langle \Psi_f | \hat{\mathcal{H}}_I(x) | \Psi_i \rangle = \\ &= -ig \frac{(2\pi)^6}{V^2} \int d^4x \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle, \quad (2.57) \\ S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 T [\hat{\mathcal{H}}_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}_I(x_2)] | \Psi_i \rangle \end{aligned}$$

$$= -\frac{g^2 (2\pi)^6}{2 V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2$$

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\chi}(x_1) \hat{\psi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\chi}(x_2) \hat{\psi}(x_2)] a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle . \quad (2.58)$$

2.5 Θεώρημα του Wick

Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος του Wick δεν πρόκειται να μας απασχολήσει εδώ. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να το βρει σε οποιοδήποτε βιβλίο Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Θα αναφέρουμε μόνο κάποιες εφαρμογές του, ώστε ο αναγνώστης να δει τη λειτουργία του στην πράξη. Στην προηγούμενη παράγραφο καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός των διαδοχικών προσεγγίσεων στον πίνακα σκέδασης ανάγεται στον υπολογισμό των στοιχείων πίνακα

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle ,$$

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle$$

και

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\chi}(x_1) \hat{\psi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\chi}(x_2) \hat{\psi}(x_2)] a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle .$$

Θα χρειαστούμε την έννοια της σύναψης (contraction): **σύναψη δύο τελεστών είναι η αναμενόμενη τιμή στο κενό του χρονολογικού γινομένου των τελεστών**, δηλαδή η σύναψη των τελεστών \hat{A} και \hat{B} ισούται εξ ορισμού με $\langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle$. Η διατύπωση του θεωρήματος του Wick που θα υιοθετήσουμε εδώ είναι ότι **οι αναμενόμενες τιμές στο κενό ενός γινομένου τελεστών είναι το άθροισμα των γινομένων των συνάψεων των εμπλεκόμενων τελεστών ανά δύο με όλους τους δυνατούς τρόπους.**

Θα το εφαρμόσουμε στον υπολογισμό του $S_{fi}^{(0)}$:

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) | 0 \rangle \langle 0 | a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle .$$

Όμως ο πρώτος όρος μηδενίζεται, αφού ο δεύτερος παράγοντας περιλαμβάνει δύο τελεστές δημιουργίας, οι οποίοι κατασκευάζουν μια κατάσταση με δύο σωματίδια, που είναι ορθογώνια με την κατάσταση του κενού που βρίσκεται αριστερά. (Ανάλογα πράγματα ισχύουν και για τους τελεστές καταστροφής του πρώτου παράγοντα:

δίνουν μηδέν καθώς ενεργούν στο κενό δεξιά). Επίσης, ο τρίτος όρος μηδενίζεται, όπως πρέπει να καταλαβαίνει ο αναγνώστης. Απομένει, λοιπόν, η έκφραση:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(0)} &= \frac{(2\pi)^6}{V^2} \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \\ &= \frac{(2\pi)^6}{V^2} \delta^{(3)}(\vec{p}_\phi - \vec{p}'_\phi) \delta^{(3)}(\vec{p}_\chi - \vec{p}'_\chi). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι πρόκειται για την τετριμμένη περίπτωση που ένα πεδίο ϕ δεν αλληλεπιδρά καθόλου και αναδύεται αυτούσιο ως τελικό προϊόν με την ίδια ορμή (αυτό εκφράζει η αντίστοιχη συνάρτηση δέλτα), ενώ τα αντίστοιχα ισχύουν και για το πεδίο χ και τη δική του ορμή. Το διάγραμμα που ακολουθεί θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει αυτήν την περίπτωση.

$$\vec{p}_\phi \longrightarrow \vec{p}'_\phi$$

$$\vec{p}_\chi \longrightarrow \vec{p}'_\chi$$

Θα σχολιάσουμε τώρα τον $S_{fi}^{(1)}$. Το στοιχείο πίνακα

$$\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle$$

περιλαμβάνει περιττό αριθμό τελεστών, ενώ για το σχηματισμό κάποιου αριθμού μη μηδενικών συνάψεων απαιτείται άρτιος αριθμός (η κάθε σύναψη απαιτεί δύο τελεστές). Με άλλα λόγια, πάντα θα εμφανίζεται η αναμενόμενη τιμή στο κενό ενός μοναχικού τελεστή, η οποία είναι, βέβαια, μηδέν. Τελικά δηλαδή ο $S_{fi}^{(1)}$ ισούται με μηδέν: δεν υπάρχει συνεισφορά πρώτης τάξης ως προς το g σ' αυτή τη σκέδαση.

Προχωρούμε τέλος στον υπολογισμό του $S_{fi}^{(2)}$. Οι μη μηδενικές συνάψεις για το αντίστοιχο στοιχείο πίνακα θα εμπίπτουν σε μία από τις επόμενες κατηγορίες:

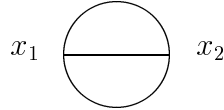
Πρώτη κατηγορία:

$$\begin{aligned} A = & \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \cdot \\ & \cdot \langle 0 | T[\hat{\chi}(x_1) \hat{\chi}(x_2)] | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle + [x_1 \leftrightarrow x_2]. \end{aligned}$$

(Υπάρχει και μια ίση συνεισφορά με τα x_1 και x_2 εναλλαγμένα.) Αυτού του είδους η αλληλεπίδραση μπορεί να αναπαρασταθεί με το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\vec{p}_\phi \longrightarrow \vec{p}'_\phi$$

$$\vec{p}_\chi \longrightarrow \vec{p}'_\chi$$



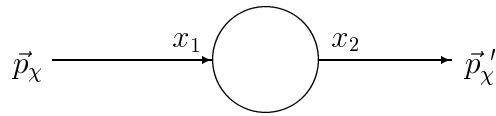
Δηλαδή τα προσπίπτοντα σωματίδια διαδίδονται ελεύθερα, αλλά υπάρχει ένα διάγραμμα κενού, όπως λέγεται, στο οποίο τα πεδία διαδίδονται μεταξύ x_1 και x_2 χωρίς να επηρεάζουν τη σκέδαση. Φυσικά, τα x_1 και x_2 πρέπει στη συνέχεια να ολοκληρωθούν σ' ολόκληρο το χωροχρόνο.

Δεύτερη κατηγορία:

$$B_1 = \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\chi}(x_2) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\chi}(x_1) | 0 \rangle \\ \cdot \{ \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \} + [x_1 \leftrightarrow x_2].$$

Αυτού του είδους η αλληλεπίδραση μπορεί να αναπαρασταθεί με το εξής διάγραμμα:

$$\vec{p}_\phi \longrightarrow \vec{p}'_\phi$$



Εκείνο που συμβαίνει είναι ότι το πεδίο ϕ προσπίπτει και αναδύεται στο τέλος ως εξερχόμενο σωματίδιο χωρίς να αλληλεπιδράσει καθόλου, φυσικά με την ίδια ορμή ($\vec{p}'_\phi = \vec{p}_\phi$). Αντίθετα το πεδίο χ προσπίπτει, διαδίδεται μέχρι το x_1 και εκεί συμβαίνει μια πρώτη αλληλεπίδραση, την οποία παραστατικά θα μπορούσαμε να περιγράψουμε ως γένεση ενός ζεύγους σωματιδίων ϕ και ψ , με παράλληλη καταστροφή του χ . Τα παραγόμενα σωματίδια ϕ και ψ διαδίδονται μέχρι το σημείο x_2 (τα αντίστοιχα πλάτη διάδοσης αναπαρίστανται από τους παράγοντες $\langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle$ και $\langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle$), όπου συμβαίνει η δεύτερη αλληλεπίδραση: τα δύο σωματίδια

καταστρέφονται και γεννιέται πάλι ένα σωματίδιο ϕ , το οποίο στη συνέχεια διαδίδεται και αναδύεται ως εξερχόμενο με ορμή $\vec{p}'_\chi = \vec{p}_\chi$. Σε αντίθεση με την προηγούμενη κατηγορία, εδώ λειτουργούν οι αλληλεπιδράσεις και επηρεάζουν τη διάδοση του σωματιδίου χ , το οποίο είναι ένα από τα σωματίδια που εμφανίζονται στην αρχική και την τελική κατάσταση, ενώ πριν επηρεαζόταν μόνο το κενό και όχι τα πραγματικά σωματίδια. Περιμένουμε, λοιπόν, ότι, αν κάνουμε λεπτομερειακά τις πράξεις, οι ιδιότητες του σωματιδίου αυτού μπορεί ν' αλλάξουν: θα μπορούσε επί παραδείγματι να αποκτήσει άλλη μάζα από την αρχική, λόγω αυτών των αλληλεπιδράσεων. Όμως, ενώ οι επιπτώσεις των αλληλεπιδράσεων εδώ μπορούν να γίνουν ορατές (και πειραματικά μετρήσιμες), αυτή η κατηγορία δεν μπορούμε να πούμε ότι συνεισφέρει στη σκέδαση αυτή καθαυτή. Για παράδειγμα, το κομμάτι που αναφέρεται στην κίνηση του ϕ δεν συνδέεται με οποιονδήποτε τρόπο με το αντίστοιχο κομμάτι του χ . Οι αλληλεπιδράσεις αυτές απλά αλλάζουν κάτι στο "εσωτερικό" του χ . Το ϕ διαδίδεται ελεύθερα, εντελώς ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στο χ , άρα η αλληλεπίδραση αυτού του είδους δεν επηρεάζει την ίδια τη σκέδαση. Αυτά θα γίνουν πληρέστερα κατανοητά στη συνέχεια, που θα δούμε την τρίτη κατηγορία όπου η επίδραση στη σκέδαση είναι ουσιαστική. Προς το παρόν, θα αναφέρουμε ότι στην παρούσα κατηγορία περιλαμβάνεται μία ακόμα μορφή αλληλεπίδρασης, η οποία είναι κατά κάποιον τρόπο η "συμπληρωματική" της προηγούμενης: ενώ πριν διαδιδόταν ελεύθερα το πεδίο ϕ και η αλληλεπίδραση επηρέαζε μόνο τη διάδοση του πεδίου χ , εδώ θα διαδίδεται ελεύθερα το πεδίο χ , ενώ θα επηρεάζεται η διάδοση του πεδίου ϕ . Η αλληλεπίδραση αυτή είναι η εξής:

$$B_2 = \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\phi}(x_2) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle \cdot \{ \langle 0 | T[\hat{\chi}(x_1) \hat{\chi}(x_2)] | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \} + [x_1 \leftrightarrow x_2].$$

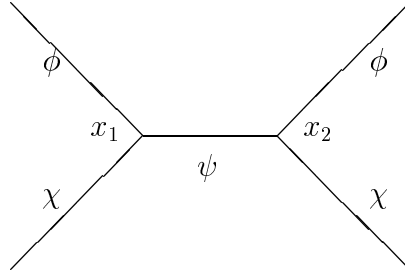
Ουσιαστικά προκύπτει από την $B1$ εναλλάσσοντας τα χ και ϕ .

Τρίτη κατηγορία:

Εδώ εντάσσονται και πάλι δύο αλληλεπιδράσεις. Η πρώτη είναι η εξής:

$$C_1 = [\langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\chi}(x_2) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\phi}(x_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\chi}(x_1) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \} + [x_1 \leftrightarrow x_2],$$

όπου η αγκύλη $[x_1 \leftrightarrow x_2]$ μας λέει ότι πρέπει να προσθέσουμε μια έκφραση που θα προκύψει από την πρώτη με εναλλαγή των x_1 και x_2 . Αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να αναπαρασταθεί με το σχήμα:

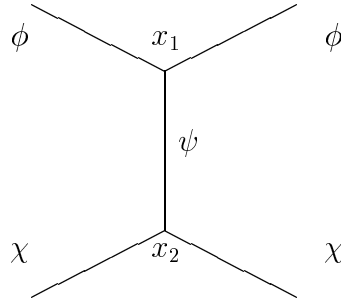


Αυτή η συνεισφορά παριστάνει τα προσπίπτοντα ϕ και χ να δημιουργούν ένα ψ στο x_1 , το οποίο διαδίδεται με πλάτος $\langle 0|T[\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)]|0 \rangle$ μέχρι το x_2 , όπου γεννιούνται πάλι τα ϕ και χ , με διαφορετικές εν γένει ορμές.

Η δεύτερη συνεισφορά έχει μια διαφορετική διάταξη των προσπιπτόντων και των εξερχομένων σωματιδίων:

$$C_2 = [\langle 0|a_\chi(\vec{p}'_\chi)\hat{\chi}(x_2)|0 \rangle \cdot \langle 0|a_\phi(\vec{p}'_\phi)\hat{\phi}(x_1)|0 \rangle \cdot \langle 0|\hat{\phi}(x_2)a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi)|0 \rangle \cdot \langle 0|\hat{\chi}(x_1)a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi)|0 \rangle \cdot \langle 0|T[\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)]|0 \rangle] + [x_1 \leftrightarrow x_2].$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα είναι το εξής:



Αυτή η συνεισφορά παριστάνει το χ να προσπίπτει και να δημιουργεί στο x_1 ένα ϕ , το οποίο αναδύεται ως εξερχόμενο, κι ένα ψ , το οποίο ταξιδεύει μέχρι το x_2 , όπου συνδυάζεται με το προσπίπτον ϕ και δημιουργούν το τελικά εξερχόμενο χ .

Θα ασχοληθούμε εκτενώς μόνο με τις συνεισφορές της τρίτης κατηγορίας, αφού μόνο σ' αυτές εμφανίζεται πραγματική συνεισφορά στη σκέδαση. Δηλαδή από τις συνεισφορές στο $S_{fi}^{(2)}$ θα εξετάσουμε μόνον όσες έχουν να κάνουν με τις C_1 και C_2 :

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)}(C_1) &= \frac{(-i)^2}{2!} \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 T [\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)\hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] | \Psi_i \rangle |_{C_1} \\ &= -\frac{g^2 (2\pi)^6}{2 V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \end{aligned}$$

$$\langle 0|a_\phi(\vec{p}'_\phi)a_\chi(\vec{p}'_\chi)T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\chi}(x_1)\hat{\psi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\chi}(x_2)\hat{\psi}(x_2)]a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi)a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi)|0 \rangle |_{C_1}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g^2 (2\pi)^6}{2 V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \\
&\left\{ \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\chi}(x_2) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\phi}(x_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \right. \\
&\left. \cdot \langle 0 | \hat{\chi}(x_1) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle + [x_1 \leftrightarrow x_2] \right\}. \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Ο όρος $[x_1 \leftrightarrow x_2]$ δίνει ίση συνεισφορά με την πρώτη αγκύλη, αφού ολοκληρώνεται, οπότε μπορούμε να τον παραλείψουμε και να απαλείψουμε και το $\frac{1}{2}$, που πολλαπλασιάζει την ολική συνεισφορά. Βασιζόμενοι στο ανάπτυγμα:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p) e^{ip \cdot x}]$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία που υπεισέρχονται στην πιο πάνω έκφραση:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle &= \frac{e^{-ip_\phi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}}, & \langle 0 | \hat{\chi}(x_1) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle &= \frac{e^{-ip_\chi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi}}} \\
\langle 0 | a_\phi(\vec{p}'_\phi) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle &= \frac{e^{+i\vec{p}'_\phi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}}, & \langle 0 | a_\chi(\vec{p}'_\chi) \hat{\chi}(x_2) | 0 \rangle &= \frac{e^{+i\vec{p}'_\chi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}}} \\
\langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{ip_\psi \cdot (x_1 - x_2)}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.60) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)}(C_1) &= -g^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \int \frac{d^4 p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{ip_\psi \cdot (x_1 - x_2)} \\
&\frac{e^{-ip_\phi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}} \frac{e^{-ip_\chi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi}}} \frac{e^{+i\vec{p}'_\phi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}} \frac{e^{+i\vec{p}'_\chi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}}} \\
&= -g^2 \int \frac{d^4 p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\chi}}} \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 e^{-i(p_\phi + p_\chi - p_\psi) \cdot x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 e^{i(p'_\phi + p'_\chi - p_\psi) \cdot x_2} \\
&= -g^2 \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\chi}}} \\
&\cdot \int \frac{d^4 p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi - p_\phi - p_\chi) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi - p'_\phi - p'_\chi),
\end{aligned}$$

οπότε:

$$S_{fi}^{(2)}(C_1) = -g^2 \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\chi}}}$$

$$\frac{1}{(p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p_\phi' - p_\chi') \quad (2.61)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι ο όρος $+i\epsilon$ μπήκε μόνο για λόγους αρχής. Στην πραγματικότητα δε χρειάζεται σ' αυτήν την περίπτωση, γιατί ο παρονομαστής δεν υπάρχει περίπτωση να μηδενιστεί.

Ακριβώς τα ίδια βήματα πρέπει να ακολουθηθούν για τη συνεισφορά τύπου C_2 . Οι διαφορές είναι ελάχιστες, αλλά, προς χάρη του αναγνώστη που θα ήθελε να παρακολουθήσει τις πράξεις λεπτομερειακά, τις αναπαράγουμε:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)}(C_2) &= \frac{(-i)^2}{2!} \langle \Psi_f | \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 T [\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] | \Psi_i \rangle |_{C_2} \\ &= -\frac{g^2 (2\pi)^6}{2 V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \\ &< 0 | a_\phi(\vec{p}_\phi') a_\chi(\vec{p}_\chi') T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\chi}(x_1) \hat{\psi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\chi}(x_2) \hat{\psi}(x_2)] a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle |_{C_2} \\ &= -\frac{g^2 (2\pi)^6}{2 V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \\ &\quad \left\{ \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi') \hat{\chi}(x_2) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | a_\phi(\vec{p}_\phi') \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \hat{\phi}(x_2) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \right. \\ &\quad \left. \cdot \langle 0 | \hat{\chi}(x_1) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle + [x_1 \leftrightarrow x_2] \right\} . \\ &\langle 0 | \hat{\phi}(x_2) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle = \frac{e^{-ip_\phi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}}, \quad \langle 0 | \hat{\chi}(x_1) a_\chi^\dagger(\vec{p}_\chi) | 0 \rangle = \frac{e^{-ip_\chi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi}}} \\ &\langle 0 | a_\phi(\vec{p}_\phi') \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle = \frac{e^{+i\vec{p}_\phi' \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi'}}}, \quad \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi') \hat{\chi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{e^{+i\vec{p}_\chi' \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi'}}} \\ S_{fi}^{(2)}(C_2) &= -g^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int \frac{d^4p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{ip_\psi \cdot (x_1 - x_2)} \\ &\quad \frac{e^{-ip_\phi \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}} \frac{e^{-ip_\chi \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi}}} \frac{e^{+i\vec{p}_\phi' \cdot x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\phi'}}} \frac{e^{+i\vec{p}_\chi' \cdot x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_\chi'}}} \\ &= -g^2 \int \frac{d^4p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi'}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi'}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi'}}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 e^{-i(-p_\phi' + p_\chi - p_\psi) \cdot x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 e^{+i(-p_\phi + p_\chi' - p_\psi) \cdot x_2} \\ &= -g^2 \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi'}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi'}}} \\ &\quad \cdot \int \frac{d^4p_\psi}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_\phi' - p_\chi) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_\phi - p_\chi'), \end{aligned}$$

δηλαδή, τελικά:

$$S_{fi}^{(2)}(C_2) = -g^2 \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi'}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi'}}} \cdot \frac{1}{(p_\phi - p_\chi')^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p_\phi' - p_\chi') \quad (2.62)$$

2.6 Διαγράμματα Feynman

Ο πίνακας σκέδασης έχει διάφορες συνιστώσες. Παρατηρούμε ότι σ' όλες τις συνεισφορές εμφανίζονται οι παράγοντες

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2VE_f}},$$

οπότε γράφουμε το στοιχείο του πίνακα σκέδασης για το διάγραμμα (έστω) D με τη μορφή:

$$S_{fi}^{(n)}(D) = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2VE_f}} [i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}(D)]. \quad (2.63)$$

Μέσα στην παράσταση $i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}(D)$ κρύβεται στην ουσία η φυσική της αλληλεπίδρασης σε τάξη n που περιγράφονται από το διάγραμμα D . Στην περίπτωση μας:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(C_1) = -g^2 \frac{i}{(p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2}, \quad i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(C_2) = -g^2 \frac{i}{(p_\phi - p_\chi')^2 - m_\psi^2}. \quad (2.64)$$

Ο υπολογισμός της ποσότητας $i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}(D)$ μπορεί να κωδικοποιηθεί σε απλούς κανόνες, που φέρουν το όνομα του Feynman. Για την περίπτωση των βαθμωτών πεδίων που εξετάζουμε, οι κανόνες αυτοί είναι ιδιαίτερα απλοί.

2.6.1 Γραφική παράσταση των διαγραμμάτων

1. Για κάποιον δεδομένο τύπο αντίδρασης, δηλαδή για συγκεκριμένα αντιδρώντα και προϊόντα, σχεδιάζουμε τις λεγόμενες εξωτερικές γραμμές, που παριστάνουν τα εισερχόμενα και τα εξερχόμενα σωματίδια.
2. Επιλέγουμε την τάξη n της θεωρίας διαταραχών στην οποία θέλουμε να δουλέψουμε. Ας πούμε ότι $n = 2$.
3. Συνδέουμε τις εξωτερικές γραμμές είτε απ' ευθείας μεταξύ τους είτε με κάποιον κόμβο, που θα τον λέμε κορυφή και από τον οποίο θα εξακτινώνονται περισσότεροι από δύο γραμμές.

4. Οι κορυφές έχουν να κάνουν με το κομμάτι αλληλεπίδρασης της Χαμιλτονιανής και έχουν ως ακροδέκτες τα πεδία που υπεισέρχονται σ' αυτό. Στην περίπτωση μας από κάθε κορυφή προβάλλει μιά γραμμή ϕ , μιά γραμμή χ και μιά γραμμή ψ , αφού $\hat{\mathcal{H}}_I = -g\hat{\phi}(x)\hat{\chi}(x)\hat{\psi}(x)$. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα C_1 οι εισερχόμενες εξωτερικές γραμμές ϕ και χ συναντιούνται σε μια κορυφή (έστω 1), η οποία συνδέεται όπως είπαμε και με μια γραμμή ψ . Εξ άλλου, για το ίδιο διάγραμμα, οι εξερχόμενες εξωτερικές γραμμές ϕ και χ συναντιούνται σε μια άλλη κορυφή (έστω 2), η οποία συνδέεται επί πλέον και με μια γραμμή ψ .
5. Αν έχουν μείνει γραμμές μετέωρες, ενώνονται μεταξύ τους. Στο παράδειγμα που αναφέραμε (διάγραμμα C_1) οι δύο γραμμές ψ που εκπορεύονται από τις κορυφές 1 και 2 είναι ελεύθερες, οπότε τις συνδέουμε μεταξύ τους. Η γραμμή ψ που θα τις συνδέει δεν θα ξεπροβάλλει στον εξωτερικό κόσμο: τη λέμε εσωτερική γραμμή.

2.6.2 Τιμή των διαγραμμάτων

1. **Εσωτερικές γραμμές:** Σε κάθε εσωτερική γραμμή αποδίδουμε έναν διαδότη του Feynman:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [i\tilde{\Delta}_F(p)] e^{-ip\cdot(x-x')} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-x')}.$$

Τα διαγράμματα γράφονται συχνά στο χώρο των ορμών, όπου, σύμφωνα μ' αυτά, στην κάθε εσωτερική γραμμή συνδέουμε έναν αντίστοιχο διαδότη, τον

$$i\tilde{\Delta}_F(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

2. **Κορυφές:** Στην κάθε κορυφή θα αντιστοιχεί κατ' αρχάς ένας παράγοντας

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_k p_k \right),$$

όπου το k μετράει τις ορμές που μπαίνουν ή βγαίνουν από την κορυφή. Αυτός ο παράγοντας διασφαλίζει τη διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή. Και μετά έρχεται η ουσία, που έχει να κάνει με την αλληλεπίδραση που εκφράζει η κορυφή. Προκύπτει από την παράσταση $-i\mathcal{H}'_I$, οπότε για να βρούμε την τιμή του πρακτικά μπορούμε να διαγράψουμε από το \mathcal{H}'_I τους τελεστές πεδίου και να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με $-i$. Παραδείγματος χάριν, αν $\mathcal{H}'_I = g\hat{\phi}(x)\hat{\chi}(x)\hat{\psi}(x)$, τότε διαγράφοντας τα $\hat{\phi}(x)$, $\hat{\chi}(x)$, $\hat{\psi}(x)$ βρίσκουμε g και αυτό το κομμάτι θα είναι $-ig$. Συνολικά, δηλαδή, στην κορυφή αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi + p_\psi).$$

3. **Ολοκληρώσεις ορμής:** Για κάθε εσωτερική γραμμή, η αντίστοιχη ορμή q_k πρέπει να ολοκληρώνεται με μέτρο:

$$\int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4}.$$

Ορισμένες από αυτές τις ολοκληρώσεις θα αναιρούνται από τις συναρτήσεις δέλτα των κορυφών, αλλά ενδέχεται να παραμένουν κάποιες. Αυτού του είδους οι ολοκληρώσεις δίνουν συχνά **άπειρο** αποτέλεσμα, και τότε είναι αναγκαία η διαδικασία της **ανακανονικοποίησης**, με την οποία όμως δεν θα ασχοληθούμε σ' αυτό το εγχειρίδιο.

4. **Εξωτερικές γραμμές:** Για τις καθαρά βαθμωτές θεωρίες πεδίου δεν υπάρχουν ιδιαίτεροι παράγοντες που να αντιστοιχούν στις εξωτερικές γραμμές. Όμως θα δούμε ότι για ηλεκτρομαγνητικά ή σπινωρικά πεδία τα πράγματα αλλάζουν.

Κεφάλαιο 3

Ενεργοί διατομές

3.1 Ορισμός και συναλλοίωτη μορφή

Θεωρούμε πρώτα ένα σύστημα αναφοράς, όπου μια δέσμη σωματιδίων προσπίπτει με ταχύτητα v σε ακίνητο στόχο. Πριν προχωρήσουμε σε κβαντική περιγραφή, θα δώσουμε έναν απλοϊκό ορισμό μιας ενεργού διατομής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν (κυκλικό έστω) δίσκο με ακτίνα R και εμβαδό $S = \pi R^2$, που βρίσκεται μέσα σε μια ευρύτερη περιοχή εμβαδού A . Θεωρούμε ότι, εάν σωματίδιο (που κινείται προς την επιφάνεια A) τύχει να βρεθεί μέσα στο υποσύνολο του δίσκου πR^2 , θα σκεδαστεί, ενώ σε αντίθετη περίπτωση όχι. Τότε η πιθανότητα σκέδασης Π θα ισούται με

$$\Pi = \frac{S}{A}.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση θα ορίζαμε ως ενεργό διατομή την ποσότητα S , δηλαδή το κομμάτι του εμβαδού A που παρέχει σκεδάσεις (το υπό κάποιαν έννοια χρήσιμο). Συμβολίζουμε την ενεργό διατομή με το γράμμα σ , δηλαδή

$$\sigma = S = \Pi A.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μιά παράλληλη δέσμη με (αριθμητική) πυκνότητα ρ (αριθμό σωματιδίων ανά μονάδα όγκου) και ταχύτητα v κινείται προς το στόχο. Σε χρονικό διάστημα t ένας αριθμός $N = \rho A v t$ σωματιδίων θα διασχίσει μια διατομή A και θα έχει πιθανότητα να σκεδαστεί. Μπορούμε να διαλέξουμε το t με τρόπο ώστε αυτός ο αριθμός N των σωματιδίων, που είναι υποψήφια για να σκεδαστούν, να ισούται με μονάδα:

$$N = 1 \Rightarrow \rho A v t = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\rho v t}.$$

Μπορούμε τώρα να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα που αποδείξαμε και να συμπεράνουμε ότι:

$$\sigma = \frac{\Pi}{\rho v t} = \frac{1}{\rho v} \left(\frac{\Pi}{t} \right).$$

Η ποσότητα $\frac{\Pi}{t}$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα σκέδασης ανά μονάδα χρόνου, που λέγεται ρυθμός μετάβασης. Εξ άλλου, η ποσότητα ρv δεν είναι τίποτ' άλλο από τη ροή των προσπιπτόντων σωματιδίων. Δηλαδή **η ενεργός διατομή μπορεί να οριστεί ως ο ρυθμός μετάβασης ανά μονάδα προσπίπτουσας ροής.**

Οι κλασικές έννοιες που μόλις περιγράφηκαν μπορούν χωρίς πρόβλημα να μεταφερθούν στην κβαντική περιγραφή της σκέδασης. Η πιθανότητα σκέδασης Π θα είναι η κβαντική πιθανότητα:

$$\Pi \rightarrow |S_{fi}^{(n)}(D)|^2.$$

Θα ασχοληθούμε με τα δύο διαγράμματα C_1 και C_2 , που, όπως προαναφέραμε, συνεισφέρουν ουσιαστικά στη σκέδαση. Ας ξεκινήσουμε από την εξίσωση (2.63):

$$\begin{aligned} \Pi &\rightarrow |S_{fi}^{(2)}(C_1)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'_\chi}}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathcal{M}_{fi}(C_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2VE_{p_\phi}} \frac{1}{2VE_{p_\chi}} \frac{1}{2VE_{p'_\phi}} \frac{1}{2VE_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)]^2 |\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Εδώ υπάρχει το προφανές πρόβλημα του να αποδώσει κανείς νόημα στο τετράγωνο της συνάρτησης δέλτα. Κατ' αρχάς χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)]^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] \cdot [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)],$$

που απορρέει από τις ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η συνάρτηση δέλτα αναφέρεται όχι στον άπειρο χωροχρόνο, αλλά σε τετραδιάστατο όγκο VT . Για απλότητα περιοριζόμαστε σε μονοδιάστατο χώρο μήκους L . Ο ορισμός της συνάρτησης δέλτα δίνει, διαδοχικά:

$$\delta(p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx e^{-ipx} \Rightarrow \delta(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \cdot 1 = \frac{L}{2\pi}.$$

Επομένως, στην περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων θα ισχύει η σχέση:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = (2\pi)^4 \frac{VT}{(2\pi)^4} \Rightarrow (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = VT.$$

Συνεπώς η εξίσωση (3.1) γράφεται:

$$|S_{fi}^{(2)}(C_1)|^2 = \frac{1}{2VE_{p_\phi}} \frac{1}{2VE_{p_\chi}} \frac{1}{2VE_{p'_\phi}} \frac{1}{2VE_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] VT |\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2. \quad (3.2)$$

Αυτή η εξίσωση δίνει την πιθανότητα σκέδασης σε ένα μοναδικό ζευγάρι τελικών ορμών, τις συγκεκριμένες p'_ϕ και p'_χ που βρίσκονται σ' αυτήν την έκφραση. Η συνάρτηση δέλτα εκφράζει τη διατήρηση της τετραδιάστατης ορμής και ενέργειας. Οι

τελικές ορμές μπορούν να είναι οποιεσδήποτε, αρκεί να σέβονται τους περιορισμούς που προκύπτουν από τη συνάρτηση δέλτα. Άρα για να βρούμε την ολική πιθανότητα, πρέπει να αθροίσουμε τις πιθανότητες όλων αυτών των ενδεχομένων. Μας χρειάζεται ο αριθμός αυτών των δυνατοτήτων. Ξεκινώντας από τον μονοδιάστατο χώρο βρίσκουμε τον αριθμό των πιθανών τρισδιάστατων ¹ ορμών:

$$p = \frac{2\pi}{L}n \Rightarrow \Delta n = \frac{L}{2\pi}\Delta p \Rightarrow \Delta^{(3)}n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta^{(3)}p \Rightarrow d^3n = \frac{Vd^3p}{(2\pi)^3}.$$

Αυτά σημαίνουν ότι για να βρούμε την ολική πιθανότητα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με $\frac{V}{(2\pi)^3}d^3p$ για το κάθε τελικό σωματίδιο και να ολοκληρώσουμε:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int \frac{Vd^3p'_\phi}{(2\pi)^3} \int \frac{Vd^3p'_\chi}{(2\pi)^3} |S_{fi}^{(2)}(C_1)|^2 = \frac{1}{2VE_{p_\phi}} \frac{1}{2VE_{p_\chi}} VT \times \\ &\times \int \frac{Vd^3p'_\phi}{(2\pi)^3} \int \frac{Vd^3p'_\chi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2VE_{p'_\phi}} \frac{1}{2VE_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Για να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή πρέπει: (1) Να διαιρέσουμε με τον χρόνο T , ώστε να βρούμε το ρυθμό μετάβασης, που είναι $\frac{\Pi}{T}$ και (2) Να διαιρέσουμε με τη ροή ρv . Συγκεντρώνοντας και απλοποιώντας όλες τις συνεισφορές βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \sigma(C_1) &= \frac{1}{T} \frac{1}{\rho v} \int \frac{Vd^3p'_\phi}{(2\pi)^3} \int \frac{Vd^3p'_\chi}{(2\pi)^3} |S_{fi}^{(2)}(C_1)|^2 = \frac{1}{\rho v V} \times \frac{1}{4E_{p_\phi} E_{p_\chi}} \times \\ &\times \int \frac{d^3p'_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}} \int \frac{d^3p'_\chi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Σχετικά με τη ροή, υπενθυμίζουμε ότι το προσπίπτον σωματίδιο έχει κανονικοποιηθεί να περιέχει ένα σωματίδιο σ' όλον τον όγκο, όπως υποδεικνύει η εξίσωση (2.48), οπότε η αντίστοιχη πυκνότητα ρ είναι $\frac{1}{V}$, δηλαδή $\rho V = 1$. Η ταχύτητα ορίστηκε ως η ταχύτητα του βλήματος, ενώ θεωρούσαμε το στόχο ακίνητο. Θα χρειαστεί να γενικεύσουμε αυτήν την έννοια για την περίπτωση όπου και τα δύο σωματίδια κινούνται (π.χ. όταν δουλεύουμε στο σύστημα κέντρου μάζας και όχι μόνο). Συμβολίζοντας τα σωματίδια με 1 και 2 ορίζουμε τη σχετική ταχύτητα μέσω της σχέσης:

$$v_{\sigma\chi} \equiv \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2}, \quad (3.5)$$

η οποία, για συγγραμμικές κρούσεις, ανάγεται στην

$$v_{\sigma\chi} = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|,$$

¹ Χρησιμοποιούμε τρισδιάστατες ορμές, γιατί οι τελικές καταστάσεις θεωρούνται ελεύθερες, οπότε οι ενέργειές τους καθορίζονται πλήρως από τις αντίστοιχες ορμές.

που για μικρές ταχύτητες είναι η σχετική ταχύτητα που ξέρουμε από τη μη σχετικιστική Φυσική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε,

$$\frac{1}{\rho v V} \times \frac{1}{4E_{p_\phi} E_{p_\chi}} \rightarrow \frac{1}{4v_{\sigma\chi} E_{p_\phi} E_{p_\chi}} = \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}}.$$

Άρα η ενεργός διατομή που αντιστοιχεί στο διάγραμμα C_1 θα ισούται με:

$$\boxed{\sigma(C_1) = \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}} \times} \quad (3.6)$$

$$\boxed{\times \int \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}} \int \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2}.$$

Θα τονίσουμε εδώ ότι αυτή η έκφραση για την ενεργό διατομή είναι πολύ γενική, δηλαδή είναι χρήσιμη για όλες τις ακεδάσεις από δύο προσπίπτοντα σωματίδια με συγκεκριμένες ορμές στα ίδια σωματίδια με διαφορετικές ορμές. Με μικρές τροποποιήσεις μπορεί να εκφράσει και την πιθανότητα σκέδασης σε σωματίδια διαφορετικής φύσης από τα αρχικά, ή και με διαφορετικό πλήθος. Έχουμε γράψει την έκφραση με μια μορφή που μπορεί να υπολογιστεί είτε στο σύστημα του εργαστηρίου, στο οποίο ορίσαμε τις εκφράσεις μας είτε σ' οποιοδήποτε άλλο σύστημα (π.χ. σύστημα κέντρου μάζας), αφού ο τύπος γραφής είναι συναλλοίωτος κατά Lorentz. Στην εξίσωση (3.6), αν εξαιρέσουμε τον παράγοντα ροής, υπεισέρχονται δύο παράγοντες: ο παράγοντας $|\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2$ περιλαμβάνει τις ενδιαφέρουσες πληροφορίες αναφορικά με τις αλληλεπιδράσεις που διαδραματίζονται, ενώ ο παράγοντας

$$dLips_2 = \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)],$$

που ονομάζεται (διαφορικός) χώρος των φάσεων (Lorentz invariant phase space) για δύο σωματίδια, είναι καθαρά κινηματικός. Και οι δύο έχουν τη σημασία τους ως προς την αριθμητική τιμή της ενεργού διατομής.

Μια τελευταία παρατήρηση είναι η ακόλουθη: οι ενεργοί διατομές περιλαμβάνουν ολοκληρώσεις, οι οποίες όμως πιθανόν να γίνονται μόνο κατά ένα μέρος τους. Το αν θα γίνει κάποια ολοκλήρωση ή όχι εξαρτάται από το πού είναι εστιασμένο το ενδιαφέρον του πειράματος. Για παράδειγμα, ίσως να μας ενδιαφέρει σχετικά με το τελικό προϊόν ϕ σε ποιά γωνία θα κατευθυνθεί και με ποιά πιθανότητα στην κάθε γωνία και οι συσκευές μας είναι κατασκευασμένες με αυτήν την προοπτική. Ας υποθέσουμε επίσης ότι σχετικά με το τελικό προϊόν χ δεν μας ενδιαφέρει τίποτε (και οι συσκευές μας δεν μετρούν τίποτε σχετικά με το χ). Τότε θα πρέπει να κάνουμε την ολοκλήρωση ως προς όλες τις μεταβλητές του χ και ως προς το μέτρο μόνο της ορμής του ϕ . Θα μείνουν ανολοκλήρωτες οι γωνίες (ας τις συμβολίσουμε με Ω) που προσδιορίζουν την κατεύθυνση της p'_ϕ . Το αποτέλεσμα $d\sigma$ θα προκύψει επομένως

ανάλογο προς το $d\Omega$. Σ' αυτήν την περίπτωση σχηματίζουμε το πηλίκο $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, το οποίο εξαρτάται γενικά από τις γωνίες Ω και μας δίνει την πληροφορία πώς ακριβώς εξαρτάται η ενεργός διατομή από τις γωνίες αυτές που δίνουν τον προσανατολισμό της p'_ϕ , δηλαδή αυτό που θέλαμε, και λέγεται διαφορική ενεργός διατομή. Αν οι γωνίες είναι οι συνηθισμένες των πολικών συντεταγμένων, θ και ϕ , το $d\sigma$ θα είναι διαφορικό δεύτερης τάξης, της ίδιας με το $d\Omega$. Αν η διαφορική ενεργός διατομή δεν εξαρτάται για κάποιο λόγο από την αζιμουθιακή γωνία ϕ , είναι λογικό να ολοκληρώσουμε ως προς ϕ , οπότε θα προκύψει ένα διαφορικό $d\sigma$ πρώτης τάξης, όσης και το $d\theta$. Βλέπουμε ότι το $d\sigma$ δεν είναι εντελώς καθορισμένο από μόνο του: πρέπει να δώσουμε επί πλέον πληροφορίες, αλλιώς ούτε καν τί τάξης διαφορικό είναι δεν μπορούμε να ξέρουμε.

Αν, αντί για το C_1 , πρέπει να θεωρήσουμε το C_2 , η διαδικασία είναι εντελώς ανάλογη, οπότε:

$$d\sigma(C_2) = \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}} \times \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2. \quad (3.7)$$

Το πιο ενδιαφέρον σενάριο είναι να πρέπει να λάβουμε υπόψη και τα δύο διαγράμματα, C_1 και C_2 . Σ' αυτήν την περίπτωση η διαφορική ενεργός διατομή θα ισούται με

$$d\sigma(C_1 + C_2) = \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}} \times \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2. \quad (3.8)$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία έκφραση δεν περιλαμβάνει μόνο όρους ανάλογους με τα $|\mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2$ και $|\mathcal{M}_{fi}(C_1)|^2$, αλλά και σταυρωτούς όρους της μορφής $\mathcal{M}_{fi}^*(C_1)\mathcal{M}_{fi}(C_2)$ και $\mathcal{M}_{fi}(C_1)\mathcal{M}_{fi}^*(C_2)$. Οι τελευταίοι εκφράζουν τα φαινόμενα συμβολής μεταξύ των δύο διαγραμμάτων. Στην πραγματικότητα πρέπει σ' αλήθεια να λάβουμε υπόψη και τα δύο διαγράμματα, οπότε παραθέτουμε και πάλι εδώ τα αποτελέσματα (2.64):

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(C_1) = -g^2 \frac{i}{(p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2}, \quad i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(C_2) = -g^2 \frac{i}{(p_\phi - p'_\chi)^2 - m_\psi^2}.$$

Αξιοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα η σχέση (3.8) γράφεται:

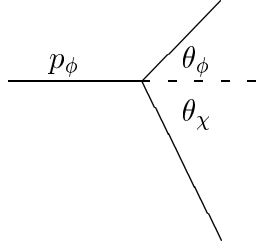
$$d\sigma(C_1 + C_2) = g^4 \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}} \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 2E'_\phi} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E'_\chi} \times [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] \left| \frac{1}{(p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2} + \frac{1}{(p_\phi - p'_\chi)^2 - m_\psi^2} \right|^2. \quad (3.9)$$

Για να προχωρήσουμε πρέπει να επιλέξουμε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Οι πιο δημοφιλείς κατηγορίες είναι το σύστημα εργαστηρίου και το σύστημα κέντρου μάζας, οπότε θα προχωρήσουμε στη γενική περιγραφή τους.

3.2 Σύστημα εργαστηρίου

Υποθέτουμε ότι ένα από τα σωματίδια (έστω το χ) είναι ο στόχος, δηλαδή είναι ακίνητο σ' αυτό το σύστημα αναφοράς, δηλαδή $[E_\chi = m_\chi, \vec{p}_\chi = \vec{0}] \Rightarrow p_\chi = (m_\chi, \vec{0})$. Η τετραορμή του σωματιδίου ϕ πριν την κρούση θα είναι η $p_\phi = (E_\phi, \vec{p}_\phi)$. Διαλέγουμε ο άξονας των z να βρίσκεται στην κατεύθυνση της \vec{p}_ϕ , οπότε τα τετραδιανύσματα γράφονται αναλυτικότερα:

$$p_\phi = (E_\phi, 0, 0, |\vec{p}_\phi|), \quad p_\chi = (m_\chi, 0, 0, 0).$$



Μετά την κρούση τα δύο προϊόντα θα βρίσκονται ασφαλώς στο ίδιο επίπεδο, το οποίο επιλέγουμε να είναι το xz , με τετραορμές $p'_\phi = (E'_\phi, \vec{p}'_\phi)$ και $p'_\chi = (E'_\chi, \vec{p}'_\chi)$. Θεωρούμε ότι η ορμή \vec{p}'_χ σχηματίζει γωνία θ_χ με τον άξονα των z και, αντίστοιχα, η ορμή \vec{p}'_ϕ γωνία θ_ϕ . Άρα τα τετραδιανύσματα των προϊόντων γράφονται αναλυτικότερα:

$$p'_\phi = (E'_\phi, |\vec{p}'_\phi| \sin \theta_\phi, 0, |\vec{p}'_\phi| \cos \theta_\phi), \quad p'_\chi = (E'_\chi, -|\vec{p}'_\chi| \sin \theta_\chi, 0, |\vec{p}'_\chi| \cos \theta_\chi).$$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις, θα υποθέσουμε ότι το ϕ είναι άμαζο ($m_\phi = 0$), οπότε και

$$|\vec{p}'_\phi| = E'_\phi, \quad |\vec{p}'_\chi| = E'_\chi.$$

Τα τετραδιανύσματα γράφονται:

$$p_\phi = (E_\phi, 0, 0, E_\phi), \quad p_\chi = (m_\chi, 0, 0, 0),$$

$$p'_\phi = (E'_\phi, E'_\phi \sin \theta_\phi, 0, E'_\phi \cos \theta_\phi), \quad p'_\chi = (E'_\chi, -|\vec{p}'_\chi| \sin \theta_\chi, 0, |\vec{p}'_\chi| \cos \theta_\chi).$$

Η διατήρηση της ορμής δίνει:

$$E'_\phi \sin \theta_\phi - |\vec{p}'_\chi| \sin \theta_\chi = 0,$$

$$E'_\phi \cos \theta_\phi + |\vec{p}'_\chi| \cos \theta_\chi = E_\phi.$$

Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα $|\vec{p}'_\chi|$ και E'_χ συναρτήσει του E'_ϕ :

$$|\vec{p}'_\chi|^2 = E_\phi^2 + E_\phi'^2 - 2E_\phi E'_\phi \cos \theta_\phi \Rightarrow E'_\chi = \sqrt{E_\phi^2 + E_\phi'^2 - 2E_\phi E'_\phi \cos \theta_\phi + m_\chi^2}. \quad (3.10)$$

Για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της (3.9) κάνουμε τα εξής βήματα: (1) Παρατηρούμε ότι $\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2} = \sqrt{(E_\phi m_\chi)^2} = E_\phi m_\chi$, συνεπώς ο παράγοντας ροής στο σύστημα εργαστηρίου είναι: $\frac{1}{4E_\phi m_\chi}$. (2) Παρατηρούμε ότι:

$$d^3 p'_\phi = |\vec{p}'_\phi|^2 d|\vec{p}'_\phi| d\Omega_\phi = E_\phi'^2 dE'_\phi d\Omega_\phi.$$

Η (3.9) γράφεται:

$$d\sigma = \frac{1}{4E_\phi m_\chi} \frac{E_\phi'^2 dE'_\phi d\Omega_\phi}{(2\pi)^3 2E'_\phi} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 2E'_\chi} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}|^2, \quad (3.11)$$

$$|\mathcal{M}|^2 \equiv g^4 \left| \frac{1}{(p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2} + \frac{1}{(p_\phi - p'_\chi)^2 - m_\psi^2} \right|^2. \quad (3.12)$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να προσδιορίσουμε τι ακριβώς πείραμα κάνουμε. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να διερευνήσουμε την εξάρτηση της ενεργού διατομής από τις γωνίες (π.χ. την θ_ϕ), ενώ δεν επικεντρωνόμαστε σε καμμία άλλη εξάρτηση (π.χ. από ενέργειες). Αυτό σημαίνει ότι ολοκληρώνουμε ως προς όλες τις μεταβλητές, εκτός από αυτές που σχετίζονται με τις Ω_ϕ . Εξ άλλου η διατήρηση της (τρισεδιάστατης) ορμής μας υπαγορεύει ότι, αν προσδιορίσουμε την Ω_ϕ και την E'_ϕ , τα Ω_χ και E'_χ προσδιορίζονται απολύτως, άρα το ίχνος που αφήνει η ολοκλήρωση ως προς $d^3 p'_\chi$ είναι απλά ότι το E'_χ στον παρονομαστή είναι συνάρτηση του E'_ϕ , όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Δηλαδή το τρισεδιάστατο κομμάτι της συνάρτησης δέλτα θα μας απαλλάξει από την ολοκλήρωση ως προς p'_χ . Η έκφραση για τη διαφορική ενεργό διατομή θα γίνει:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\phi} = \frac{1}{64\pi^2 E_\phi m_\chi} \int dE'_\phi \frac{E'_\phi}{E'_\chi} \delta(E_\phi + m_\chi - E'_\phi - E'_\chi) |\mathcal{M}|^2. \quad (3.13)$$

Από την τετραδιάστατη συνάρτηση δέλτα μας έχει απομείνει μια μονοδιάστατη συνιστώσα, η οποία θα μας βοηθήσει στην ολοκλήρωση ως προς E'_ϕ . Το όρισμα της συνάρτησης δέλτα μηδενίζεται όταν

$$E'_\chi = E_\phi + m_\chi - E'_\phi \Rightarrow E_\chi'^2 = (E_\phi + m_\chi - E'_\phi)^2,$$

που με τη βοήθεια της (3.10) συνεπάγεται:

$$E_\phi^2 + E_\phi'^2 - 2E_\phi E'_\phi \cos \theta_\phi + m_\chi^2 = (E_\phi + m_\chi - E'_\phi)^2 \Rightarrow E'_\phi = \frac{m_\chi E_\phi}{m_\chi + E_\phi - E_\phi \cos \theta_\phi} \equiv \tilde{E}'_\phi.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$, όπου $f(x_0) = 0$, για να επεξεργαστούμε τη συνάρτηση δέλτα: το όρισμά της είναι συνάρτηση του E'_ϕ και η (3.10) μας δείχνει ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial E'_\phi} (E_\phi + m_\chi - E'_\phi - E'_\chi) \right| &= \left| -1 - \frac{\partial E'_\chi}{\partial E'_\phi} \right| = 1 + \frac{E'_\phi - E_\phi \cos \theta_\phi}{E'_\chi} \\ &= \frac{(E'_\chi + E'_\phi) - E_\phi \cos \theta_\phi}{E'_\chi} = \frac{(E_\phi + m_\chi) - E_\phi \cos \theta_\phi}{E'_\chi}, \end{aligned}$$

όπου $E'_\chi + E'_\phi = E_\phi + m_\chi$ λόγω της συνάρτησης δέλτα που διατηρεί την ενέργεια. Η συνάρτηση δέλτα γράφεται:

$$\begin{aligned} \delta(E_\phi + m_\chi - E'_\phi - E'_\chi) &= \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial E'_\phi} (E_\phi + m_\chi - E'_\phi - E'_\chi) \right|} \delta(E'_\phi - \tilde{E}'_\phi) \\ &= \frac{E'_\chi}{(E_\phi + m_\chi) - E_\phi \cos \theta_\phi} \delta(E'_\phi - \tilde{E}'_\phi) \end{aligned}$$

και η ολοκλήρωση στην (3.13) μπορεί πια να γίνει απ' ευθείας:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_\phi} &= \frac{1}{64\pi^2 E_\phi m_\chi} \int dE'_\phi \frac{E'_\phi}{E'_\chi} \frac{E'_\chi}{m_\chi + E_\phi - E_\phi \cos \theta_\phi} \delta(E'_\phi - \tilde{E}'_\phi) |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 E_\phi m_\chi} \frac{\tilde{E}'_\phi}{m_\chi + E_\phi - E_\phi \cos \theta_\phi} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{E'_\phi = \tilde{E}'_\phi} \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{[m_\chi + E_\phi - E_\phi \cos \theta_\phi]^2} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{E'_\phi = \tilde{E}'_\phi}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου αντικαταστήσαμε την τιμή του \tilde{E}'_ϕ και υπενθυμίζουμε ότι και σε τυχόν εμφανίσεις της E'_ϕ μέσα στο $|\mathcal{M}|^2$ πρέπει να γίνεται η αντικατάσταση $E'_\phi = \tilde{E}'_\phi$. Και αμέσως προχωράμε στην εξειδίκευση του $|\mathcal{M}|^2$ στην περίπτωση μας. Χρειαζόμαστε διάφορες ποσότητες:

$$\begin{aligned} (p_\phi + p_\chi)^2 - m_\psi^2 &= (E_\phi + m_\chi)^2 - \vec{p}_\phi^2 - m_\psi^2 = E_\phi^2 + m_\chi^2 + 2E_\phi m_\chi - \vec{p}_\phi^2 - m_\psi^2 \\ &= m_\chi^2 + 2E_\phi m_\chi - m_\psi^2, \quad (p_\phi - p'_\chi)^2 = (E_\phi - E'_\chi)^2 - (\vec{p}_\phi - \vec{p}'_\chi)^2 = (E_\phi^2 + E_\chi'^2 - 2E_\phi E'_\chi) \\ &\quad - (\vec{p}_\phi^2 + \vec{p}'_\chi{}^2 - 2E_\phi \sqrt{E_\chi'^2 - m_\chi^2} \cos \theta_\chi) = (E_\phi^2 - \vec{p}_\phi^2) + (E_\chi'^2 - \vec{p}'_\chi{}^2) - 2E_\phi E'_\chi \\ &\quad + 2E_\phi \sqrt{E_\chi'^2 - m_\chi^2} \cos \theta_\chi = m_\chi^2 - 2E_\phi E'_\chi + 2E_\phi \sqrt{E_\chi'^2 - m_\chi^2} \cos \theta_\chi. \end{aligned}$$

Στην τελευταία έκφραση θα πρέπει ν' αντικαταστήσουμε όπου E'_χ την παράσταση $E_\phi + m_\chi - E'_\phi = E_\phi + m_\chi - A$. Απ' αυτό το σημείο και μετά ο υπολογισμός του $|\mathcal{M}|^2$, όπως ορίζεται στην εξίσωση (3.12) δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία. Η διαφορική ενεργός διατομή (3.14) θα εκφράζεται τελικά συναρτήσει των E_ϕ και θ_ϕ , οπότε για σωματίδια δεδομένης ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα σκέδασης σε κάθε συγκεκριμένη γωνία θ_ϕ .

3.3 Σύστημα κέντρου μάζας

Εκτός από το σύστημα εργαστηρίου εξαιρετικά εύχρηστο και επομένως δημοφιλές σύστημα αναφοράς είναι το λεγόμενο σύστημα κέντρου μάζας, ή, ακριβέστερα (μια και ίσως να εμφανίζονται και άμαξα σωματίδια) σύστημα κέντρου ορμής. Σ' αυτό το σύστημα: $\vec{p}_\phi = -\vec{p}_\chi$ και $\vec{p}'_\phi = -\vec{p}'_\chi$, οπότε η ολοκλήρωση ως προς χ (έστω) στην (3.8) μπορεί να γίνει εύκολα:

$$\begin{aligned} d\sigma(C_1 + C_2) &= \frac{1}{4\sqrt{(p_\phi \cdot p_\chi)^2 - m_\phi^2 m_\chi^2}} \times \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\phi}{(2\pi)^3 E_{p'_\phi}} \frac{d^3 p'_\chi}{(2\pi)^3 E_{p'_\chi}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi)] |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 \\ &\rightarrow \frac{1}{64\pi^2 E_\phi E_\chi v_{\sigma\chi}} \int \frac{d^3 p'_\phi}{E_{p'_\phi} E_{p'_\chi}} \delta(E_\phi + E_\chi - E'_\phi - E'_\chi) |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2, \quad (3.15) \end{aligned}$$

όπου όλες οι ποσότητες που υπεισέρχονται πρέπει να υπολογιστούν με τους περιορισμούς $\vec{p}_\phi = -\vec{p}_\chi$ και $\vec{p}'_\phi = -\vec{p}'_\chi$. Επίσης η σχετική ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$v_{\sigma\chi} = \left| \frac{\vec{p}_\phi}{E_\phi} - \frac{\vec{p}_\chi}{E_\chi} \right| = |\vec{p}_\phi| \left| \frac{1}{E_\phi} + \frac{1}{E_\chi} \right| = |\vec{p}_\phi| \frac{E_\phi + E_\chi}{E_\phi E_\chi} = |\vec{p}_\phi| \frac{\sqrt{s}}{E_\phi E_\chi}.$$

Έχουμε εισαγάγει την μεταβλητή $s \equiv (p_\phi + p_\chi)^2$, που στο σύστημα κέντρου μάζας ανάγεται στην $(E_\phi + E_\chi)^2$. Δηλαδή η ποσότητα \sqrt{s} αντιπροσωπεύει την αρχική κινητική ενέργεια στο σύστημα κέντρου μάζας. Η εξίσωση

$$s \equiv (E_\phi + E_\chi)^2 = (\sqrt{|\vec{p}_\phi|^2 + m_\phi^2} + \sqrt{|\vec{p}_\chi|^2 + m_\chi^2})^2 = (\sqrt{|\vec{p}_\phi|^2 + m_\phi^2} + \sqrt{|\vec{p}_\phi|^2 + m_\chi^2})^2 \quad (3.16)$$

μπορεί να λυθεί, με αποτέλεσμα:

$$|\vec{p}_\phi| = |\vec{p}_\chi| = \left(\frac{[s - (m_\phi + m_\chi)^2][s - (m_\phi - m_\chi)^2]}{4s} \right)^{1/2}. \quad (3.17)$$

Το μέτρο της ολοκλήρωσης γράφεται:

$$d^3 p'_\phi = |\vec{p}'_\phi|^2 d|\vec{p}'_\phi| d\Omega = |\vec{p}'_\phi| E'_\phi dE'_\phi d\Omega.$$

(Σημειώνουμε ότι $\vec{p}_\phi'^2 + m_\phi^2 = E_\phi'^2 \Rightarrow |\vec{p}'_\phi| d|\vec{p}'_\phi| = E'_\phi dE'_\phi$). Η σχέση $\vec{p}'_\phi = -\vec{p}'_\chi$ συνεπάγεται την $E_\phi'^2 - m_\phi^2 = E_\chi'^2 - m_\chi^2$ κι αυτή με τη σειρά της την $E'_\chi = \sqrt{E_\phi'^2 - m_\phi^2 + m_\chi^2}$. Το όρισμα της συνάρτησης δέλτα γράφεται:

$$E_\phi + E_\chi - E'_\phi - E'_\chi = \sqrt{s} - E'_\phi - E'_\chi = \sqrt{s} - E'_\phi - \sqrt{E_\phi'^2 - m_\phi^2 + m_\chi^2}.$$

Αυτή η ποσότητα μηδενίζεται όταν

$$E_{\phi}' = \frac{s + m_{\phi}^2 - m_{\chi}^2}{2\sqrt{s}} \equiv \tilde{E}'_{\phi} \Rightarrow E_{\chi}' = \frac{s - m_{\phi}^2 + m_{\chi}^2}{2\sqrt{s}} \equiv \tilde{E}'_{\chi}.$$

Διαπιστώνουμε ότι σ' αυτό το σύστημα αναφοράς οι τιμές των ενεργειών μετά την αντίδραση καθορίζονται πλήρως από τις μάζες και την αρχική ολική ενέργεια. Έπιστρέφοντας στην συνάρτηση δέλτα βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$, ότι:

$$\delta(\sqrt{s} - E_{\phi}' - \sqrt{E_{\phi}'^2 - m_{\phi}^2 + m_{\chi}^2}) = \frac{\tilde{E}'_{\chi}}{\sqrt{s}} \delta(E_{\phi}' - \tilde{E}'_{\phi}).$$

Αντικαθιστούμε στην (3.15) όσες ποσότητες προσδιορίσαμε με τα ίσα τους και προκύπτει:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{64\pi^2 E_{\phi} E_{\chi} |\vec{p}_{\phi}|_{\frac{\sqrt{s}}{E_{\phi} E_{\chi}}}} \int \frac{|\vec{p}'_{\phi}| E'_{\phi} dE'_{\phi} d\Omega}{E'_{\phi} E'_{\chi}} \left(\frac{\tilde{E}'_{\chi}}{\sqrt{s}} \delta(E_{\phi}' - \tilde{E}'_{\phi}) \right) |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 |\vec{p}_{\phi}|_s} \int |\vec{p}'_{\phi}| dE'_{\phi} \delta(E_{\phi}' - \tilde{E}'_{\phi}) |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 |\vec{p}_{\phi}|_s} |\vec{p}'_{\phi}| |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 \Big|_{E_{\phi}' = \tilde{E}'_{\phi}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Όμως, αν λύσουμε τις εξισώσεις

$$s \equiv (E_{\phi}' + E_{\chi}')^2 = (\sqrt{|\vec{p}'_{\phi}|^2 + m_{\phi}^2} + \sqrt{|\vec{p}'_{\chi}|^2 + m_{\chi}^2})^2 = (\sqrt{|\vec{p}'_{\phi}|^2 + m_{\phi}^2} + \sqrt{|\vec{p}'_{\phi}|^2 + m_{\chi}^2})^2, \quad (3.19)$$

όπως κάναμε προηγουμένως με τις (3.16), θα βρούμε τα αποτελέσματα:

$$|\vec{p}'_{\phi}| = |\vec{p}'_{\chi}| = \left(\frac{[s - (m_{\phi} + m_{\chi})^2][s - (m_{\phi} - m_{\chi})^2]}{4s} \right)^{1/2}, \quad (3.20)$$

και μια απλή σύγκριση με τη λύση (3.17) αρκεί για να μας πείσει ότι:

$$|\vec{p}'_{\phi}| = |\vec{p}'_{\chi}| = |\vec{p}_{\phi}| = |\vec{p}_{\chi}|,$$

που βέβαια δεν είναι τίποτ' άλλο από την έκφραση της διατήρησης της ορμής στο σύστημα κέντρου μάζας. Η εξίσωση (3.18) απλοποιείται στην τελική εξίσωση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 \Big|_{E_{\phi}' = \tilde{E}'_{\phi}}. \quad (3.21)$$

Ο υπολογισμός της ποσότητας

$$|\mathcal{M}|^2 \equiv |\mathcal{M}_{fi}(C_1) + \mathcal{M}_{fi}(C_2)|^2 = g^4 \left| \frac{1}{(p_{\phi} + p_{\chi})^2 - m_{\psi}^2} + \frac{1}{(p_{\phi} - p_{\chi}')^2 - m_{\psi}^2} \right|^2$$

μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= g^4 \left| \frac{1}{(E_\phi + E_\chi)^2 - m_\psi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(E_\phi - E_\chi')^2 - |\vec{p}_\phi|^2 - |\vec{p}_\chi'|^2 + 2|\vec{p}_\phi||\vec{p}_\chi'| \cos(\pi - \theta) - m_\psi^2} \right|_{E_\chi = \tilde{E}_\chi}^2 \\
&= g^4 \left| \frac{1}{s - m_\psi^2} + \frac{1}{m_\phi^2 + m_\chi^2 - 2E_\phi E_\chi' - 2|\vec{p}_\phi||\vec{p}_\chi'| \cos(\theta) - m_\psi^2} \right|_{E_\chi = \tilde{E}_\chi}^2 \\
&= g^4 \left| \frac{1}{s - m_\psi^2} + \frac{1}{m_\phi^2 + m_\chi^2 - 2E_\phi E_\chi' - 2|\vec{p}_\phi|^2 \cos(\theta) - m_\psi^2} \right|^2 \\
&= g^4 \left| \frac{1}{s - m_\psi^2} + \frac{1}{m_\phi^2 + m_\chi^2 - 2E_\phi E_\chi' - 2(E_\phi^2 - m_\phi^2) \cos(\theta) - m_\psi^2} \right|^2. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

3.4 Διασπάσεις σωματιδίων

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο ϕ διασπάται στα χ και ψ . Το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα σκέδασης δίνεται από τη σχέση

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi) \frac{1}{\sqrt{2E_\phi V}} \frac{1}{\sqrt{2E_\chi V}} \frac{1}{\sqrt{2E_\psi V}} \mathcal{M}_{fi}. \tag{3.23}$$

Η πιθανότητα μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση ισούται με

$$|S_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)] [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)] \frac{1}{2E_\phi V} \frac{1}{2E_\chi V} \frac{1}{2E_\psi V} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \tag{3.24}$$

Φυσικά εμφανίζεται και πάλι το πρόβλημα του να δοθεί νόημα στο τετράγωνο της συνάρτησης δέλτα, όπως και στην περίπτωση της αντίδρασης δύο σωματιδίων, και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, δηλαδή ο ένας από τους δύο παράγοντες $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)$ θα τεθεί ίσος με VT , με το ίδιο σκεπτικό που αναπτύχθηκε εκεί, οπότε:

$$|S_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)] VT \frac{1}{2E_\phi V} \frac{1}{2E_\chi V} \frac{1}{2E_\psi V} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{3.25}$$

$$\Rightarrow \frac{|S_{fi}|^2}{T} = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)] \frac{1}{2E_\phi} \frac{1}{2E_\chi V} \frac{1}{2E_\psi V} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \tag{3.26}$$

Αυτή είναι η πιθανότητα να καταλήξουμε σε σωματίδια με συγκεκριμένες τιμές των p_χ και p_ψ . Για μια ακόμη φορά ακολουθούμε τη λογική που αναπτύχθηκε αναφορικά με τις σκεδάσεις και θυμίζουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει αυτή ακριβώς η πιθανότητα,

αλλά πιθανότητες του τύπου το σωματίδιο χ (αντίστοιχα ψ) να έχει ορμή στο διάστημα $d^3 p_\chi$ (αντίστοιχα $d^3 p_\psi$). Άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό των καταστάσεων που αντιστοιχούν σ' αυτά τα απειροστά διαστήματα των ορμών. Όπως έχουμε ήδη δείξει, αυτοί οι αριθμοί καταστάσεων δίνονται από τις σχέσεις $\frac{V d^3 p_\chi}{(2\pi)^3}$ και $\frac{V d^3 p_\psi}{(2\pi)^3}$, άρα πρέπει να ολοκληρώσουμε ώστε να βρούμε το ρυθμό διάσπασης Γ :

$$\Gamma = \frac{1}{2E_\phi} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3 2E_\psi} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi)] |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.27)$$

Σημειώνουμε ότι οι παράγοντες του όγκου έχουν απλοποιηθεί παντού, όπως θα έπρεπε. Σημειώνουμε ότι αυτός ο τύπος είναι εξαιρετικά γενικός, και με ελεφρά τροποποίηση θα μπορούσε να εκφράσει και την πιθανότητα διάσπασης προς περισσότερα από δύο σωματίδια.

Θα υπολογίσουμε το ρυθμό διάσπασης για το πρότυπο με τα τρία βαθμωτά πεδία στην πιο χαμηλή (μη τετριμμένη) τάξη. Ξεκινάμε με τον υπολογισμό του στοιχείου πίνακα S_{fi} , περιοριζόμενοι στους όρους μέχρι και πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\approx S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} = \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle + (-i) \langle \Psi_f | \int d^4 x \hat{\mathcal{H}}'_I(t, \vec{x}) | \Psi_i \rangle \\ &= \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | \Psi_\phi(\vec{p}_\phi) \rangle - ig \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | \int d^4 x \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) | \Psi_\phi(\vec{p}_\phi) \rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε τις κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) | &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi), \quad \langle \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0 | a_\psi(\vec{p}_\psi), \\ \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | &= \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi) a_\psi(\vec{p}_\psi), \quad | \Psi_\phi(\vec{p}_\phi) \rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι

$$S_{fi}^{(0)} = \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | \Psi_\phi(\vec{p}_\phi) \rangle = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi) a_\psi(\vec{p}_\psi) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle = 0,$$

αφού δεν υπάρχει τρόπος να συνδυαστούν οι τελεστές (περιττός αριθμός) με τρόπο ώστε να μην περισσεύει κανείς, οπότε η αναμενόμενη τιμή στο κενό θα είναι υποχρεωτικά μηδέν. Για τον όρο $S_{fi}^{(1)}$ παρατηρούμε ότι υπάρχει τέτοιος τρόπος. Ο αντίστοιχος μη μηδενικός όρος του θεωρήματος του Wick θα είναι:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -ig \langle \Psi_\chi(\vec{p}_\chi) \Psi_\psi(\vec{p}_\psi) | \int d^4 x \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) | \Psi_\phi(\vec{p}_\phi) \rangle \\ &= -ig \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4 x \langle 0 | a_\chi(\vec{p}_\chi) a_\psi(\vec{p}_\psi) \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x) a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= -ig \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \langle 0|a_\chi(\vec{p}_\chi)\hat{\chi}(x)|0 \rangle \langle 0|a_\psi(\vec{p}_\psi)\hat{\psi}(x)|0 \rangle \langle 0|\hat{\phi}(x)a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi)|0 \rangle. \quad (3.29)$$

Ξαναγράφουμε την έκφραση (1.14) για το βαθμωτό πεδίο ϕ (έστω):

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p'_\phi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}} [\hat{a}_\phi(\vec{p}'_\phi)e^{-ip'_\phi \cdot x} + \hat{a}_\phi^\dagger(\vec{p}'_\phi)e^{+ip'_\phi \cdot x}]. \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.29) αυτήν την έκφραση και τις αντίστοιχες για τα πεδία χ και ψ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -ig \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \\ &\langle 0|a_\chi(\vec{p}_\chi) \int \frac{d^3p'_\chi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}}} [\hat{a}_\chi(\vec{p}'_\chi)e^{-ip'_\chi \cdot x} + \hat{a}_\chi^\dagger(\vec{p}'_\chi)e^{+ip'_\chi \cdot x}]|0 \rangle \\ &\langle 0|a_\psi(\vec{p}_\psi) \int \frac{d^3p'_\psi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\psi}}} [\hat{a}_\psi(\vec{p}'_\psi)e^{-ip'_\psi \cdot x} + \hat{a}_\psi^\dagger(\vec{p}'_\psi)e^{+ip'_\psi \cdot x}]|0 \rangle \\ &\langle 0| \int \frac{d^3p'_\phi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}} [\hat{a}_\phi(\vec{p}'_\phi)e^{-ip'_\phi \cdot x} + \hat{a}_\phi^\dagger(\vec{p}'_\phi)e^{+ip'_\phi \cdot x}] a_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi)|0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Οι όροι με δύο τελεστές δημιουργίας ή δύο τελεστές καταστροφής δεν συνεισφέρουν, οπότε η έκφραση (3.31) απλοποιείται στην:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -ig \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \int \frac{d^3p'_\chi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}}} \langle 0|\hat{a}_\chi(\vec{p}_\chi)\hat{a}_\chi^\dagger(\vec{p}'_\chi)|0 \rangle e^{+ip'_\chi \cdot x} \\ &\int \frac{d^3p'_\psi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\psi}}} \langle 0|\hat{a}_\psi(\vec{p}_\psi)\hat{a}_\psi^\dagger(\vec{p}'_\psi)|0 \rangle e^{+ip'_\psi \cdot x} \\ &\int \frac{d^3p'_\phi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}} \langle 0|\hat{a}_\phi(\vec{p}'_\phi)\hat{a}_\phi^\dagger(\vec{p}_\phi)|0 \rangle e^{-ip'_\phi \cdot x} \\ &= -ig \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \int \frac{d^3p'_\chi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\chi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\chi - \vec{p}'_\chi) e^{+ip'_\chi \cdot x} \\ &\int \frac{d^3p'_\psi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\psi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\psi - \vec{p}'_\psi) e^{+ip'_\psi \cdot x} \int \frac{d^3p'_\phi}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'_\phi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\phi - \vec{p}'_\phi) e^{-ip'_\phi \cdot x} \\ &= -ig \int d^4x \int \frac{d^3p'_\chi}{\sqrt{2VE_{p'_\chi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\chi - \vec{p}'_\chi) e^{+i(E'_\chi x_0 - \vec{p}'_\chi \cdot \vec{x})} \\ &\int \frac{d^3p'_\psi}{\sqrt{2VE_{p'_\psi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\psi - \vec{p}'_\psi) e^{+i(E'_\psi x_0 - \vec{p}'_\psi \cdot \vec{x})} \int \frac{d^3p'_\phi}{\sqrt{2VE_{p'_\phi}}} \delta^{(3)}(\vec{p}_\phi - \vec{p}'_\phi) e^{-i(E'_\phi x_0 - \vec{p}'_\phi \cdot \vec{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig \int d^4x \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} e^{+i(E_\chi x_0 - \vec{p}_\chi \cdot \vec{x})} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\psi}}} e^{+i(E_\psi x_0 - \vec{p}_\psi \cdot \vec{x})} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} e^{-i(E_\phi x_0 - \vec{p}_\phi \cdot \vec{x})} \\
&= -ig \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\psi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} \int d^4x e^{+i[(p_\chi + p_\psi - p_\phi) \cdot x]} \\
&= -ig \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\psi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_\psi - p_\phi). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε το $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ συγκρίνουμε με την (3.32) τον ορισμό του, δηλαδή την εξίσωση (2.63):

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(n)}(D) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2VE_f}} [i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}(D)] \\
\Rightarrow S_{fi}^{(1)} &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\phi - p_\chi - p_\psi) \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\chi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\psi}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p_\phi}}} [i\mathcal{M}_{fi}^{(1)}].
\end{aligned}$$

Η σύγκριση δίνει:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(1)} = -ig \Rightarrow |\mathcal{M}_{fi}^{(1)}| = g.$$

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ρυθμού διάσπασης χρησιμοποιώντας την (3.27). Το φυσικότερο σύστημα αναφοράς είναι, βέβαια, εκείνο, στο οποίο το σωματίδιο που διασπάται είναι ακίνητο ($\vec{p}_\phi = \vec{0}$, $E_\phi = m_\phi$) και αυτό θα χρησιμοποιήσουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{2E_\phi} \int \frac{d^3p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} \frac{d^3p_\psi}{(2\pi)^3 2E_\psi} [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_\phi - \vec{p}_\chi - \vec{p}_\psi)] [(2\pi) \delta(E_\phi - E_\chi - E_\psi)] g^2 \\
\Rightarrow \Gamma &= \frac{g^2}{2m_\phi} \int \frac{d^3p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} \frac{d^3p_\psi}{(2\pi)^3 2E_\psi} [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(-\vec{p}_\chi - \vec{p}_\psi)] [(2\pi) \delta(m_\phi - E_\chi - E_\psi)].
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια της τρισδιάστατης συνάρτησης δέλτα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ορμή ενός από τα δύο προϊόντα, λόγου χάριν την \vec{p}_ψ :

$$\Gamma = \frac{g^2}{2m_\phi (2\pi)^2} \int \frac{d^3p_\chi}{4E_\chi E_\psi} \delta(m_\phi - E_\chi - E_\psi) = \frac{g^2}{2m_\phi (2\pi)^2} \int \frac{4\pi |\vec{p}_\chi|^2 d|\vec{p}_\chi|}{4E_\chi E_\psi} \delta(m_\phi - E_\chi - E_\psi).$$

Αλλά

$$|\vec{p}_\chi|^2 + m_\chi^2 = E_\chi^2 \Rightarrow |\vec{p}_\chi| d|\vec{p}_\chi| = E_\chi dE_\chi \Rightarrow |\vec{p}_\chi|^2 d|\vec{p}_\chi| = |\vec{p}_\chi| E_\chi dE_\chi,$$

οπότε:

$$\Gamma = \frac{g^2}{8\pi m_\phi} \int \frac{|\vec{p}_\chi| dE_\chi}{E_\psi} \delta(m_\phi - E_\chi - E_\psi).$$

Φυσικά στην τελευταία σχέση εννοείται ότι $E_\psi = \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2}$, αφού οι E_ψ και E_χ αντιστοιχούν στο ίδιο μέγεθος ορμής $|\vec{p}_\chi|$ για το δεδομένο σύστημα αναφοράς. Επομένως το όρισμα της συνάρτησης δέλτα μηδενίζεται για συγκεκριμένη τιμή \tilde{E}_χ της E_χ , για την οποία:

$$m_\phi - E_\chi - \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2} = 0 \Rightarrow E_\chi = \frac{m_\phi^2 m_\chi^2 - m_\psi^2}{2m_\phi}.$$

Δηλαδή οι ενέργειες και οι ορμές είναι πλήρως καθορισμένες:

$$\tilde{E}_\psi = \frac{m_\phi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2}{2m_\phi}, \quad |\vec{p}_\chi| = \frac{\sqrt{m_\phi^4 + m_\chi^4 + m_\psi^4 - 2m_\phi^2 m_\chi^2 - 2m_\phi^2 m_\psi^2 - 2m_\chi^2 m_\psi^2}}{2m_\phi}.$$

Κάνουμε κάποιους απαραίτητους προκαταρκτικούς υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial E_\chi} (E_\chi + \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2} - m_\phi) \right|_{E_\chi = \tilde{E}_\chi} \\ &= 1 + \frac{\tilde{E}_\chi}{\sqrt{\tilde{E}_\chi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2}} = \frac{\tilde{E}_\psi + \tilde{E}_\chi}{\tilde{E}_\psi} = \frac{m_\phi}{\tilde{E}_\psi} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση δέλτα γράφεται:

$$\delta(E_\chi + \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2 + m_\psi^2} - m_\phi) = \frac{\tilde{E}_\psi}{m_\phi} \delta(E_\chi - \tilde{E}_\chi).$$

Η ολοκλήρωση γίνεται μέσω της συνάρτησης δέλτα:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g^2}{8\pi m_\phi} \frac{|\vec{p}_\chi| \tilde{E}_\psi}{\tilde{E}_\psi m_\phi} \Rightarrow \Gamma = \frac{g^2}{8\pi m_\phi^2} |\vec{p}_\chi| \\ &= \frac{g^2}{8\pi m_\phi^2} \frac{\sqrt{m_\phi^4 + m_\chi^4 + m_\psi^4 - 2m_\phi^2 m_\chi^2 - 2m_\phi^2 m_\psi^2 - 2m_\chi^2 m_\psi^2}}{2m_\phi} \end{aligned}$$

και τελικά:

$$\Gamma = \frac{g^2}{16\pi m_\phi^3} \sqrt{m_\phi^4 + m_\chi^4 + m_\psi^4 - 2m_\phi^2 m_\chi^2 - 2m_\phi^2 m_\psi^2 - 2m_\chi^2 m_\psi^2}. \quad (3.33)$$

Παρατήρηση 1: Η σταθερά g έχει μονάδες μάζας, έτσι ώστε το κομμάτι αλληλεπίδρασης της δράσης:

$$\int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(t, \vec{x}) = g \int d^4x \hat{\phi}(x) \hat{\chi}(x) \hat{\psi}(x)$$

να είναι αδιάστατο. (Υπενθυμίζουμε ότι $[d^4x] = M^{-4}$, $[\hat{\phi}(x)] = [\hat{\chi}(x)] = [\hat{\psi}(x)] = M$). Άρα η ποσότητα Γ έχει μονάδες μάζας, $[\Gamma] = M$, όπως θα έπρεπε, αφού αντιπροσωπεύει διασπάσεις ανά μονάδα χρόνου, άρα έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου.

Συνήθως οι σταθερές ζεύξης γράφονται σε αδιάστατη μορφή, οπότε εισάγουμε μια αδιάστατη εκδοχή της σταθεράς g : $g = \tilde{g}m_\phi$. Η έκφραση για το Γ γίνεται:

$$\Gamma = \frac{\tilde{g}^2}{16\pi m_\phi} \sqrt{m_\phi^4 + m_\chi^4 + m_\psi^4 - 2m_\phi^2 m_\chi^2 - 2m_\phi^2 m_\psi^2 - 2m_\chi^2 m_\psi^2}.$$

Παρατήρηση 2: Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός διάσπασης Γ καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την ποσότητα $|\vec{p}_\chi|$. Λέγεται ότι εξαρτάται από τον διαθέσιμο χώρο των φάσεων. Ας δούμε δύο ακραίες περιπτώσεις:

(α) $m_\chi = m_\psi \approx 0$. Τότε: $\Gamma \approx \frac{\tilde{g}^2}{16\pi m_\phi} \sqrt{m_\phi^4} = \frac{\tilde{g}^2}{16\pi} m_\phi$. (β) $m_\chi = m_\psi \approx \frac{m_\phi}{2}$. Τότε: $\Gamma \approx 0$.

Στην περίπτωση (α) ο ρυθμός μπορεί να είναι μεγάλος (για αρκετά μεγάλο m_ϕ), έστω και αν η σταθερά ζεύξης \tilde{g} είναι μικρή. Αυτό οφείλεται στο ότι οι μάζες των προϊόντων είναι τόσο μικρές που αφήνουν χώρο να εμφανιστεί αρκετά μεγάλη τιμή για την $|\vec{p}_\chi|$, δηλαδή ο χώρος των φάσεων είναι "ευρύχωρος". Παράδειγμα τέτοιου τύπου διάσπασης είναι η $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$, όπου η σταθερά ζεύξης είναι των ασθενικών αλληλεπιδράσεων, δηλαδή μικρή, αλλά ο ρυθμός διάσπασης γίνεται αρκετά μεγάλος χάρις στην πολύ μεγάλη μάζα (80GeV) του W^- . Στην περίπτωση (β) ο ρυθμός γίνεται πολύ μικρός, γιατί οι μάζες των προϊόντων χ και ψ είναι τέτοιες που δεν αφήνουν παρά ελάχιστο διαθέσιμο χώρο των φάσεων.

Κεφάλαιο 4

Βαθμωτή Ηλεκτροδυναμική

4.1 Αναλλοιότητα βαθμίδας

Θα εισαγάγουμε την αλληλεπίδραση των φορτισμένων βαθμωτών σωματιδίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ξεκινάμε από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα (1.24) των φορτισμένων σωματιδίων:

$$\mathcal{L}_0 = [\partial^\mu \phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x)] - m^2[\phi^\dagger(x)][\phi(x)].$$

Παρατηρούμε ότι, αν κάνουμε το μετασχηματισμό

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow \phi^\dagger(x) e^{+ieQ\Lambda}, \quad (4.1)$$

όπου το Λ είναι σταθερό (δεν εξαρτάται από το x), το e είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο και το Q είναι καθαρός αριθμός που υποδηλώνει το φορτίο του βαθμωτού πεδίου σε μονάδες του e (δηλαδή το φορτίο q του σωματιδίου ισούται με Qe), τότε η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μένει αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow [\partial^\mu \phi^\dagger(x) e^{+ieQ\Lambda}] [e^{-ieQ\Lambda} \partial_\mu \phi(x)] - m^2 [\phi^\dagger(x) e^{+ieQ\Lambda}] [e^{-ieQ\Lambda} \phi(x)] \\ &= [\partial^\mu \phi^\dagger(x)] [\partial_\mu \phi(x)] - m^2 [\phi^\dagger(x)] [\phi(x)] \equiv \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Αυτή η συμμετρία δεν είναι τίποτε άλλο από τη γνωστή αναλλοιότητα της Κβαντικής Μηχανικής, αν η κυματοσυνάρτηση πολλαπλασιαστεί με έναν μιγαδικό αριθμό με μέτρο μονάδα, δηλαδή με μια φάση.

Το καινούργιο στοιχείο εμφανίζεται όταν αναρωτηθεί κανείς κατά πόσο μπορεί να γενικευτεί αυτή η συμμετρία στην περίπτωση όπου το Λ δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από το x . Είναι προφανές ότι, αν αφήσουμε τα πράγματα ως έχουν, η \mathcal{L} δεν θα είναι αναλλοίωτη: για παράδειγμα η παράσταση $\partial_\mu \phi(x)$ θα μετασχηματιστεί στην:

$$\partial_\mu [e^{-ieQ\Lambda(x)} \phi(x)] = e^{-ieQ\Lambda(x)} [\partial_\mu \phi(x)] + \phi(x) [-ieQ \partial_\mu \Lambda(x)] e^{-ieQ\Lambda(x)}.$$

Ο δεύτερος όρος δεν υπήρχε πριν, γιατί το Λ ήταν σταθερό, άρα είχε μηδενικές παραγώγους. Τώρα όμως αυτό δεν ισχύει και αυτό το γεγονός μας καταστρέφει την αναλλοιοότητα. Μια ιδέα του πώς μπορούμε να επαναφέρουμε την αναλλοιοότητα μπορεί να προκύψει από την εξέταση του μηχανισμού μέσω του οποίου η αναλλοιοότητα επιτυγχανόταν προηγουμένως: στην εξίσωση (4.2), καθώς το πεδίο $\phi(x)$ μετασχηματίζεται στο $e^{-ieQ\Lambda}\phi(x)$ (δηλαδή πολλαπλασιάζεται με μια φάση, την $e^{-ieQ\Lambda}$), και οι παράγωγοί του $\partial_\mu\phi(x)$ μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο, (δηλαδή πολλαπλασιάζονται με την ίδια φάση, την $e^{-ieQ\Lambda}$, οπότε $\partial_\mu\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda}\partial_\mu\phi(x)$). Αφού οι όροι της Λαγκρανζιανής πυκνότητας εμφανίζονται σε ζευγάρια (π.χ. $[\partial^\mu\phi^\dagger(x)][\partial_\mu\phi(x)]$) και οι μετασχηματισμένοι όροι περιλαμβάνουν **αντίστροφα** εκθετικά (π.χ. $[\partial^\mu\phi^\dagger(x)]e^{+ieQ\Lambda}$ και $e^{-ieQ\Lambda}[\partial_\mu\phi(x)]$), βλέπουμε ότι η αναλλοιοότητα εξασφαλίζεται από τον νόμο μετασχηματισμού μαζί με την απαλοιφή των αντίστροφων εκθετικών. Και αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα τώρα, ότι ο μετασχηματισμός των παραγώγων δεν είναι απλώς ο πολλαπλασιασμός με μια φάση αλλά κάτι πολυπλοκώτερο. Η λύση, επομένως, θα μπορούσε να είναι η τροποποίηση της Λαγκρανζιανής πυκνότητας, ώστε οι όροι της να εμφανίζονται σε ζευγάρια που μετασχηματίζονται μέσω του πολλαπλασιασμού με αντίστροφα εκθετικά. Το ζητούμενο ανάγεται σε κάτι ακόμα απλούστερο: να βρεθεί μια τροποποιημένη παράγωγος $D_\mu\phi$, η οποία να περιέχει τη συνηθισμένη παράγωγο και η οποία, όταν γίνει ο μετασχηματισμός

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda(x)}\phi(x),$$

να μετασχηματίζεται στην παράσταση:

$$e^{-ieQ\Lambda(x)}D_\mu\phi(x).$$

Αν βρούμε μια τέτοια παράγωγο, η αναλλοιοότητα θα είναι εξασφαλισμένη με τον ίδιο τρόπο που εξασφαλιζόταν στην περίπτωση του σταθερού Λ . Η ιδέα είναι να εισαγάγουμε ένα καινούργιο πεδίο $A_\mu(x)$, το οποίο επίσης θα μετασχηματίζεται, όταν γίνεται η αλλαγή $\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda(x)}\phi(x)$, και γίνεται $A'_\mu(x)$. Το νέο είδος παραγώγου θα οριστεί με βάση τις σχέσεις:

$$\boxed{D_\mu\phi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\phi(x), \quad D^\mu\phi^\dagger(x) \equiv [\partial^\mu - ieQA^\mu(x)]\phi^\dagger(x).} \quad (4.3)$$

Ο όρος $D_\mu\phi(x)$ θα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi(x) &= [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\phi(x) = \{\partial_\mu\phi(x)\} + \{ieQA_\mu(x)\phi(x)\} \\ &\rightarrow \{e^{-ieQ\Lambda(x)}\partial_\mu\phi(x) + \phi(x)[-ieQ\partial_\mu\Lambda(x)]e^{-ieQ\Lambda(x)}\} + \{ieQA'_\mu(x)e^{-ieQ\Lambda(x)}\phi(x)\} \\ &= e^{-ieQ\Lambda(x)}\partial_\mu\phi(x) + e^{-ieQ\Lambda(x)}ieQ[A'_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x)]\phi(x). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι, αν επιβάλλουμε την ισότητα $A'_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) = A_\mu(x)$, δηλαδή αν απαιτήσουμε το πεδίο $A_\mu(x)$ να μετασχηματίζεται στο πεδίο

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

το πρόβλημά μας θα έχει λυθεί. Πράγματι, σ' αυτήν την περίπτωση:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi(x) &\rightarrow e^{-ieQ\Lambda(x)} \partial_\mu \phi(x) + e^{-ieQ\Lambda(x)} ieQ A_\mu(x) \phi(x) \\ &= e^{-ieQ\Lambda(x)} [\partial_\mu + ieQ A_\mu(x)] \phi(x) = e^{-ieQ\Lambda(x)} D_\mu \phi(x), \end{aligned}$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός της νέου τύπου παραγώγου δεν είναι παρά ένας πολλαπλασιασμός με τη φάση $e^{-ieQ\Lambda(x)}$, ο ίδιος πολλαπλασιασμός που υπεισέρχεται στον μετασχηματισμό του πεδίου $\phi(x)$. Η νέου τύπου παράγωγος $D_\mu \phi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQ A_\mu(x)] \phi(x)$ ονομάζεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του $\phi(x)$.

Συνοφίζοντας: Εισάγουμε ένα πεδίο $A_\mu(x)$, το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον νόμο: $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Σχηματίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο $D_\mu \phi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQ A_\mu(x)] \phi(x)$ και την $D^\mu \phi^\dagger(x) \equiv [\partial^\mu - ieQ A^\mu(x)] \phi^\dagger(x)$. Τότε η Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = [D^\mu \phi^\dagger(x)] [D_\mu \phi(x)] - m^2 [\phi^\dagger(x)] [\phi(x)]$$

είναι αναλλοίωτη στον ταυτόχρονο μετασχηματισμό των πεδίων:

$$\boxed{A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad \phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda(x)} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{+ieQ\Lambda(x)} \phi^\dagger(x).} \quad (4.4)$$

Οι αλλαγές αυτές λέγονται **μετασχηματισμοί βαθμίδας** και οι γενικεύσεις τους παίζουν κεντρικό ρόλο στις θεωρίες των στοιχειωδών σωματιδίων. Η αναλλοιότητα μπορεί να αποδειχτεί σχετικά εύκολα:

$$\mathcal{L} = [\partial^\mu \phi^\dagger(x) - ieQ A^\mu(x) \phi^\dagger(x)] [\partial_\mu \phi(x) + ieQ A_\mu(x) \phi(x)] - m^2 [\phi^\dagger(x)] [\phi(x)].$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} [\partial^\mu \phi^\dagger(x) - ieQ A^\mu(x) \phi^\dagger(x)] &\rightarrow \partial^\mu [e^{+ieQ\Lambda(x)} \phi^\dagger(x)] - ieQ [A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)] e^{+ieQ\Lambda(x)} \phi^\dagger(x) \\ &= e^{+ieQ\Lambda(x)} [+ieQ \partial^\mu \Lambda(x) \phi^\dagger(x) + \partial^\mu \phi^\dagger(x) - ieQ A^\mu(x) \phi^\dagger(x) - ieQ \partial^\mu \Lambda(x) \phi^\dagger(x)] \\ &= e^{+ieQ\Lambda(x)} [\partial^\mu - ieQ A^\mu(x)] \phi^\dagger(x) = [D^\mu \phi^\dagger(x)] e^{+ieQ\Lambda(x)}. \end{aligned}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \phi(x) + ieQ A_\mu(x) \phi(x)] &\rightarrow \partial_\mu [e^{-ieQ\Lambda(x)} \phi(x)] + ieQ [A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)] e^{-ieQ\Lambda(x)} \phi(x) \\ &= e^{-ieQ\Lambda(x)} [-ieQ \partial_\mu \Lambda(x) \phi(x) + \partial_\mu \phi(x) + ieQ A_\mu(x) \phi(x) + ieQ \partial_\mu \Lambda(x) \phi(x)] \\ &= e^{-ieQ\Lambda(x)} [\partial_\mu + ieQ A_\mu(x)] \phi(x) = e^{-ieQ\Lambda(x)} [D_\mu \phi(x)]. \end{aligned}$$

Άρα:

$$[D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)] \rightarrow [D^\mu \phi^\dagger(x)e^{+ieQ\Lambda(x)}][e^{-ieQ\Lambda(x)}D_\mu \phi(x)] = [D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)],$$

δηλαδή είναι αναλλοίωτο. Ο μετασχηματισμός του υπόλοιπου κομματιού της \mathcal{L} είναι σχεδόν προφανής:

$$m^2[\phi^\dagger(x)][\phi(x)] \rightarrow m^2[\phi^\dagger(x)e^{+ieQ\Lambda(x)}][e^{-ieQ\Lambda(x)}\phi(x)] = m^2[\phi^\dagger(x)][\phi(x)],$$

δηλαδή είναι και αυτό αναλλοίωτο. Τελικά επαληθεύσαμε ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα \mathcal{L}_1 είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό (4.4). Είναι όμως αυτή η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που ζητάμε; Αν γράψουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την \mathcal{L}_1 μεταβάλλοντας το $A^\mu(x)$, είναι απλό να δούμε ότι δεν θα προκύψει διαφορική εξίσωση κίνησης για το $A^\mu(x)$, αλλά μια αλγεβρική εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $A^\mu(x)$ συναρτήσει των $\phi(x)$ και $\phi^\dagger(x)$, οπότε το $A^\mu(x)$ δεν είναι πραγματικό, δυναμικό πεδίο, αλλά βοηθητικό πεδίο που εκφράζεται συναρτήσει άλλων. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν υπάρχουν κινητικοί όροι γι' αυτό το πεδίο, δηλαδή όροι με παραγώγους του $A^\mu(x)$. Θα μας βοηθήσει το γεγονός ότι ο νόμος μετασχηματισμού του $A^\mu(x)$, δηλαδή ο νόμος $A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$, είναι ακριβώς ο ίδιος με τον νόμο που είχαμε συναντήσει στην παράγραφο 7.1, όταν εξετάζαμε τη συμμετρία βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Επομένως οι διατυπώσεις του παρόντος κεφαλαίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης των βαθμωτών πεδίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, αν ταυτίσουμε το $A^\mu(x)$ με το τετραδιάνυσμα του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού. Υπενθυμίζουμε ότι η τροποποιημένη Λαγκρανζιανή για ελεύθερο ($J^\mu = 0$) ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι η (7.12):

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 \right].$$

Άρα για να βρούμε την κατάλληλη Λαγκρανζιανή πυκνότητα, αρκεί να συμπεριλάβουμε στην \mathcal{L} και την \mathcal{L}_{EM} . Δηλαδή τελικά η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που ζητάμε θα είναι η:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\phi A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + [D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)] - V(\phi^\dagger(x)\phi(x))}. \quad (4.5)$$

Σ' αυτήν τη Λαγκρανζιανή έχουμε προσθέσει τις \mathcal{L} και \mathcal{L}_{EM} , με μια ελαφρά γενίκευση: αντί για τον όρο $m^2\phi^\dagger(x)\phi(x)$ βάλουμε τον $V(\phi^\dagger(x)\phi(x))$, όπου το V μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση δυναμικού. Μια πολύ δημοφιλής επιλογή είναι η:

$$V(\phi^\dagger(x)\phi(x)) = m^2\phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda[\phi^\dagger(x)\phi(x)]^2,$$

που χρησιμοποιείται στη μελέτη του μηχανισμού Higgs. Φυσικά, το $V(\phi^\dagger(x)\phi(x))$ είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, αφού το όρισμα $\phi^\dagger(x)\phi(x)$ είναι

αναλλοίωτο. Η Λαγκρανζιανή $\mathcal{L}_{\phi A}$ είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας όταν $\xi \rightarrow \infty$. Ο όρος $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ χρησιμεύει στην επιλογή μιας βαθμίδας, ώστε να αποφεύγονται οι δυσκολίες που περιγράψαμε στο κεφάλαιο για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ο όρος $[D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)]$ μπορεί να γραφτεί αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} [D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)] &= [\partial^\mu \phi^\dagger(x) - ieQA^\mu(x)\phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x) + ieQA_\mu(x)\phi(x)] \\ &= [\partial^\mu \phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x)] + ieQ[\phi(x)\partial_\mu \phi^\dagger(x) - \phi^\dagger(x)\partial_\mu \phi(x)]A^\mu(x) + e^2Q^2\phi^\dagger(x)\phi(x)A^\mu(x)A_\mu(x) \\ &= [\partial^\mu \phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x)] + J_\mu(x)A^\mu(x) + e^2Q^2\phi^\dagger(x)\phi(x)A^\mu(x)A_\mu(x). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το διατηρούμενο ρεύμα $J_\mu(x) = ieQ[\phi(x)\partial_\mu \phi^\dagger(x) - \phi^\dagger(x)\partial_\mu \phi(x)]$, που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος της Noether στη συμμετρία βαθμίδας. Συνήθως, προπάντων όταν κάνουμε υπολογισμούς σε χαμηλές τάξεις, ο όρος $e^2Q^2\phi^\dagger(x)\phi(x)A^\mu(x)A_\mu(x)$ παραλείπεται ως διόρθωση ανώτερης τάξης. Σ' αυτήν την περίπτωση (στην οποία και θα περιοριστούμε) η Λαγκρανζιανή πυκνότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi A} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &+ [\partial^\mu \phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x)] + ieQ[\phi(x)\partial_\mu \phi^\dagger(x) - \phi^\dagger(x)\partial_\mu \phi(x)]A^\mu(x) - V(\phi^\dagger(x)\phi(x)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2 Κανόνες Feynman

Πριν διατυπώσουμε τους κανόνες του Feynman, πρέπει πολύ σύντομα να δώσουμε τον διαδότη του φωτονίου. Το θέμα περιγράφεται με κάποια λεπτομέρεια στο παράρτημα. Εδώ απλά αναπαράγουμε την έκφραση που προκύπτει για τον διαδότη στο χώρο των ορμών:

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right],$$

όπου το ξ είναι αυθαίρετη παράμετρος. Θα χρησιμοποιήσουμε ως επί το πλείστον τη βαθμίδα του Feynman, οπότε ο διαδότης παίρνει την απλή μορφή:

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}.$$

Ξαναγράφουμε τον διαδότη του βαθμωτού πεδίου:

$$i\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

οπότε βλέπουμε ότι ο διαδότης του φωτονίου μοιάζει πάρα πολύ με τον διαδότη ενός άμαζου βαθμωτού πεδίου. Υπάρχει, βέβαια, η μετρική $g_{\mu\nu}$, που δεν υπήρχε στο βαθμωτό πεδίο, η μάζα έχει τεθεί ίση με το μηδέν, αλλά η σημαντικότερη διαφορά είναι

ότι έχει το αντίθετο πρόσημο, πράγμα που μπορεί να είναι καταστροφικό (αρνητικό μέτρο κυματοσυνάρτησης κλπ). Ευτυχώς, οι συνιστώσες που έχουν φυσική σημασία είναι οι $i\tilde{D}_{22}(k)$ και $i\tilde{D}_{33}(k)$, στις οποίες τα $g_{22} = g_{33} = -1$ αλλάζουν το πρόσημο και σώζουν την κατάσταση.

Τα στοιχεία που συναποτελούν τους κανόνες Feynman για τη βαθμωτή ηλεκτροδυναμική (4.5) είναι τα εξής:

1. **Εσωτερικές γραμμές:** Υπάρχουν δύο πιθανοί τύποι εσωτερικών γραμμών.

(α) Του βαθμωτού πεδίου, στην οποία αντιστοιχεί η παράσταση

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

(β) Του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, στην οποία αντιστοιχεί η παράσταση

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

2. **Κορυφές:** Υπάρχουν δύο πιθανοί τύποι κορυφών.

(α) Εκείνη που προκύπτει από την αλληλεπίδραση $e^2 Q^2 \phi^\dagger(x)\phi(x)g_{\mu\nu}A^\mu(x)A^\nu(x)$. Αν διαγράψουμε τους τελεστές πεδίου θα προκύψει το $e^2 Q^2 g_{\mu\nu}$, το οποίο πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί i και επί τη συνάρτηση δέλτα για τη διατήρηση της ορμής, οπότε η αντίστοιχη κορυφή συνδέεται με την παράσταση

$$2ie^2 Q^2 g_{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p' - k - k').$$

Εμφανίζεται ένας πρόσθετος παράγοντας 2, που συνδέεται με την κανονικοποίηση του $A^\mu(x)$ και που δεν είναι του παρόντος να αναλύσουμε άλλο. Τα μ και ν είναι οι δείκτες των δύο φωτονίων.

(β) Εκείνη που προκύπτει από την αλληλεπίδραση

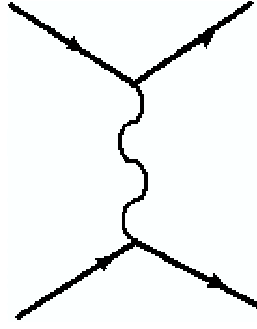
$$ieQ[\phi(x)\partial_\mu\phi^\dagger(x) - \phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)]A^\mu(x).$$

Πριν διαγράψουμε τους τελεστές πεδίου είναι φρόνιμο να μεταφερθούμε στο χώρο των ορμών (αλλιώς θα παρουσιαστούν οι τελεστές ∂_μ να μη δρουν κάπου συγκεκριμένα, οπότε πρέπει να τους αποδώσουμε κάποιο νόημα). Θα βρούμε την παράσταση

$$ieQ[\tilde{\phi}(p)(ip'_\mu)\tilde{\phi}^\dagger(p') - \tilde{\phi}^\dagger(p')(-ip_\mu)\tilde{\phi}(p)]\tilde{A}^\mu(k) = -eQ(p_\mu + p'_\mu)\tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}^\dagger(p')\tilde{A}^\mu(k).$$

Τώρα μπορούμε να διαγράψουμε τους τελεστές πεδίου, να πολλαπλασιάσουμε επί i και να λάβουμε φυσικά υπόψη ότι $p = k + p'$, άρα να μην ξεχάσουμε τη σχετική συνάρτηση δέλτα. Η κορυφή, λοιπόν, αντιστοιχεί στην παράσταση:

$$-ieQ(p_\mu + p'_\mu)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k).$$



Σχήμα 4.1:

3. **Κορυφές βαθμωτού πεδίου:** Υπάρχουν ενδεχομένως κορυφές που συνδέονται με το $V(\phi^\dagger\phi)$. Το κομμάτι μάζας του δυναμικού, το $m^2\phi^\dagger\phi$, έχει ήδη ληφθεί υπόψη στην κατασκευή του βαθμωτού διαδότη που είναι πάνω. Ίσως υπάρχει και κάποια αλληλεπίδραση π.χ. $g(\phi^\dagger\phi)^2$, οπότε πρέπει να προστεθεί ο αντίστοιχος κανόνας.

Το άθροισμα όλων των συνεισφορών είναι το πλάτος $-i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}$, για τη δεδομένη τάξη n .

4.3 Η/Μ σκέδαση δύο (διαφορετικών) βαθμωτών

Θεωρούμε την ηλεκτρομαγνητική σκέδαση δύο διαφορετικών φορτισμένων βαθμωτών πεδίων ϕ και χ . Θα χρησιμοποιήσουμε τη βαθμίδα $\xi = 1$, οπότε για τις εσωτερικές γραμμές θα χρησιμοποιούμε την έκφραση:

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Στην πιο χαμηλή δυνατή (μη τετριμμένη) τάξη συνεισφέρει μόνο ένα διάγραμμα, αυτό που φαίνεται στο σχήμα 4.1 και οι μόνες κορυφές που θα μας απασχολήσουν θα είναι οι:

$$-ieQ_\phi(p_\phi^\mu + p_\phi'^\mu)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\phi - p_\phi' - k), \quad -ieQ_\chi(p_\chi^\nu + p_\chi'^\nu)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\chi - p_\chi' + k).$$

Οι διαδότες των βαθμωτών δεν συνεισφέρουν στο διάγραμμα, γιατί βρίσκονται όλοι στις εξωτερικές γραμμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε παράγοντες ίσους με τη μονάδα. Δηλαδή στο διάγραμμα συνεισφέρουν μόνο οι κορυφές και η μοναδική εσωτερική γραμμή, που παριστάνει το φωτόνιο. Η συνεισφορά του διαγράμματος είναι:

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p_\phi' - p_\chi') \\ & = \left[-ieQ_\phi(p_\phi^\mu + p_\phi'^\mu)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\phi - p_\phi' - k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-ieQ_\chi(p'_\chi + p''_\chi)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\chi - p'_\chi + k) \right] \left[-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \right] \\
& = -ie^2Q_\phi Q_\chi \frac{(p''_\phi + p'''_\phi)g_{\mu\nu}(p'_\chi + p''_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi) \\
& = -ie^2Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\phi + p_\chi - p'_\phi - p'_\chi) \\
& \Rightarrow -i\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = -ie^2Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Εκείνο που μας χρειάζεται στην πραγματικότητα είναι το

$$|\mathcal{M}_{fi}^{(2)}|^2 = e^4 Q_\phi^2 Q_\chi^2 \left| \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2} \right|^2.$$

Για να προχωρήσουμε, πρέπει να περιοριστούμε σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Διαλέγουμε το σύστημα κέντρου μάζας. Το καλό είναι ότι οι σχετικοί υπολογισμοί έχουν ήδη γίνει στην παράγραφο 3.3 και ειδικότερα μας χρειάζεται η εξίσωση (3.21) κατάλληλα τροποποιημένη:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \left| \mathcal{M}_{fi}^{(2)} \right|^2 \Big|_{E'_\phi = \tilde{E}'_\phi}, \quad \tilde{E}'_\phi \equiv \frac{s + m_\phi^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \quad \tilde{E}'_\chi \equiv \frac{s - m_\phi^2 + m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \quad s \equiv (p_\phi + p_\chi)^2.$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας:

$$p_\phi = (E_\phi, 0, 0, p), \quad p_\chi = (E_\chi, 0, 0, -p),$$

$$p'_\phi = (E_\phi, 0, p \sin \theta, p \cos \theta), \quad p'_\chi = (E_\chi, 0, -p \sin \theta, -p \cos \theta).$$

$$p_\phi + p'_\phi = (2E_\phi, 0, p \sin \theta, p[1 + \cos \theta]), \quad p_\chi + p'_\chi = (2E_\chi, 0, -p \sin \theta, -p[1 + \cos \theta]),$$

$$p_\phi - p'_\phi = (0, 0, -p \sin \theta, p[1 - \cos \theta]), \quad s = (E_\phi + E_\chi)^2,$$

$$(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi) = 4E_\phi E_\chi + p^2 \sin^2 \theta + p^2 [1 + \cos \theta]^2, \quad (p_\phi - p'_\phi)^2 = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 [1 - \cos \theta]^2.$$

Ας εξετάσουμε την απλούστερη περίπτωση των πολύ μεγάλων ενεργειών, οπότε μπορούμε να αμελήσουμε τις μάζες των σωματιδίων. Τότε:

$$(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi) \approx 4p^2 + p^2 \sin^2 \theta + p^2 [1 + \cos \theta]^2 = 2p^2 (3 + \cos \theta),$$

$$(p_\phi - p'_\phi)^2 \approx -p^2 \sin^2 \theta - p^2 [1 - \cos \theta]^2 = -2p^2 (1 - \cos \theta).$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{64\pi^2 s} e^4 Q_\phi^2 Q_\chi^2 \left(\frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{4s} Q_\phi^2 Q_\chi^2 \left(\frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2,$$

όπου $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$ είναι η σταθερά λεπτής υφής, που ισούται περίπου με $\frac{1}{137}$. Έχουμε ένα πολύ συγκεκριμένο αποτέλεσμα για την εξάρτηση της διαφορικής ενεργού διατομής από τη γωνία σκέδασης θ , που θα μπορούσε να ελεγχθεί πειραματικά, αν τα βαθμωτά αλληλεπιδρούσαν μόνο ηλεκτρομαγνητικά.

4.4 Συμμετρία διασταύρωσης

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε την ηλεκτρομαγνητική σκέδαση δύο διαφορετικών βαθμωτών ϕ και χ . Θα διατυπώσουμε το ίδιο πρόβλημα κάπως διαφορετικά: μελετήσαμε την αντίδραση:

$$\phi + \chi \rightarrow \phi' + \chi', \quad (4.8)$$

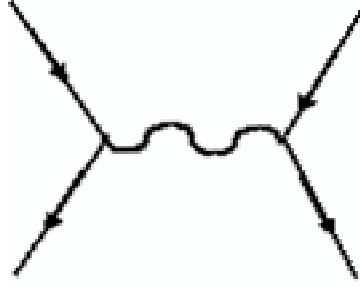
όπου οι τόνοι στο δεύτερο μέλος σημαίνουν απλά ότι, ενώ οι ορμές των δύο σωματιδίων πριν τη σκέδαση ήταν p_ϕ και p_χ , μετά τη σκέδαση έγιναν p'_ϕ και p'_χ . Από τη στοιχειώδη άλγεβρα ξέρουμε ότι, αν ισχύει η σχέση $a + b = c + d$, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι ισχύουν πολλές άλλες αλγεβρικές ισότητες, που προκύπτουν από την αρχική με μεταφορά των όρων από το ένα μέλος στο άλλο. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι θα ισχύουν επίσης οι: $a - c = -b + d$, $a = c + d - b$, και αρκετές άλλες. Το ερώτημα είναι μήπως ισχύει κάτι αντίστοιχο σε αντιδράσεις όπως η (4.8). Η απάντηση είναι θετική και αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που επιτρέπει να υπολογίζουμε τα πλάτη σκέδασης των αντιδράσεων που σχετίζονται με την (4.8), απλά τροποποιώντας το πλάτος σκέδασης της αρχικής αντίδρασης. Συγκεκριμένα, μπορεί κανείς, ξεκινώντας από την (4.8) να θεωρήσει την αντίδραση (επί παραδείγματι):

$$\phi + \bar{\phi}' \rightarrow \chi' + \bar{\chi}, \quad (4.9)$$

που προκύπτει από την (4.8) μεταφέροντας το χ από το αριστερό στο δεξιό μέλος και μετατρέποντάς το στο αντισωματίδιό του $\bar{\chi}$, ενώ παρόμοια το ϕ' μεταφέρθηκε από το δεξιό στο αριστερό μέλος μετατρέπόμενο και αυτό στο αντισωματίδιό του $\bar{\phi}'$. Η μεγάλη διευκόλυνση είναι ότι μπορεί κανείς πολύ απλά να υπολογίσει το πλάτος σκέδασης για την αντίδραση (4.9) χωρίς να καταφύγει π.χ. στα διαγράμματα Feynman, απλά κάνοντας μετατροπές στο γνωστό πλάτος σκέδασης της αντίδρασης (4.8). Ας ξεκινήσουμε από το πλάτος σκέδασης της (4.8), που δίνεται από την εξίσωση (4.7):

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(\phi + \chi \rightarrow \phi' + \chi') = -ie^2 Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot (p_\chi + p'_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2}. \quad (4.10)$$

Τώρα, στην αντίδραση (4.9) υπάρχουν δύο σωματίδια, τα χ και ϕ' , τα οποία έχουν μετατραπεί στα αντισωματίδιά τους $\bar{\chi}$ και $\bar{\phi}'$, λόγω αλλαγής θέσης στην εξίσωση συγκριτικά με την (4.8). Θα περιγράψουμε αυτήν την αλλαγή με το να βάλουμε, στην (4.10), την ποσότητα $-p_\chi$ εκεί που βρισκόταν η μεταβλητή p_χ και την ποσότητα $-p'_\phi$ εκεί που βρισκόταν η μεταβλητή p'_ϕ . Αυτό ισοδυναμεί με περιγραφή των αντισωματιδίων $\bar{\chi}$ και $\bar{\phi}'$ με τη βοήθεια λύσεων αρνητικής ενέργειας των αντίστοιχων εξισώσεων Klein-Gordon. Πράγματι, η συνιστώσα E_χ του τετρανύσματος $p_\chi = (E_\chi, \vec{p}_\chi)$ είναι θετική, αφού παριστάνει πραγματικό σωματίδιο, οπότε η συνιστώσα $-E_\chi$ του τετρανύσματος $-p_\chi = (-E_\chi, -\vec{p}_\chi)$ θα είναι αρνητική, δηλαδή θα



Σχήμα 4.2:

παριστάνει λύση αρνητικής ενέργειας, που ερμηνεύεται ως αντισωματίδιο. Ακριβώς αντίστοιχα πράγματα ισχύουν για το αντισωματίδιο $\bar{\phi}'$, δηλαδή η $-E'_\phi < 0$. Η (4.10) μετατρέπεται στην:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(\phi + \bar{\phi}' \rightarrow \chi' + \bar{\chi}) &= -ie^2 Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + [-p'_\phi]) \cdot ([-p_\chi] + p'_\chi)}{(p_\phi - [-p'_\phi])^2} \\ \Rightarrow -i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(\phi + \bar{\phi}' \rightarrow \chi' + \bar{\chi}) &= -ie^2 Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi - p'_\phi) \cdot (-p_\chi + p'_\chi)}{(p_\phi + p'_\phi)^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Αν τώρα σχεδιάσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα (που θα είναι του τύπου του σχήματος 4.2), θα δούμε ότι πράγματι, το πλάτος σκέδασης δίνεται από την (4.11). (Σημειώνουμε ότι, αν τα ϕ και $\bar{\phi}$, δηλαδή σωματίδιο και αντισωματίδιο, βρίσκονται στο ίδιο μέλος της αντίδρασης, όπως εδώ, θα έχουμε συγχώνευση των δύο σ' ένα ενδιαμέσο φωτόνιο (μετά ακολουθεί ανάλυση του ενδιαμέσου φωτονίου σε ζεύγος χ και $\bar{\chi}$)).

Δηλαδή, δε χρειάζεται να κάνουμε τη διαδικασία από την αρχή όταν ξέρουμε το πλάτος μιας από τις συναρτημένες αντιδράσεις. Αρκεί να αλλάξουμε τα κατάλληλα πρόσημα και ο υπολογισμός έχει τελειώσει. Είναι σαφές ότι αυτή η διαδικασία μας διευκολύνει πολύ, γιατί με έναν μόνο υπολογισμό μπορούμε να βρούμε πλάτη που αναφέρονται σε πολλές διαφορετικές μεταξύ τους διαδικασίες. Για παράδειγμα, αν θέλουμε το πλάτος για την $\phi + \bar{\chi}' \rightarrow \phi' + \bar{\chi}$, αρκεί να πάμε στην (4.10) και να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $p_\chi \rightarrow [-p_\chi]$, $p'_\chi \rightarrow [-p'_\chi]$, δηλαδή αλλάζουμε τα πρόσημα μόνο σ' εκείνα που άλλαξαν μέλος μέσα στην αντίδραση:

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(\phi + \bar{\chi}' \rightarrow \phi' + \bar{\chi}) = -ie^2 Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot ([-p_\chi] + [-p'_\chi])}{(p_\phi - p'_\phi)^2}. \quad (4.12)$$

Αυτή η έκφραση διαφέρει από την αρχική μόνο κατά ένα πρόσημο και μας λέει ότι η ενεργός διατομή σκέδασης του ϕ με το αντισωματίδιο $\bar{\chi}$ είναι η ίδια (σ' αυτήν την τάξη) με την ενεργό διατομή της σκέδασης του ϕ με το αντίστοιχο σωματίδιο χ . (Τα σωματίδια εδώ δε βρίσκονται στο ίδιο μέλος με τα αντισωματίδια, άρα δεν έχουμε

συγχωνεύσεις, όπως πριν, αλλά ανταλλαγή φωτονίου). Μπορεί κανείς να θεωρήσει μια τρίτη δυνατότητα, την $\phi \rightarrow \chi' + \phi' + \bar{\chi}$. Δηλαδή το ϕ να εκπέμψει ένα ϕ' κι ένα φωτόνιο, το οποίο θα αναλυθεί περαιτέρω σ' ένα ζεύγος χ' και $\bar{\chi}$. Το πλάτος θα είναι απλά:

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(\phi \rightarrow \chi' + \phi' + \bar{\chi}) = -ie^2 Q_\phi Q_\chi \frac{(p_\phi + p'_\phi) \cdot ([-p_\chi] + p'_\chi)}{(p_\phi - p'_\phi)^2}. \quad (4.13)$$

Κεφάλαιο 5

Σπινωριακά Πεδία

5.1 Εξίσωση του Dirac

Είδαμε τα προβλήματα με την εξίσωση Klein-Gordon. Η ιδέα ήταν να αντικαταστήσει κανείς στην εξίσωση διασποράς $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ το E με $i\frac{\partial}{\partial t}$ και το \vec{p} με $-i\vec{\nabla}$, ώστε να πάρει την εξίσωση $(\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi = 0$ και να επιχειρήσει να τη λύσει. Το πρόβλημα, βέβαια είναι ότι καταλήγουμε, για λύσεις επιπέδων κυμάτων $e^{-ip \cdot x}$, και πάλι στη σχέση διασποράς που έχει ως λύσεις και τις αρνητικές ενέργειες $-\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Σε επίπεδο εξίσωσης το πρόβλημα έχει τη ρίζα του στο γεγονός ότι εμφανίζεται η δεύτερη χρονική παράγωγος ∂_{tt} , οπότε οι δύο παραγωγίσεις κατεβάζουν το E^2 και έτσι προκύπτουν υποχρεωτικά δύο τιμές για την ενέργεια. Στην εξίσωση Schrödinger, που έχει μόνο πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο, τέτοιο πρόβλημα δεν εμφανίζεται. Ο Dirac σκέφτηκε να λύσει το πρόβλημα επινοώντας μια Χαμιλτονιανή \hat{H}_D που να αναπαριστάνει απ' ευθείας τη ρίζα $\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, ώστε η εξίσωση που θα πρέπει να λυθεί να είναι η $i\partial_t\psi = \hat{H}_D\psi$, στην οποία η χρονική παράγωγος είναι πρώτης τάξης και δεν έχει τέτοια προβλήματα. Τονίζουμε ότι ψάχνουμε για την τετραγωνική ρίζα **τελεστών** (όπως του τελεστή της ορμής \vec{p}). Μετέθεσε δηλαδή το πρόβλημα στο να βρεθεί μια Χαμιλτονιανή, τέτοια ώστε:

$$\hat{H}_D^2 = \hat{\vec{p}}^2 + m^2.$$

Επί πλέον, έψαχνε για Χαμιλτονιανή γραμμική ως προς τον τελεστή της ορμής (και τη μάζα), οπότε μια παραμετρική που έχει πια καθιερωθεί από την παράδοση είναι:

$$\hat{H}_D = \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \hat{\vec{p}} + m), \quad \vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Τα $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ δε γίνεται να είναι απλοί αριθμοί, γιατί θα απαιτήσουμε το τετράγωνο της Χαμιλτονιανής να μην έχει σταυρωτούς όρους και αυτό δε μπορεί να γίνει αν τα γ είναι αριθμοί. Θα δούμε ότι είναι πίνακες, στην πιο συνηθισμένη περίπτωση διάστασης 4×4 . Σχηματίζουμε το τετράγωνο αυτής της παράστασης, προσέχοντας

ιδιαίτερα τη μη μεταθετικότητα των όρων (τα \hat{p}^k μετατίθενται με τα γ και μεταξύ τους):

$$\begin{aligned}\hat{H}_D^2 &= \gamma^0 \left(\sum_{k=1,2,3} \gamma^k \hat{p}^k + m \right) \gamma^0 \left(\sum_{l=1,2,3} \gamma^l \hat{p}^l + m \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} (\gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \gamma^l + \gamma^0 \gamma^l \gamma^0 \gamma^k) \hat{p}^k \hat{p}^l + m \sum_{l=1,2,3} \gamma^0 \gamma^l \hat{p}^l + m \sum_{k=1,2,3} \gamma^k \gamma^0 \hat{p}^k + m^2 (\gamma^0)^2.\end{aligned}$$

Αυτή η παράσταση πρέπει να ισούται με $\hat{p}^2 + m^2$, οπότε:

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (5.1)$$

$$\gamma^k \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^k = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{2} [\gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \gamma^l + \gamma^0 \gamma^l \gamma^0 \gamma^k] = \delta^{kl}. \quad (5.3)$$

Η δεύτερη εξίσωση (5.2) μας πληροφορεί ότι τα γ^k αντι-μετατίθενται με το γ^0 . Άρα η εξίσωση (5.3) (λαμβάνοντας υπόψη τις (5.1) και (5.2)» δίνει:

$$\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k) = -\delta^{kl}. \quad (5.4)$$

Δηλαδή τα γ^k αντι-μετατίθενται και μεταξύ τους και το τετράγωνό τους είναι -1. Όλα αυτά μπορούν να παρασταθούν με τη σχέση:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

Αυτές είναι όλες οι συνθήκες που επιβάλλονται στους πίνακες γάμμα και το πρόβλημά μας έχει αναχθεί στην εύρεση τέτοιων πινάκων. Θα δώσουμε στη συνέχεια κάποιες αναπαραστάσεις των πινάκων, αλλά προς το παρόν αρκεί να διαβεβαιώσουμε ότι υπάρχουν. Από τους τέσσερις πρωταρχικούς πίνακες γάμμα μπορούμε να σχηματίσουμε καινούργιους, βασικά σχηματίζοντας γινόμενα. Ο κατάλογος είναι πεπερασμένος. Δύο απαραίτητοι ορισμοί είναι οι:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\sigma^{\nu\mu}, \quad \gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.$$

Οι ανεξάρτητοι πίνακες είναι 16:

$$\Gamma = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5\}.$$

Η πρώτη και η τελευταία κατηγορία αποτελούνται από έναν πίνακα, η δεύτερη και η τέταρτη από τέσσερις και η τρίτη από έξι. Μπορεί να δείξει κανείς, χρησιμοποιώντας την (5.5), ότι:

$$Tr \gamma^\mu = 0, \quad Tr \gamma^5 = 0, \quad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0.$$

Στο μεταξύ οι πίνακες γ^0 και $\gamma^0\gamma^k$ πρέπει να είναι ερμιτιανοί, αφού εμφανίζονται στη Χαμιλτονιανή, οπότε: μπορεί κανείς να δείξει και τα εξής:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^0\gamma^k)^\dagger = \gamma^0\gamma^k, (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, k = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφτούν συνοπτικά ως:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

Η εξίσωση που προτείνει ο Dirac είναι, όπως είπαμε, η: $i\partial_t\psi = \hat{H}_D\psi$, και αντικαθιστώντας τη Χαμιλτονιανή όπως την προσδιορίσαμε βρίσκουμε:

$$i\partial_t\psi = \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m)\psi = \gamma^0(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με γ^0 και λαμβάνοντας υπόψη ότι το τετράγωνο του πίνακα αυτού είναι μονάδα, η εξίσωση μπορεί να γραφτεί με την ισοδύναμη μορφή:

$$i\gamma^0\partial_t\psi = (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi \Rightarrow i\gamma^0\partial_t\psi + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\psi - m\psi.$$

που μπορεί να γραφτεί συνοπτικότερα ως:

$$\boxed{(i\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \Leftrightarrow (i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0.} \quad (5.8)$$

Αυτή είναι η περίφημη **εξίσωση του Dirac**. Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\cancel{\partial} \equiv \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu$, που είναι κοινότατος σ' αυτήν την εξίσωση. Εκτός από τους τελεστές παραγωγίσης, χρησιμοποιείται και για τετραδιανύσματα. Παραδείγματος χάριν:

$$\cancel{A} \equiv \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu A_\mu.$$

Άλλος συμβολισμός που χρησιμοποιήσαμε ήταν ο

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}).$$

Φυσικά, αφού ο τελεστής που δρα στην κυματοσυνάρτηση στην (5.8) είναι πίνακας 4×4 (και η μάζα θεωρείται ότι πολλαπλασιάζεται επί τον πίνακα μονάδα), και η ίδια η κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ δεν είναι πια ένας μιγαδικός αριθμός, όπως στις εξισώσεις Schrödinger ή Klein-Gordon, αλλά μια **στήλη με τέσσερεις μιγαδικές συνιστώσες**.

5.2 Μετασχηματισμοί Lorentz

Η εξίσωση του Dirac πρέπει να είναι συναλλοίωτη καθώς πηγαίνουμε σε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για να δούμε τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε,

θεωρούμε την εξίσωση του Dirac στο δεύτερο σύστημα αναφοράς, το τονούμενο, του οποίου οι συντεταγμένες συνδέονται με το αρχικό μέσω ενός μετασχηματισμού του Lorentz:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}, \quad x_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} x_{\nu} \quad (5.9)$$

όπου ισχύει η συνθήκη άθροισης των όμοιων δεικτών του Einstein, δηλαδή η σχέση π.χ. $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$ είναι η ίδια με την $x^{\mu'} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$. Επίσης οι δείκτες ανεβοκατεβαίνουν με τη βοήθεια της μετρικής: $a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}$, $a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu}$. Για να το συνδέσουμε με γνωστότερο συμβολισμό, θεωρούμε ότι το τονούμενο σύστημα έχει ταχύτητα μέτρου $v = \beta c$ κατά μήκος του άξονα των x και ότι οι άξονες των δύο συστημάτων παραμένουν παράλληλοι. Επίσης, τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, οι δύο αρχές των συντεταγμένων συμπίπτουν. Τότε, κατά τα γνωστά, οι μετασχηματισμοί του Lorentz είναι οι:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right), \quad x' = \gamma (x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

όπου $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Ο αντίστοιχος πίνακας Λ θα είναι:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\beta\gamma}{c} & 0 & 0 \\ -\beta\gamma c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Φυσικά μπορούμε να θέσουμε $c = 1$. Για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς (από το τονούμενο στο άτονο σύστημα αναφοράς) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους εξής συμβολισμούς:

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} x^{\nu'}, \quad x_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu'} x_{\nu'} \quad (5.10)$$

Αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$\Lambda^{\mu}_{\rho'} \Lambda^{\rho'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}. \quad (5.11)$$

Η εξίσωση του Dirac στο τονούμενο σύστημα αναφοράς θα είναι η:

$$\left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} - m \right) \psi'(x') = 0. \quad (5.12)$$

Θέτουμε

$$\boxed{\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),}$$

όπου ο $S(\Lambda)$ είναι πίνακας 4×4 , οπότε το πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτήτων μετασχηματισμού από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο ανάγεται στην εύρεση του

$S(\Lambda)$. Σημειώνουμε ότι το ∂_μ μετασχηματίζεται όπως ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δηλαδή όπως π.χ. το x_ν στην εξίσωση (5.9). Συγκεκριμένα:

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu.$$

Αντικαθιστούμε στην (5.12) και βρίσκουμε από άλλο δρόμο την εξίσωση που πρέπει να διέπει την $\psi(x)$:

$$i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu S(\Lambda)\psi(x) - mS(\Lambda)\psi(x) = 0 \Rightarrow iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu S(\Lambda)\partial_\nu\psi(x) - m\psi(x) = 0.$$

Συγκρίνοντας με την $i\gamma^\nu \partial_\nu\psi(x) - m\psi(x) = 0$ συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $S(\Lambda)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu S(\Lambda) = \gamma^\nu. \quad (5.13)$$

Για να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του $S(\Lambda)$, θεωρούμε μετασχηματισμούς απειροστά κοντά στον ταυτοτικό:

$$\Lambda_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad |\omega_{\mu\nu}| \ll 1$$

και δοκιμάζουμε να βρούμε πίνακα $S(\Lambda)$ της μορφής:

$$S(\Lambda) \approx 1 - \frac{i}{4}\beta^{\mu_1\nu_1}\omega_{\mu_1\nu_1}, \quad S^{-1}(\Lambda) \approx 1 + \frac{i}{4}\beta^{\mu_2\nu_2}\omega_{\mu_2\nu_2},$$

όπου τα ζητούμενα $\beta^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικοί πίνακες. Αυτό είναι αντανάκλαση του γεγονότος ότι και τα $\omega_{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικά, το οποίο προκύπτει με τη σειρά του από την απαίτηση

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^\nu \Lambda_\nu^\rho &= \delta_\mu^\rho \Rightarrow (g_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu)(g_\nu^\rho + \omega_\nu^\rho) \approx \delta_\mu^\rho \Rightarrow g_\mu^\nu g_\nu^\rho + g_\mu^\nu \omega_\nu^\rho + \omega_\mu^\nu g_\nu^\rho \approx g_\mu^\rho \\ &\Rightarrow g_{\mu\rho} + \omega_{\mu\rho} + \omega_{\rho\mu} \approx g_{\mu\rho} \Rightarrow \omega_{\mu\rho} = -\omega_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|\omega_{\mu\nu}| \ll 1$ και την ισότητα $\delta_\mu^\rho = g_\mu^\rho$. Αντικαθιστούμε στην (5.13) και περιοριζόμαστε μόνο στους όρους μέχρι και πρώτης τάξης, οπότε:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu S(\Lambda) = \gamma^\nu &\Rightarrow \left[1 + \frac{i}{4}\beta^{\mu_2\nu_2}\omega_{\mu_2\nu_2}\right] \gamma^\mu [g_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu] \left[1 - \frac{i}{4}\beta^{\mu_1\nu_1}\omega_{\mu_1\nu_1}\right] = \gamma^\nu \\ &\Rightarrow \gamma^\mu g_\mu^\nu + \gamma^\mu \omega_\mu^\nu - \gamma^\mu g_\mu^\nu \frac{i}{4}\beta^{\mu_1\nu_1}\omega_{\mu_1\nu_1} + \frac{i}{4}\beta^{\mu_2\nu_2}\omega_{\mu_2\nu_2}\gamma^\mu g_\mu^\nu = \gamma^\nu. \\ &\Rightarrow \gamma^\mu \omega_{\mu\nu} - \gamma^\mu g_{\mu\nu} \frac{i}{4}\beta^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma} + \frac{i}{4}\beta^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}\gamma^\mu g_{\mu\nu} = 0. \\ &\Rightarrow \omega_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2}\gamma^\mu \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \frac{1}{2}\gamma^\mu \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \gamma^\mu g_{\mu\nu} \frac{i}{4}\beta^{\rho\sigma} \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta + \frac{i}{4}\beta^{\rho\sigma} \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \gamma^\mu g_{\mu\nu} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma^\mu \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \gamma^\mu \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \gamma^\mu g_{\mu\nu} \frac{i}{2} \beta^{\rho\sigma} \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta + \frac{i}{2} \beta^{\rho\sigma} \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \gamma^\mu g_{\mu\nu} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma^\alpha \delta_\nu^\beta - \gamma^\beta \delta_\nu^\alpha - \frac{i}{2} g_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \beta^{\alpha\beta}] &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Υπενθυμίζουμε την ταυτότητα

$$[A, BC] = (AB + BA)C - B(AC + CA).$$

Με τη βοήθειά της μπορούμε να δείξουμε ότι η (5.14) μπορεί να ικανοποιηθεί από τους πίνακες $\sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = i\gamma^\alpha \gamma^\beta$, που ορίσαμε προηγουμένως:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] &= i[\gamma^\mu, \gamma^\alpha \gamma^\beta] = i(\gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu) \gamma^\beta - i\gamma^\alpha (\gamma^\mu \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\mu) = i2g^{\alpha\mu} \gamma^\beta - i\gamma^\alpha 2g^{\beta\mu} \\ \Rightarrow \frac{i}{2} g_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] &= \left(\frac{i}{2}\right) i2g^{\alpha\mu} \gamma^\beta g_{\mu\nu} - \left(\frac{i}{2}\right) i\gamma^\alpha g_{\mu\nu} 2g^{\beta\mu} = -\delta_\nu^\alpha \gamma^\beta + \delta_\nu^\beta \gamma^\alpha \\ &\Rightarrow -\frac{i}{2} g_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] + \delta_\nu^\beta \gamma^\alpha - \delta_\nu^\alpha \gamma^\beta, \end{aligned}$$

που δεν είναι άλλη από την εξίσωση (5.14). Μπορούμε, λοιπόν, να θέσουμε:

$$\beta^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

οπότε:

$$\psi'(x') \approx \left[1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right] \psi(x).$$

Για πεπερασμένους (μη απειροστούς) μετασχηματισμούς αυτός ο νόμος γενικεύεται στον:

$$\boxed{\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \exp \left[-\frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right] \psi(x).}$$

Θα δούμε τώρα κάτι πολύ σημαντικό. Περιοριζόμαστε και πάλι στους απειροστούς μετασχηματισμούς, για τους οποίους ισχύει:

$$\psi'(x') \approx \left[1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right] \psi(x). \quad (5.15)$$

Εξ άλλου οι γεννήτορες $J^{\mu\nu}$ της ομάδας των στροφών, που είναι οι γεννήτορες της στροφορμής ορίζονται ως:

$$\psi'(x) \approx \left[1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right] \psi(x). \quad (5.16)$$

Το ανάπτυγμα κατά Taylor για την $\psi'(x')$ δίνει:

$$\psi'(x') \approx \psi'(x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu) \approx \psi'(x) + \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^\mu} \omega^\mu_\nu x^\nu = \psi'(x) + \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^\mu} \omega_{\mu\nu} x^\nu.$$

Όμως το $\psi'(x)$ διαφέρει από το $\psi(x)$ κατά όρους πρώτης τάξης ως προς $\omega_{\mu\nu}$, οπότε μπορούμε, μέσα σ' αυτόν τον τύπο, να αντικαταστήσουμε $\frac{\partial\psi'(x)}{\partial x_\mu} \approx \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}$, οπότε:

$$\begin{aligned}\psi'(x') &\approx \psi'(x) + \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} \omega_{\mu\nu} x^\nu = \psi'(x) + \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ \Rightarrow \psi'(x') &= \psi'(x) + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \psi(x),\end{aligned}\quad (5.17)$$

όπου στο τελευταίο βήμα αξιοποιήσαμε την αντισυμμετρία του $\omega_{\mu\nu}$. Αντικαθιστώντας στην (5.17) (5.15) και (5.16) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\left[1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right] \psi(x) &\approx \left[1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right] \psi(x) + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \psi(x) \\ \Rightarrow -\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) &\approx -i J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) + \omega_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \psi(x) \\ \Rightarrow J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) &= i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \omega_{\mu\nu} \psi(x) + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x),\end{aligned}$$

όπου έχουμε κρατήσει μόνο όρους μηδενικής και πρώτης τάξης ως προς $\omega_{\mu\nu}$ και βλέπουμε ότι εμφανίζεται ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής $L^{\mu\nu} \equiv i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. Επί πλέον, η ισότητα πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των $\omega_{\mu\nu}$ και $\psi(x)$, οπότε:

$$\boxed{J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}.} \quad (5.18)$$

Αυτή η πολύ σημαντική σχέση μας δείχνει ότι η στροφορμή δεν εξαντλείται μόνο στην τροχιακή στροφορμή: τα φερμιόνια που περιγράφονται από την εξίσωση του Dirac έχουν και δεύτερο όρο στη στροφορμή τους, που είναι, βέβαια, το σπιν (ιδιοστροφορμή). Αν ιχνηλατήσουμε την προέλευση αυτού του αποτελέσματος στα βήματα που κάναμε θα διαπιστώσουμε ότι ο πρόσθετος όρος προήλθε από την ανάμειξη των τεσσάρων συνιστωσών της κυματοσυνάρτησης $\psi(x)$, που επέφερε ο πίνακας $S(\Lambda)$. Η προσέγγιση του Dirac στο πρόβλημα βλέπουμε ότι προσέφερε ένα ακόμα πλεονέκτημα: την αβίαστη ενσωματωμένη περιγραφή της ιδιοστροφορμής, η οποία στην εξίσωση π.χ. του Schrödinger γίνεται μ' έναν τεχνητό τρόπο και δεν περιλαμβάνεται στην ίδια την εξίσωση.

5.3 Λύσεις επιπέδων κυμάτων

Όπως είπαμε, το αρχικό κίνητρο του Dirac για την επινόηση της εξίσωσής του ήταν η αποφυγή των λύσεων με αρνητικές ενέργειες. Είναι όμως πολύ απλό να δούμε ότι σ' αυτό το στόχο **απέτυχε!** Η απόδειξη είναι πολύ απλή: ας πάμε στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, οπότε η λύση της εξίσωσης θα είναι: e^{-iEt} . Αντικαθιστώντας στην

(5.8) βρίσκουμε:

$$\left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) e^{-iEt} = 0 \Rightarrow (i\gamma^0 \partial_t - m) e^{-iEt} = 0 \Rightarrow \gamma^0 E - m = 0.$$

Όμως, όπως έχουμε πεί, ισχύει η σχέση: $(\gamma^0)^2 = 1$, οπότε οι ιδιοτιμές του γ^0 θα είναι οι ± 1 , οπότε οι πιθανές τιμές της ενέργειας θα είναι: $E = \pm m$. Άρα και πάλι έχουμε αρνητικές ιδιοτιμές! Ας προχωρήσουμε στη λύση της εξίσωσης και για μη μηδενικές ορμές. Ψάχνουμε λύσεις με μία από τις δύο μορφές:

$$\psi(x) \sim u_s(\vec{p})e^{-ip \cdot x}, \quad \psi(x) \sim v_s(\vec{p})e^{+ip \cdot x}. \quad (5.19)$$

Οι λύσεις u αντιστοιχούν σε ορμή $+\vec{p}$ και θετική ενέργεια $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, ενώ οι λύσεις v αντιστοιχούν σε ορμή $-\vec{p}$ και αρνητική ενέργεια $E_p = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Οι δείκτες s μπορούν να παίρνουν δύο τιμές ο καθένας και, όπως θα δούμε, αντιστοιχούν στο βαθμό ελευθερίας του σπιν. Δηλαδή έχουμε δύο λύσεις θετικής ενέργειας και άλλες δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας. Αν αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (5.19) στην εξίσωση του Dirac θα βρούμε:

$$\left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) u_s(\vec{p})e^{-ip \cdot x} = 0 \Rightarrow (\not{p} - m)u_s(\vec{p}) = 0 \quad (5.20)$$

και

$$\left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) v_s(\vec{p})e^{+ip \cdot x} = 0 \Rightarrow (\not{p} + m)v_s(\vec{p}) = 0. \quad (5.21)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στη συνέχεια τους συμβολισμούς:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad \bar{u}_s \equiv u_s^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v}_s \equiv v_s^\dagger \gamma^0.$$

Για αυτές τις εκφράσεις μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις που ικανοποιούν, αξιοποιώντας και την ιδιότητα $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$, που αναφέραμε στην (5.7). Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi = 0 &\Rightarrow \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \psi^\dagger) (-i(\gamma^\mu)^\dagger) - m\psi^\dagger = 0 \\ &\Rightarrow -i \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^0 (\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0) - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0 \\ &\Rightarrow -i \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \bar{\psi}) (\gamma^\mu) - m\bar{\psi} = 0 \Rightarrow \bar{\psi} (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{\psi} (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0. \end{aligned}$$

Φυσικά, το σύμβολο $\overleftarrow{\not{p}}$ μας λέει ότι οι παραγωγίσεις δρουν προς τα αριστερά. Με αντίστοιχα βήματα μπορούμε να δείξουμε τις σχέσεις:

$$\bar{u}_s(\vec{p})[\not{p} - m] = 0, \quad \bar{v}_s(\vec{p})[\not{p} + m] = 0. \quad (5.22)$$

Οι κανονικοποιήσεις των u και v μπορούν να προσδιοριστούν από τις απαιτήσεις:

$$\begin{aligned} u_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(\vec{p}) &= 2E_p\delta_{s_1s_2}, & v_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(\vec{p}) &= 2E_p\delta_{s_1s_2}, \\ v_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(-\vec{p}) &= 0, & u_{s_1}^\dagger(\vec{p})v_{s_2}(-\vec{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Μπορεί να δείξει κανείς, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.20) και (5.21), ότι οι σχέσεις κανονικοποίησης μπορούν να γραφτούν, με την προϋπόθεση ότι $m \neq 0$, με τη μορφή:

$$\bar{u}_{s_1}(\vec{p})u_{s_2}(\vec{p}) = -\bar{v}_{s_1}(\vec{p})v_{s_2}(\vec{p}) = 2m\delta_{s_1s_2}. \quad (5.24)$$

5.3.1 Σχέση πληρότητας

Επισημαίνουμε ότι οι παραστάσεις $u\bar{u}$, $v\bar{v}$ είναι πίνακες 4×4 . Πράγματι, αν εμφανίσουμε ρητά τους δείκτες α, β που υποδηλώνουν τις τέσσερις συνιστώσες των u και \bar{u} , η παράσταση $u\bar{u}$ σημαίνει απλά έναν πίνακα που έχει ως στοιχείο $\alpha\beta$ την παράσταση $u_\alpha\bar{u}_\beta$. Θα δείξουμε τις ταυτότητες:

$$\boxed{\sum_s u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \not{p} - m} \quad (5.25)$$

Για να αποδείξουμε την πρώτη, αρκεί να δείξουμε ότι, αν δράσουμε με το αριστερό μέλος στα διανύσματα βάσης $u_{s=1}, u_{s=2}, v_{s=1}, v_{s=2}$, θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα που θα έδινε το δεξιό μέλος, αν δρούσε στα ίδια διανύσματα βάσης. Αριστερό μέλος:

$$\sum_s u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p})u_1(\vec{p}) = \sum_s u_s(\vec{p})2m\delta_{s1} = 2mu_1(\vec{p}).$$

Δεξιό μέλος:

$$[\not{p} + m]u_1(\vec{p}) = [m + m]u_1(\vec{p}) = 2mu_1(\vec{p}).$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (5.24). Παρόμοια προχωράμε και με τα υπόλοιπα διανύσματα βάσης και επίσης με τη δεύτερη σχέση πληρότητας. Αυτές οι σχέσεις θα αποδειχθούν **εξαιρετικά σημαντικές** όταν θα πρέπει να υπολογίσουμε ενεργούς διατομές που περιλαμβάνουν φερμιόνια.

5.4 Ρητές λύσεις της εξίσωσης του Dirac

Για να προχωρήσουμε σε ρητές λύσεις της εξίσωσης του Dirac είναι αναγκαίο να επιλέξουμε κάποια συγκεκριμένη αναπαράσταση των πινάκων γάμμα. Μια πολύ

συνηθισμένη επιλογή είναι εκείνη των Dirac και Pauli:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}}, \quad (5.26)$$

όπου το I είναι ο πίνακας μονάδα διάστασης 2×2 , το 0 είναι ο μηδενικός πίνακας διάστασης 2×2 και σ^k οι πίνακες του Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε σε ρητή λύση της εξίσωσης (5.20). Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \not{p} - m &= E_p \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m = \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \not{p} - m &= \begin{bmatrix} E_p - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E_p - m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο τελεστής είναι ένας πίνακας 4×4 που χωρίζεται σε υποπίνακες 2×2 . Βασιζόμενοι σ' αυτό γράφουμε την κυματοσυνάρτηση $u_s(\vec{p})$, που είναι στήλη τεσσάρων στοιχείων, με τη μορφή:

$$u_s = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix},$$

δηλαδή ως σύνθεση δύο κυματοσυναρτήσεων ϕ και χ , που η κάθε μία έχει δύο συνιστώσες. Η εξίσωση $(\not{p} - m)u_s(\vec{p}) = 0$ τότε γράφεται:

$$\begin{bmatrix} E_p - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E_p - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (E_p - m)\phi - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}\chi = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma}\phi - (E_p + m)\chi = 0 \end{array} \right\}.$$

Έχουμε ένα ομογενές σύστημα, το οποίο έχει μη τετριμμένη λύση (γιατί;). Οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις (π.χ. η δεύτερη) μπορεί να συσχετίσει τα ϕ και χ :

$$\chi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{(E_p + m)}\phi.$$

Παρατηρούμε ότι στο μη σχετικιστικό όριο, το ηλίκο του $|\vec{p}|$ με το $E_p + m$ είναι πολύ μικρό. Εξ αιτίας αυτού τα ϕ λέγονται μεγάλες συνιστώσες, ενώ τα χ μικρές συνιστώσες της κυματοσυνάρτησης, οι οποίες παίζουν ρόλο μόνο σε περιπτώσεις σχετικιστικών καταστάσεων. Οι συνιστώσες του ϕ αντιπροσωπεύουν τους δύο βαθμούς ελευθερίας του σπιν. Μπορεί κανείς να επιλέξει δύο γραμμικά ανεξάρτητα ϕ , τα

$$\phi_+ \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_- \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

που αντιπροσωπεύουν τις καταστάσεις σπιν επάνω και σπιν κάτω. Τότε η κυματοσυνάρτηση u μπορεί να γραφτεί:

$$u_{\pm} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \phi_{\pm} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{(E_p + m)} \phi_{\pm} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Ο παράγοντας $\sqrt{E_p + m}$ προστέθηκε ώστε η u_{\pm} να ικανοποιεί τη σχέση κανονικοποίησης (2.45). Με εντελώς παρόμοια βήματα μπορούμε να βρούμε για την v :

$$v_{\pm} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{(E_p + m)} \chi_{\pm} \\ \chi_{\pm} \end{bmatrix}, \quad \chi_+ \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_- \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Ο παράγοντας $\sqrt{E_p + m}$ προστέθηκε και πάλι έτσι ώστε η v_{\pm} να ικανοποιεί τη σχέση κανονικοποίησης (5.23). Οι μεγάλες συνιστώσες τώρα είναι οι δύο κάτω.

5.5 Προβολικοί τελεστές

Αυτή η ενότητα με τον εντυπωσιακό τίτλο εξυπηρετεί στην πραγματικότητα έναν πολύ πρακτικό σκοπό με σημασία τόσο εννοιολογική όσο και υπολογιστική. Το θέμα είναι ότι, αφού η (ελεύθερη) εξίσωση του Dirac έχει πολλαπλές λύσεις (με θετικές ή αρνητικές ενέργειες και με διάφορες κατευθύνσεις για το σπιν), πρέπει να υπάρχει κάποιο όργανο που να μας επιτρέπει να ξεχωρίζουμε τις διάφορες λύσεις μέσα από μια τυχαία κυματοσυνάρτηση.

5.5.1 Προβολή σε θετικές και αρνητικές ενέργειες

Οι κατάλληλοι τελεστές που κάνουν τέτοιου είδους προβολές είναι οι:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\pm \not{p} + m}{2m}. \quad (5.30)$$

Μπορεί κανείς να δείξει, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αντι-μετάθεσης των πινάκων γάμμα, ότι $\not{p}^2 = p^2$ και με βάση αυτή την ιδιότητα να δείξει τις σχέσεις:

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = 1.$$

Αξιοποιώντας τις εξισώσεις (5.20) και (5.21) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Lambda_+(\vec{p})u_s(\vec{p}) &= u_s(\vec{p}), & \Lambda_-(\vec{p})v_s(\vec{p}) &= v_s(\vec{p}), \\ \Lambda_+(\vec{p})v_s(\vec{p}) &= 0, & \Lambda_-(\vec{p})u_s(\vec{p}) &= 0. \end{aligned}$$

Εξ άλλου οι εξισώσεις (5.22) μπορούν να μας διαβεβαιώσουν ότι:

$$\bar{u}_s(\vec{p})\Lambda_+(\vec{p}) = \bar{u}_s(\vec{p}), \quad \bar{v}_s(\vec{p})\Lambda_-(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p}),$$

$$\bar{v}_s(\vec{p})\Lambda_+(\vec{p}) = 0, \quad \bar{u}_s(\vec{p})\Lambda_-(\vec{p}) = 0.$$

Διαπιστώνουμε ότι, πράγματι, ο $\Lambda_+(\vec{p})$ προβάλλει σε θετικές ενέργειες, ενώ ο $\Lambda_-(\vec{p})$ σε αρνητικές ενέργειες.

5.5.2 Προβολή σε θετικές και αρνητικές ελικότητες

Αναφορικά με το σπιν πρέπει κανείς πρώτα να ορίσει τον άξονα κατά μήκος του οποίου το μετράει κανείς. Μια συνηθισμένη επιλογή είναι ο άξονας αυτός να είναι η κατεύθυνση της ορμής. Η προβολή του σπιν κατά μήκος της ορμής λέγεται ελικότητα. Η εξίσωση (5.18) μας πληροφορεί ότι ο τελεστής του σπιν δεν είναι άλλος από τον $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$. Ορίζουμε ένα τρι-διάνυσμα:

$$\vec{\Sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$$

και κατασκευάζουμε έναν τελεστή προβάλλοντας τον $\vec{\Sigma}$ κατά μήκος της ορμής:

$$\vec{\Sigma}_{\vec{p}} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

Οι τελεστές προβολής πάνω στις ελικότητες ορίζονται ως εξής:

$$\Pi_{\pm}(\vec{p}) \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \vec{\Sigma}_{\vec{p}}). \quad (5.31)$$

Οι τελεστές αυτοί έχουν ιδιότητες αντίστοιχες των Λ_{\pm} :

$$\Pi_{\pm}^2 = \Pi_{\pm}, \quad \Pi_+\Pi_- = \Pi_-\Pi_+ = 0, \quad \Pi_+ + \Pi_- = 1.$$

Εξ άλλου, αυτοί οι τελεστές μετατίθενται με τους Λ_{\pm} :

$$[\Lambda_+(\vec{p}), \Pi_{\pm}(\vec{p})] = 0, \quad [\Lambda_-(\vec{p}), \Pi_{\pm}(\vec{p})] = 0.$$

Η τελευταία ιδιότητα εγγυάται ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ιδιοκαταστάσεις ταυτόχρονα των $\Lambda_{\pm}(\vec{p})$ και των $\Pi_{\pm}(\vec{p})$. Για παράδειγμα, αν η ορμή κατευθύνεται στον άξονα των z , μπορούμε να δείξουμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις των εξισώσεων (5.28) και (5.29) γίνονται:

$$u_{\pm} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \phi_{\pm} \\ \frac{p_z \sigma^3}{(E_p + m)} \phi_{\pm} \end{bmatrix} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \phi_{\pm} \\ \pm \frac{p_z}{(E_p + m)} \phi_{\pm} \end{bmatrix},$$

$$v_{\pm} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{p_z \sigma^3}{(E_p + m)} \chi_{\pm} \\ \chi_{\pm} \end{bmatrix} = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \pm \frac{p_z}{(E_p + m)} \chi_{\pm} \\ \chi_{\pm} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς ο $\vec{\Sigma}_{\vec{p}}$ μεταπίπτει στον Σ^3 :

$$\vec{\Sigma}_{\vec{p}} \rightarrow \Sigma^3 = \sigma^{12} = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] = i\gamma^1\gamma^2 = i \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}_{\vec{p}} u_{\pm} &= \pm u_{\pm}, \quad \vec{\Sigma}_{\vec{p}} v_{\pm} = \pm v_{\pm} \\ \Pi_{+}(\vec{p})u_{+} &= \frac{1}{2}(1 + \vec{\Sigma}_{\vec{p}})u_{+} = u_{+}, \quad \Pi_{+}(\vec{p})u_{-} = \frac{1}{2}(1 + \vec{\Sigma}_{\vec{p}})u_{-} = 0, \\ \Pi_{-}(\vec{p})u_{+} &= \frac{1}{2}(1 - \vec{\Sigma}_{\vec{p}})u_{+} = 0, \quad \Pi_{-}(\vec{p})u_{-} = \frac{1}{2}(1 - \vec{\Sigma}_{\vec{p}})u_{-} = u_{-}.\end{aligned}$$

Αντίστοιχες ισότητες ισχύουν για τις v_{\pm} . Καταγράφουμε σε συνοπτική μορφή τις σχετικές ισότητες:

$$\Pi_{+}(\vec{p})u_{+} = u_{+}, \quad \Pi_{-}(\vec{p})u_{-} = u_{-}, \quad \Pi_{+}(\vec{p})v_{+} = v_{+}, \quad \Pi_{-}(\vec{p})v_{-} = v_{-}.$$

Δηλαδή τα u_{+} , v_{+} έχουν θετική ελικότητα και τα u_{-} , v_{-} έχουν αρνητική ελικότητα στην περίπτωση που η ορμή κατευθύνεται προς τα θετικά z . Για άλλες διευθύνσεις της ορμής αποδεικνύεται ότι τα μεν u_{+} και u_{-} , δεν έχουν καθορισμένη ελικότητα, αλλά ότι μπορεί κανείς να σχηματίσει δύο γραμμικούς συνδυασμούς των u_{+} και u_{-} , οι οποίοι θα έχουν θετική ή αρνητική ελικότητα. Επίσης, μπορεί κανείς να σχηματίσει δύο γραμμικούς συνδυασμούς των v_{+} και v_{-} , οι οποίοι θα έχουν θετική ή αρνητική ελικότητα. Πρέπει, βέβαια, να συνδυάζει κανείς λύσεις θετικής ενέργειας (u_{\pm}) μεταξύ τους ή λύσεις αρνητικής ενέργειας (v_{\pm}) μεταξύ τους και όχι π.χ. μια λύση u με μια λύση v , καθώς αυτός ο διαχωρισμός έχει ήδη γίνει και δεν υπάρχει φόβος να διορθώνουμε κάποιο πρόβλημα σχετικό με την ελικότητα καταστρέφοντας ό,τι έχουμε φτιάξει σχετικά με τις ενέργειες, δεδομένου ότι, όπως είπαμε, τα δύο σύνολα προβολικών τελεστών μετατίθενται μεταξύ τους.

5.5.3 Άλλες προβολές

Απλά αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλες προβολές. Η ελικότητα δεν μπορεί να μας βοηθήσει στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, γιατί εκεί η ορμή είναι μηδέν, δηλαδή δεν έχει διεύθυνση. Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε κάποιον αυθαίρετα ορισμένον άξονα, αλλά η διατύπωση έχει τεχνικές επιπλοκές και γι' αυτό δεν θα την εξετάσουμε εδώ. Μια ακόμα χρήσιμη προβολή είναι η λεγόμενη χειραλικότητα. Οι προβολικοί τελεστές ορίζονται ως:

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

Στην περίπτωση σωματιδίων των οποίων η μάζα τείνει στο μηδέν, $m \rightarrow 0$, οι τελεστές $\Pi_{\pm}(\vec{p})$ τείνουν στους $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$.

5.6 Λαγκρανζιανή, Χαμιλτονιανή και ρεύμα του Dirac

Έχοντας βρεί την εξίσωση του Dirac μπορούμε να επινοήσουμε μια Λαγκρανζιανή πυκνότητα που να την παράγει, δηλαδή τέτοια ώστε οι αντίστοιχες εξισώσεις

Euler-Lagrange να δίνουν την εξίσωση του Dirac. Μπορεί να το κάνει κάποιος δοκιμάζοντας και το αποτέλεσμα είναι:

$$\boxed{\mathcal{L}_D = \bar{\psi}[i\cancel{\partial} - m]\psi.} \quad (5.32)$$

Η (5.32) μπορεί να γραφτεί αναλυτικά με δείκτες ως εξής:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_\alpha [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}] \psi_\beta.$$

Αν μεταβάλλουμε το πεδίο $\bar{\psi}_\alpha$, η εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}_\alpha}$$

θα γίνει:

$$0 = [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}] \psi_\beta \Rightarrow [i\cancel{\partial} - m]\psi = 0.$$

Για να προχωρήσουμε στη Χαμιλτονιανή, θα μας χρειαστεί η συζυγής ορμή:

$$p_\beta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_0 \psi_\beta)} = \frac{\partial [\bar{\psi}_\alpha [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}] \psi_\beta]}{\partial (\partial_0 \psi_\beta)} = \frac{\partial [i\bar{\psi}_\alpha (\gamma^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \psi_\beta + \dots]}{\partial (\partial_0 \psi_\beta)} = i\bar{\psi}_\alpha (\gamma^0)_{\alpha\beta},$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα προκύπτει από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του Dirac με τη γνωστή διαδικασία:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= p_\beta \partial_0 \psi_\beta - \mathcal{L}_D = i\bar{\psi}_\alpha (\gamma^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \psi_\beta - \mathcal{L}_D \\ &= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi} [i\gamma^0 \partial_0 \psi + i \sum_{k=1,2,3} \gamma^k \partial_k \psi - m\psi] \\ &= \bar{\psi} [-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi + m\psi], \end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{\mathcal{H}_D = \bar{\psi} [-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m]\psi.} \quad (5.33)$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα (5.32) μένει αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow e^{-iq\theta} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{iq\theta},$$

όπου το q θα ερμηνευτεί ως το φορτίο του φερμιονίου και το θ είναι μια φάση που δεν εξαρτάται από το x . Είναι γνωστό ότι σε κάθε τέτοια συμμετρία αντιστοιχεί ένα διατηρούμενο ρεύμα, που στην προκειμένη περίπτωση υπολογίζεται ως εξής:

$$\psi_\beta \rightarrow (1 - iq\epsilon)\psi_\beta \Rightarrow \delta\psi_\beta = \epsilon(-iq\psi_\beta) \equiv \epsilon\Delta\psi_\beta, \quad \Delta\psi_\beta = -iq\psi_\beta.$$

$$J^\mu = \sum_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi_\beta)} \Delta\psi_\beta = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \psi_\beta - m\delta_{\alpha\beta} \psi_\beta]}{\partial (\partial_\mu \psi_\beta)} \Delta\psi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \bar{\psi}_\alpha [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}] \Delta\psi_\beta = \sum_{\alpha,\beta} \bar{\psi}_\alpha [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}] (-iq\psi_\beta) \equiv q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Δηλαδή το διατηρούμενο ρεύμα είναι η έκφραση:

$$\boxed{J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}, \quad (5.34)$$

που συνδέεται με το διατηρούμενο φορτίο

$$Q = \int d^3x J^0 = q \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = q \int d^3x \psi^\dagger\psi. \quad (5.35)$$

5.7 Ανάπτυγμα Fourier και κβάντωση

Το ανάπτυγμα Fourier του φερμιονικού πεδίου θα γίνει στη γραμμή του αντίστοιχου αναπτύγματος (1.25) για το φορτισμένο βαθμωτό πεδίο:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x}],$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [\hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x} + \hat{b}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}].$$

Και τούτο γιατί τα φερμιόνια είναι ως επί το πλείστον φορτισμένα (τα αφόρτιστα νετρίνα απαιτούν διαφορετική αντιμετώπιση). Γράφουμε, λοιπόν:

$$\boxed{\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=1,2} [\hat{a}_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{+ip\cdot x}],}$$

$$\boxed{\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=1,2} [\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p})e^{+ip\cdot x} + \hat{b}_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x}].} \quad (5.36)$$

Δηλαδή η αλλαγή είναι απλά ότι έχουν περιληφθεί και οι κυματοσυναρτήσεις. Μπορούμε να εκφράσουμε τη Χαμιλτονιανή (5.33) συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Σημειώνουμε τα προαπαιτούμενα:

$$[-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m]u_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = [+ \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m]u_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = \gamma_0 E_p u_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (5.20), και παρόμοια:

$$[-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m]v_s(\vec{p})e^{+ip\cdot x} = [- \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m]v_s(\vec{p})e^{+ip\cdot x} = -\gamma_0 E_p v_s(\vec{p})e^{+ip\cdot x},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (5.21). Είμαστε έτοιμοι να επεξεργαστούμε την Χαμιλτονιανή:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_D = \int d^3x \hat{\psi} [-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m] \hat{\psi} \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \sum_{s_1=1,2} [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1)\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1)e^{+ip_1\cdot x} + \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1)\bar{v}_{s_1}(\vec{p}_1)e^{-ip_1\cdot x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m] \int \frac{d^3 p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} \sum_{s_2=1,2} [\hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x} + \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) e^{+ip_2 \cdot x}] \\
&= \int d^3 x \int \frac{d^3 p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \sum_{s_1=1,2} [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1) e^{+ip_1 \cdot x} + \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x}] \\
& \int \frac{d^3 p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} \sum_{s_2=1,2} [\hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) (\gamma_0 E_{p_2}) u_{s_2}(\vec{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x} + \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) (-\gamma_0 E_{p_2}) v_{s_2}(\vec{p}_2) e^{+ip_2 \cdot x}].
\end{aligned}$$

Θα κάνουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς x , που θα δώσει συναρτήσεις δέλτα:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int d^3 x \sum_{s_1=1,2} \sum_{s_2=1,2} \int \frac{d^3 p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \int \frac{d^3 p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} E_{p_2} \\
& \quad [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) e^{+ip_1 \cdot x} + \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x}] \\
& \quad [\hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x} - \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) e^{+ip_2 \cdot x}] \\
&= \sum_{s_1=1,2} \sum_{s_2=1,2} \int \frac{d^3 p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \int \frac{d^3 p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} E_{p_2} \\
& \quad [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) \int d^3 x e^{+i(p_1 - p_2) \cdot x} \\
& \quad - \hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) \int d^3 x e^{+i(p_1 + p_2) \cdot x} \\
& \quad + \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) \int d^3 x e^{-i(p_1 + p_2) \cdot x} \\
& \quad - \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) \int d^3 x e^{-i(p_1 - p_2) \cdot x}] \\
&= \sum_{s_1=1,2} \sum_{s_2=1,2} \int \frac{d^3 p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \int \frac{d^3 p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} E_{p_2} \\
& \quad [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) e^{i(E_{p_1} - E_{p_2})t} \\
& \quad - \hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) e^{i(E_{p_1} + E_{p_2})t} \\
& \quad + \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{a}_{s_2}(\vec{p}_2) u_{s_2}(\vec{p}_2) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) e^{-i(E_{p_1} + E_{p_2})t} \\
& \quad - \hat{b}_{s_1}(\vec{p}_1) v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) v_{s_2}(\vec{p}_2) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) e^{-i(E_{p_1} - E_{p_2})t}].
\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να απαλείψουμε τη μία από τις δύο ολοκληρώσεις, έστω την p_2 , αντικαθιστώντας την p_2 με $+p_1$ ή $-p_1$, ανάλογα με τη συνάρτηση δέλτα που επενεργεί στον κάθε όρο. Σ' όλες τις περιπτώσεις: $E_{p_2} = E_{p_1}$. Την ορμή που απομένει, την p_1 , θα την αντικαταστήσουμε με p , για λόγους απλότητας:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{s_1=1,2} \sum_{s_2=1,2} \int d^3 p [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_{s_2}(\vec{p}) u_{s_1}^\dagger(\vec{p}) u_{s_2}(\vec{p}) e^{i(E_p - E_p)t}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p})\hat{b}_{s_2}^\dagger(-p)u_{s_1}^\dagger(\vec{p})v_{s_2}(-\vec{p})e^{i(E_p+E_p)t} \\
& +\hat{b}_{s_1}(\vec{p})\hat{a}_{s_2}(-p)v_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(-\vec{p})e^{-i(E_p+E_p)t} \\
& -\hat{b}_{s_1}(\vec{p})\hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p})v_{s_1}^\dagger(\vec{p})v_{s_2}(\vec{p})e^{-i(E_p-E_p)t}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αξιοποιήσουμε τις σχέσεις κανονικοποίησης (5.23):

$$\begin{aligned}
u_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(\vec{p}) &= 2E_p\delta_{s_1s_2}, & v_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(\vec{p}) &= 2E_p\delta_{s_1s_2}, \\
v_{s_1}^\dagger(\vec{p})u_{s_2}(-\vec{p}) &= 0, & u_{s_1}^\dagger(\vec{p})v_{s_2}(-\vec{p}) &= 0,
\end{aligned}$$

και η σχέση απλοποιείται στην:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1=1,2} \sum_{s_2=1,2} \int d^3p [\hat{a}_{s_1}^\dagger(\vec{p})\hat{a}_{s_2}(\vec{p})(2E_p\delta_{s_1s_2}) - \hat{b}_{s_1}(\vec{p})\hat{b}_{s_2}^\dagger(\vec{p})(2E_p\delta_{s_1s_2})] \\
&\Rightarrow \hat{H} = \sum_{s=1,2} \int d^3p E_p [\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})].
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ οι τελεστές $\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p})$ των σωματιδίων και $\hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})$ των αντισωματιδίων δεν εμφανίζονται απλά με αντίστροφη σειρά (όπως στα μποζόνια) αλλά υπάρχει επί πλέον ένα αρνητικό πρόσημο, που είναι δυνατόν να δώσει αρνητική συνεισφορά στην ενέργεια. Δηλαδή η ενέργεια ως έχει μπορεί να μην είναι θετικά ορισμένη. Η θεραπεία είναι να εναλλάξουμε τη σειρά των $\hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})$, αλλά ταυτοχρόνως να αλλάξουμε και το πρόσημο. Δηλαδή να υποθέσουμε ότι $\hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \rightarrow -\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})$, που γενικότερα υποβάλλει την ιδέα να χρησιμοποιήσουμε σχέσεις **αντι-μετάθεσης** και όχι μετάθεσης για την κβάντωση:

$$\boxed{\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_{s'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{ss'}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'), \quad \{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{ss'}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')}, \quad (5.37)$$

$$\{A, B\} \equiv AB + BA.$$

Όλοι οι υπόλοιποι αντι-μεταθέτες απαιτούμε να είναι μηδέν. Με βάση αυτά ορίζουμε τη Χαμιλτονιανή του Dirac με βάση τη σχέση:

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{s=1,2} \int d^3p E_p [\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})]}. \quad (5.38)$$

Αυτός ο τελεστής είναι προφανώς θετικά ορισμένος, όπως θάπρεπε. Σημαντική παρατήρηση: είπαμε ότι όλοι οι αντι-μεταθέτες εκτός των (5.37) μηδενίζονται. Ειδικότερα:

$$\{\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\} = 0 \Rightarrow \hat{a}_s^{\dagger 2}(\vec{p}) = 0, \quad \{\hat{b}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})\} = 0 \Rightarrow \hat{b}_s^{\dagger 2}(\vec{p}) = 0.$$

Αυτές οι ιδιότητες σημαίνουν ότι δεν μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια ή δύο αντιφερμιόνια στην ίδια κβαντική κατάσταση, δηλαδή ότι τα φερμιόνια, όπως τα

κβαντώσαμε, ικανοποιούν αυτόματα την απαγορευτική αρχή του Pauli, δηλαδή υπακούουν σε στατιστική Fermi-Dirac. Η έκφραση (5.35) για το διατηρούμενο φερμιονικό φορτίο μπορεί επίσης να εκφραστεί συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Ακολουθώντας βήματα παρόμοια με της Χαμιλτονιανής και χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις αντι-μετάθεσης, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$Q = q \int d^3x \psi^\dagger \psi = q \sum_{s=1,2} \int d^3p [\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p})].$$

Παρατηρούμε ότι το φορτίο Noether που αντιστοιχεί στα αντιφερμιόνια είναι το αντίθετο εκείνου που αντιστοιχεί στα φερμιόνια.

5.8 Φερμιονικός διαδότης

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.6, ο διαδότης $i\Delta_F(x - x')$ του βαθμωτού πεδίου είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο η λύση της εξίσωσης

$$(\partial_{tt} - \vec{\nabla}_x^2 + m^2)\Delta_F(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x'),$$

που εκφράζεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως:

$$i\tilde{\Delta}_F(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Εντελώς αντίστοιχα, για τον τελεστή του Dirac, η λύση της εξίσωσης

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m]S(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')$$

βρίσκεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier:

$$iS(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} i\tilde{S}(p). \quad (5.39)$$

$$[p\!\!\!/ - m]i\tilde{S}(p) = 1 \Rightarrow [p^2 - m^2]i\tilde{S}(p) = i(p\!\!\!/ + m).$$

Καταλήξαμε σε μια αλγεβρική εξίσωση, της οποίας η λύση είναι απλή, με την εξαίρεση των μηδενισμών της παράστασης $p^2 - m^2$ όταν $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p$. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στο βαθμωτό πεδίο (παράγραφος 1.6) και το αποτέλεσμα ονομάζεται φερμιονικός διαδότης του Feynman:

$$\boxed{i\tilde{S}_F(p) = i \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p\!\!\!/ - m + i\epsilon}.} \quad (5.40)$$

Αντικαθιστώντας την (5.40) στην (5.39) βρίσκουμε:

$$iS_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} i\tilde{S}_F(p)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = [i\not{\partial} + m] i\Delta_F(x-x'), \quad (5.41)$$

όπου λάβουμε υπόψη ότι:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} i\tilde{\Delta}_F(p), \quad i\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.42)$$

Από τη σχέση (5.42) και την εξίσωση (1.40) που είχαμε δείξει για βαθμωτά πεδία, δηλαδή την:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} [\Theta(t-t') e^{-ip \cdot (x-x')} + \Theta(t'-t) e^{+ip \cdot (x-x')}],$$

προκύπτει ότι:

$$iS_F(x-x') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} [\Theta(t-t') [\not{p} + m] e^{-ip \cdot (x-x')} - \Theta(t'-t) [\not{p} - m] e^{+ip \cdot (x-x')}]. \quad (5.43)$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι:

$$iS_{F\alpha\beta}(x-x') = \langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle,$$

όπου ο ορισμός του χρονολογικού γινομένου είναι:

$$T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] = \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x'), \quad t > t',$$

$$T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] = -\bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x), \quad t < t'.$$

Όπως και το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, ο διαδότης $S_F(x-x')$ παριστάνει είτε σωματίδιο που διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου, είτε αντισωματίδιο που διαδίδεται κατά την ανάστροφη φορά του χρόνου.

Κεφάλαιο 6

Σπινοριακή Ηλεκτροδυναμική

6.1 Αναλλοιότητα βαθμίδας

Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο για τη βαθμωτή ηλεκτροδυναμική, η αλληλεπίδραση των φορτισμένων βαθμωτών σωματιδίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διατυπώνεται ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή πυκνότητα (για τα βαθμωτά σωματίδια η $\mathcal{L} = [\partial^\mu \phi^\dagger(x)][\partial_\mu \phi(x)] - m^2[\phi^\dagger(x)][\phi(x)]$), είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow \phi^\dagger(x) e^{+ieQ\Lambda}, \quad (6.1)$$

όπου το Λ είναι σταθερό, το e είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο και το Q είναι καθαρός αριθμός που υποδηλώνει το φορτίο του βαθμωτού πεδίου σε μονάδες του e .

Για να γενικευτεί αυτή η συμμετρία στην περίπτωση όπου το Λ δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από το x , είχαμε εισαγάγει ένα πεδίο $A_\mu(x)$, το οποίο μετασχηματιζόταν σύμφωνα με τον νόμο: $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$, και χρησιμοποιώντας αυτό σχηματίζαμε την συναλλοίωτη παράγωγο $D_\mu \phi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\phi(x)$. Με βάση αυτά τα δεδομένα είχαμε δείξει ότι: $D_\mu \phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda(x)} D_\mu \phi(x)$. Είχαμε ταυτίσει το $A^\mu(x)$ με το τετραδιάνυσμα δυναμικού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και προσθέσαμε στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα του βαθμωτού την Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, οπότε καταλήξαμε στην ολική Λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιέγραφε την αλληλεπίδραση φορτισμένων βαθμωτών πεδίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\mathcal{L}_{\phi A} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + [D^\mu \phi^\dagger(x)][D_\mu \phi(x)] - V(\phi^\dagger(x)\phi(x)).$$

Ο δεύτερος όρος υπενθυμίζουμε ότι σχετίζεται με την επιλογή βαθμίδας και το ξ είναι αυθαίρετη σταθερά, που συνήθως τίθεται ίση με τη μονάδα (βαθμίδα του Feynman).

Ανάλογη πορεία μπορεί να ακολουθηθεί για τη φερμιονική Λαγκρανζιανή πυκνό-

τητα (5.32):

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}[i\cancel{\partial} - m]\psi.$$

Είναι προφανές ότι η \mathcal{L}_D είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ieQ\Lambda}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{+ieQ\Lambda}, \quad (6.2)$$

αν το Λ δεν εξαρτάται από το x . Αν πάλι εισαγάγουμε το πεδίο $A_\mu(x)$ που απαιτούμε να μετασχηματίζεται όπως πριν ($A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$), και ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο του $\psi(x)$ παρόμοια με του $\phi(x)$ προηγουμένως:

$$D_\mu\psi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\psi(x)$$

μπορούμε να δούμε ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\boxed{\mathcal{L}_{\psi A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi(x)} \quad (6.3)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αυτή η παράσταση περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

6.2 Διαγράμματα Feynman

6.2.1 Κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις

Θα αναφέρουμε σύντομα ότι, ανάλογα με τα βαθμωτά πεδία, οι κυματοσυναρτήσεις των φερμιονίων ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} |f(\vec{p}, s)\rangle &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle, & |\bar{f}(\vec{p}, s)\rangle &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \\ \langle f(\vec{p}, s)| &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0|\hat{a}_s(\vec{p}), & \langle \bar{f}(\vec{p}, s)| &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \langle 0|\hat{b}_s(\vec{p}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Όπως στην περίπτωση των βαθμωτών, οι παράγοντες $\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}$ θα απλοποιηθούν με αντίστοιχους παράγοντες από τις ολοκληρώσεις και τις συναρτήσεις δέλτα, οπότε στους κανόνες που θα δώσουμε στη συνέχεια, δεν τους εμφανίζουμε καθόλου.

6.2.2 Κανόνες

Τα στοιχεία που συναποτελούν τους κανόνες Feynman για τη σπινωριακή ηλεκτροδυναμική (6.3) είναι τα εξής:

1. **Εσωτερικές γραμμές:** Υπάρχουν δύο πιθανοί τύποι εσωτερικών γραμμών.

(α) Του φερμιονικού πεδίου, (5.40): $i\tilde{S}_F(p) = i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}$, στην οποία αντιστοιχεί η παράσταση

$$i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

(β) Του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, στην οποία συνήθως επιλέγουμε τη βαθμίδα του Feynman, $\xi = 1$, οπότε προκύπτει η παράσταση:

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

2. **Εξωτερικές γραμμές:** Αρχικά διαφορετικές από την περίπτωση των βαθμωτών πεδίων είναι οι εξωτερικές γραμμές. Οι κανόνες τώρα είναι οι εξής:

(Α) Εξερχόμενο (από το διάγραμμα) φερμιόνιο με ορμή \vec{p} και σπιν (ή ελικότητα) s αναπαρίσταται με το $\bar{u}_s(\vec{p})$.

(Β) Εισερχόμενο (στο διάγραμμα) φερμιόνιο με ορμή \vec{p} και σπιν (ή ελικότητα) s αναπαρίσταται με το $u_s(\vec{p})$.

(Γ) Εξερχόμενο (από το διάγραμμα) αντιφερμιόνιο με ορμή \vec{p} και σπιν (ή ελικότητα) s αναπαρίσταται με το $v_s(\vec{p})$.

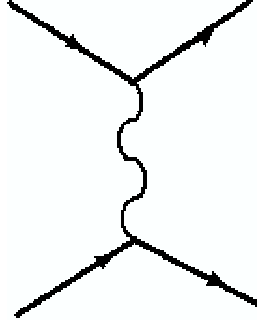
(Δ) Εισερχόμενο (στο διάγραμμα) αντιφερμιόνιο με ορμή \vec{p} και σπιν (ή ελικότητα) s αναπαρίσταται με το $\bar{v}_s(\vec{p})$.

3. **Η κορυφή** αντιστοιχεί στην παράσταση:

$$ieQ\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p'-k).$$

4. Για να γράψουμε τη συνεισφορά του διαγράμματος μπορούμε να ακολουθήσουμε τις φερμιονικές γραμμές στην ανάδρομη φορά και στην πορεία να καταγράφουμε τις συνεισφορές της κάθε γραμμής και της κάθε κορυφής. Θα γίνει πιο κατανοητό στο παράδειγμα, αλλά η ιδέα είναι ότι τα u και v είναι στήλες, άρα πρέπει να βρίσκονται στην δεξιά θέση σ' έναν πολλαπλασιασμό πινάκων, ενώ τα \bar{u} και \bar{v} είναι γραμμές, άρα πρέπει να βρίσκονται αριστερά. Όταν τελειώσουμε με τα φερμιόνια, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με τη συνεισφορά των φωτονίων.

5. Το άθροισμα όλων των συνεισφορών είναι (αν παραλείψουμε τα $((2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum p_f - \sum p_i)$ και τους τυχόν παράγοντες κανονικοποίησης) το πλάτος $i\mathcal{M}_{fi}^{(n)}$, για τη δεδομένη τάξη n .



Σχήμα 6.1:

Παράδειγμα 1: Για τη σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου από τις ορμές p_e και $p_{(\mu)}$ στις p_e' και $p_{(\mu)}'$ έχουμε μόνο ένα διάγραμμα που συνεισφέρει, αυτό που φαίνεται στο σχήμα 6.1. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (μ) όταν θέλουμε να αναφερθούμε στο μιονίο, για να μην υπάρξει σύγχυση με τον συμβολισμό μ , ο οποίος μπορεί να παριστάνει τη συνιστώσα μ ενός τετρανύσματος.

Το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο αναπαρίσταται με το $u_{s_e}(\vec{p}_e)$, ενώ το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο με το $\bar{u}_{s_e'}(\vec{p}_e')$. Παρόμοια, το εισερχόμενο μιονίο αναπαρίσταται με το $u_{s_{(\mu)}}(\vec{p}_{(\mu)})$, ενώ το εξερχόμενο μιονίο με το $\bar{u}_{s_{(\mu)}'}(\vec{p}_{(\mu)}')$. Η ορμή του φωτονίου θα ισούται με $q = p_e - p_e'$. Ακολουθώντας ανάποδα τη φερμιονική γραμμή του ηλεκτρονίου βρίσκουμε πρώτα το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο, άρα θα γράψουμε $\bar{u}_{s_e'}(\vec{p}_e')$. Η συνέχεια είναι η κορυφή, η οποία αντιστοιχεί στην παράσταση $ieQ_e\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_e - p_e' - q)$. Μια και έχουμε ηλεκτρόνιο $Q_e = -1$, άρα η μέχρι εδώ συνεισφορά της φερμιονικής γραμμής του ηλεκτρονίου είναι: $\bar{u}_{s_e'}(\vec{p}_e')ie(-1)\gamma^\rho(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_e - p_e' - q)$. Τέλος η φερμιονική γραμμή του ηλεκτρονίου καταλήγει στο εισερχόμενο ηλεκτρόνιο, άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με $u_{s_e}(\vec{p}_e)$ και η συνολική συνεισφορά της φερμιονικής γραμμής του ηλεκτρονίου είναι:

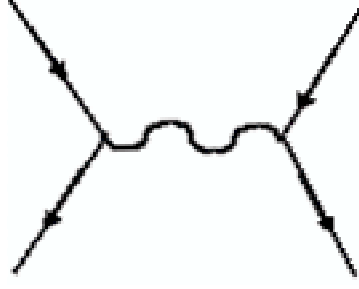
$$-ie\bar{u}_{s_e'}(\vec{p}_e')\gamma^\rho(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_e - p_e' - q)u_{s_e}(\vec{p}_e).$$

Δηλαδή προκύπτει ένας αριθμός και όχι πίνακας. Η αντίστοιχη συνεισφορά της φερμιονικής γραμμής του μιονίου είναι:

$$-ie\bar{u}_{s_{(\mu)}'}(\vec{p}_{(\mu)}')\gamma^\sigma(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{(\mu)} - p_{(\mu)}' + q)u_{s_{(\mu)}}(\vec{p}_{(\mu)}).$$

Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις δύο συνεισφορές και να μην ξεχάσουμε τη συνεισφορά του φωτονίου:

$$-\frac{ig_{\rho\sigma}}{q^2 + i\epsilon}(2\pi)^4.$$



Σχήμα 6.2:

Δηλαδή, στη δεύτερη τάξη, για την οποία μιλάμε, αφού έχουμε δύο κορυφές:

$$\int \left[-\frac{ig_{\rho\sigma}}{q^2 + i\epsilon} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \right] \\ \times [-ie\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_e - p'_e - q)u_{s_e}(\vec{p}_e)] \\ \times [-ie\bar{u}_{s'_\mu}(\vec{p}'_\mu)\gamma^\sigma(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\mu - p'_\mu + q)u_{s_\mu}(\vec{p}_\mu)] \\ = ie^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_e + p_\mu - p'_e - p'_\mu) \frac{1}{(p_e - p'_e)^2} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)] [\bar{u}_{s'_\mu}(\vec{p}'_\mu)\gamma_\rho u_{s_\mu}(\vec{p}_\mu)].$$

Παρατηρούμε ότι το $i\epsilon$ δε χρειάζεται πια και το παραλείπουμε. Επίσης, αν αγνοήσουμε τη συνάρτηση δέλτα διατήρησης της ορμής, θα βρούμε:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = ie^2 \frac{1}{(p_e - p'_e)^2} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)] [\bar{u}_{s'_\mu}(\vec{p}'_\mu)\gamma_\rho u_{s_\mu}(\vec{p}_\mu)].$$

Παράδειγμα 2: Για την αντίδραση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ θα έχουμε μόνο ένα διάγραμμα σε δεύτερη τάξη, αυτό που φαίνεται στο σχήμα 6.2.

Παριστάνουμε τα αντισωματίδια ως σωματίδια που πορεύονται αντίστροφα στο χρόνο και τα σωματίδια (ηλεκτρόνια) στην αρχική κατάσταση αποτελούνται από ένα εισερχόμενο ποζιτρόνιο (αντισωματίδιο), οπότε $\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1})$, κι ένα εισερχόμενο ηλεκτρόνιο (σωματίδιο), οπότε $u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})$. Μεσολαβεί η κορυφή $-ie\gamma^\rho$, οπότε η συνεισφορά της ηλεκτρονικής γραμμής θα είναι:

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - q)\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1})[-ie\gamma^\rho]u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2}).$$

Παρόμοια η μιονική γραμμή θα συνεισφέρει:

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q - p_{\mu1} - p_{\mu2})\bar{u}_{s_{\mu1}}(\vec{p}_{\mu1})[-ie\gamma^\sigma]v_{s_{\mu2}}(\vec{p}_{\mu2}),$$

γιατί στην τελική κατάσταση έχουμε εξερχόμενο σωματίδιο, άρα $\bar{u}_{s_{\mu1}}(\vec{p}_{\mu1})$, και εξερχόμενο αντισωματίδιο, άρα $v_{s_{\mu2}}(\vec{p}_{\mu2})$. Τέλος το φωτόνιο συνεισφέρει:

$$-\frac{ig_{\rho\sigma}}{q^2 + i\epsilon} \frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

οπότε συνολικά:

$$\begin{aligned} & \int \left[-\frac{ig_{\rho\sigma}}{q^2 + i\epsilon} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \right] \\ & \times [-ie(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - q) \bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] \\ & \times [-ie(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_{\mu1} - p_{\mu2}) \bar{u}_{s_{\mu1}}(\vec{p}_{\mu1}) \gamma^\sigma v_{s_{\mu2}}(\vec{p}_{\mu2})] \\ & = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mu1} + p_{\mu2} - p_{e1} - p_{e2}) \frac{ie^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] [\bar{u}_{s_{\mu1}}(\vec{p}_{\mu1}) \gamma_\rho v_{s_{\mu2}}(\vec{p}_{\mu2})]. \end{aligned}$$

Παραλείποντας τη συνάρτηση δέλτα καταλήγουμε στο:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] [\bar{u}_{s_{\mu1}}(\vec{p}_{\mu1}) \gamma_\rho v_{s_{\mu2}}(\vec{p}_{\mu2})].$$

6.3 Ενεργοί διατομές

Στα περισσότερα πειράματα σκέδασης φερμιονίων δεν μετράει κανείς τα σπιν των προσπιπτόντων ούτε των παραγομένων σωματιδίων. Αυτό σημαίνει ότι, αν θέλει κανείς να υπολογίσει την ενεργό διατομή της αντίδρασης, πρέπει να πάρει τον μέσο όρο των σπιν των προσπιπτόντων (υποθέτοντας ότι οι δύο προβολές του σπιν έχουν την ίδια πιθανότητα) και να αθροίσει στους πιθανούς συνδυασμούς σπιν των παραγομένων σωματιδίων. Δηλαδή, αν έχουμε υπολογίσει το πλάτος σκέδασης \mathcal{M} , η ενεργός διατομή θα είναι ανάλογη προς την παράσταση:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2.$$

Όπως είδαμε, στο \mathcal{M} , περιέχονται παραστάσεις της μορφής π.χ. $[\bar{u}\gamma^\rho v]$, της οποίας θα χρειαστούμε την μιγαδική συζυγή. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^0 \gamma^{\rho\dagger} \gamma^0 = \gamma^\rho$ των πινάκων γάμμα βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} [\bar{u}\gamma^\rho v]^* &= [\bar{u}\gamma^\rho v]^\dagger = [u^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho v]^\dagger = [v^\dagger \gamma^{\rho\dagger} \gamma^0 u] \\ &= [v^\dagger \gamma^0 \{\gamma^0 \gamma^{\rho\dagger} \gamma^0\} u] = [\bar{v}\gamma^\rho u] \Rightarrow [\bar{u}\gamma^\rho v]^* = [\bar{v}\gamma^\rho u], \end{aligned}$$

μια εξαιρετικά χρήσιμη ταυτότητα. Επομένως η παράσταση π.χ.

$$\Sigma \equiv \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{s_2}(\vec{p}_2)] [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{s_2}(\vec{p}_2)]^*,$$

που υπεισέρχεται στον υπολογισμό του τετραγώνου του πλάτους, θα πάρει τη μορφή:

$$\Sigma = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{s_2}(\vec{p}_2)] [\bar{v}_{s_2}(\vec{p}_2) \gamma^\sigma u_{s_1}(\vec{p}_1)].$$

6.3.1 Το τέχνασμα του Casimir

Το γεγονός ότι θέλουμε να αθροίσουμε στα σπιν s_1, s_2 , θα απλοποιήσει πολύ τα πράγματα. Για να προχωρήσουμε στην απλοποίηση εμφανίζουμε ρητά τους δείκτες που υπονοούνται στους πολλαπλασιασμούς πινάκων, δηλαδή γράφουμε την τελευταία έκφραση αναλυτικά ως:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sum_{s_1, s_2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1)]_\alpha [\gamma^\rho]_{\alpha\beta} [v_{s_2}(\vec{p}_2)]_\beta [\bar{v}_{s_2}(\vec{p}_2)]_\gamma [\gamma^\sigma]_{\gamma\delta} [u_{s_1}(\vec{p}_1)]_\delta \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left\{ \left(\sum_{s_1} [u_{s_1}(\vec{p}_1)]_\delta [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1)]_\alpha \right) [\gamma^\rho]_{\alpha\beta} \left(\sum_{s_2} [v_{s_2}(\vec{p}_2)]_\beta [\bar{v}_{s_2}(\vec{p}_2)]_\gamma \right) [\gamma^\sigma]_{\gamma\delta} \right\}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη σχέση πληρότητας (5.25) ισχύουν οι ισότητες:

$$\sum_{s_1} [u_{s_1}(\vec{p}_1)]_\delta [\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1)]_\alpha = (\not{p}_1 + m)_{\delta\alpha}, \quad \sum_{s_2} [v_{s_2}(\vec{p}_2)]_\beta [\bar{v}_{s_2}(\vec{p}_2)]_\gamma = (\not{p}_2 - m)_{\beta\gamma},$$

άρα

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} (\not{p}_1 + m)_{\delta\alpha} [\gamma^\rho]_{\alpha\beta} (\not{p}_2 - m)_{\beta\gamma} [\gamma^\sigma]_{\gamma\delta} \\ &\Rightarrow \Sigma = Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\rho (\not{p}_2 - m)\gamma^\sigma].\end{aligned}$$

Το άθροισμα στα σπιν μας έδωσε τη δυνατότητα να εκφράσουμε μια παράσταση με κυματοσυναρτήσεις ως το ίχνος ενός αθροίσματος γινομένων πινάκων γάμμα. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\not{p} = \sum_{\mu=0}^3 p_{(\mu)} \gamma^\mu.$$

6.3.2 Υπολογισμός ίχνων γινομένων πινάκων γάμμα

Για να υπολογίσει κανείς ίχνη γινομένων πινάκων γάμμα αρκεί να ξέρει μερικές ιδιότητές τους, που προκύπτουν από τις σχέσεις αντι-μετάθεσης

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0$$

και από τη σχέση $(\gamma^5)^2 = 1$. Παραθέτουμε τις πιο συνηθισμένες και αφήνουμε στον αναγνώστη την ευθύνη να τις αποδείξει.

1. Το ίχνος του γινομένου περιττού αριθμού πινάκων γάμμα είναι μηδέν. Επίσης το ίχνος ενός γινομένου σαν αυτό επί γ^5 είναι μηδέν.
2. $Tr(1) = 4$.
3. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \Rightarrow Tr(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b$.
4. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}]$

5. $Tr(\gamma^5) = 0$, $Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$.
6. $Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, όπου $\epsilon^{0123} = +1$ και οι υπόλοιπες συνιστώσες ορίζονται με βάση την αντισυμμετρία: $\epsilon^{1023} = -1$, $\epsilon^{1230} = +1$ κλπ.
7. $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha$.
8. $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha$.

6.4 Ενδεικτικοί υπολογισμοί

Θα εφαρμόσουμε τις τεχνικές που περιγράψαμε στους υπολογισμούς των αθροισμάτων πάνω στα σπιν για τα δύο παραδείγματα αντιδράσεων που εξετάσαμε προηγουμένως.

6.4.1 Αντίδραση $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$: πλάτος σκέδασης

Καταλήξαμε στην ακόλουθη έκφραση για το πλάτος σκέδασης:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-) = ie^2 \frac{1}{(p_e - p'_e)^2} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)][\bar{u}_{s'_{(\mu)}}(\vec{p}'_{(\mu)})\gamma_\rho u_{s_{(\mu)}}(\vec{p}_{(\mu)})].$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ποσότητα

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s_e, s_{(\mu)}} \sum_{s'_e, s'_{(\mu)}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2.$$

Εξετάζουμε χωριστά τις διαφορές συνεισφορές:

(1) Πρώτα η συνεισφορά της φερμιονικής γραμμής του ηλεκτρονίου:

$$\begin{aligned} \sum_{s_e, s'_e} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)][\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\sigma u_{s_e}(\vec{p}_e)]^* &= \sum_{s_e, s'_e} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)][\bar{u}_{s_e}(\vec{p}_e)\gamma^\sigma u_{s'_e}(\vec{p}'_e)] \\ &= \sum_{s'_e} \left[\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho \left(\sum_{s_e} u_{s_e}(\vec{p}_e)\bar{u}_{s_e}(\vec{p}_e) \right) \gamma^\sigma u_{s'_e}(\vec{p}'_e) \right] = \sum_{s'_e} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho (\not{p}_e + m_e) \gamma^\sigma u_{s'_e}(\vec{p}'_e)] \\ &= Tr[\gamma^\rho (\not{p}_e + m_e) \gamma^\sigma (\not{p}'_e + m_e)] = Tr[\gamma^\rho \not{p}_e \gamma^\sigma \not{p}'_e] + m_e^2 Tr[\gamma^\rho \gamma^\sigma]. \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα θυμηθήκαμε ότι το ίχνος περιττού αριθμού πινάκων γάμμα μηδενίζεται. Κατά τ' άλλα:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\rho \not{p}_e \gamma^\sigma \not{p}'_e] &= p_{e\kappa} p'_{e\lambda} Tr[\gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\sigma \gamma^\lambda] = 4p_{e\kappa} p'_{e\lambda} [g^{\rho\kappa} g^{\sigma\lambda} + g^{\rho\lambda} g^{\sigma\kappa} - g^{\rho\sigma} g^{\kappa\lambda}] \\ &= 4[p_e^\rho p_e'^\sigma + p_e^\sigma p_e'^\rho - g^{\rho\sigma} p_e \cdot p'_e], \end{aligned}$$

άρα:

$$\sum_{s_e, s'_e} [\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\rho u_{s_e}(\vec{p}_e)][\bar{u}_{s'_e}(\vec{p}'_e)\gamma^\sigma u_{s_e}(\vec{p}_e)]^* = 4[p_e^\rho p_e'^\sigma + p_e^\sigma p_e'^\rho - g^{\rho\sigma} p_e \cdot p'_e] + 4m_e^2 g^{\rho\sigma}.$$

(2) Η φερμιονική γραμμή του μιονίου δίνει αντίστοιχη συνεισφορά. Αλλάζει, βέβαια, η μάζα ($m_e \rightarrow m_{(\mu)}$) και οι δείκτες ρ και σ είναι κάτω και όχι επάνω, ώστε να μπορούν να αθροιστούν με τους πάνω δείκτες που συνεισφέρει η γραμμή του ηλεκτρονίου. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_{(\mu)}, s'_{(\mu)}} [\bar{u}_{s'_{(\mu)}}(\vec{p}'_{(\mu)}) \gamma_\rho u_{s_{(\mu)}}(\vec{p}_{(\mu)})] [\bar{u}_{s'_{(\mu)}}(\vec{p}'_{(\mu)}) \gamma_\sigma u_{s_{(\mu)}}(\vec{p}_{(\mu)})]^* \\ &= Tr[\gamma_\rho (\not{p}'_{(\mu)} + m_{(\mu)}) \gamma_\sigma (\not{p}_{(\mu)} + m_{(\mu)})] \\ &= 4[p_{(\mu)\rho} p'_{(\mu)\sigma} + p_{(\mu)\sigma} p'_{(\mu)\rho} - g_{\rho\sigma} p_{(\mu)} \cdot p'_{(\mu)}] + 4m_{(\mu)}^2 g_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Άρα η συνολική συνεισφορά ισούται με:

$$\begin{aligned} & |\overline{\mathcal{M}}|^2 (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{(p_e - p'_e)^2} \right)^2 \\ & Tr[\gamma^\rho (\not{p}_e + m_e) \gamma^\sigma (\not{p}'_e + m_e)] Tr[\gamma_\rho (\not{p}_{(\mu)} + m_{(\mu)}) \gamma_\sigma (\not{p}'_{(\mu)} + m_{(\mu)})] \\ &= \frac{1}{4} 16 \left(\frac{e^2}{(p_e - p'_e)^2} \right)^2 [p_e^\rho p_e'^\sigma + p_e^\sigma p_e'^\rho - g^{\rho\sigma} p_e \cdot p'_e + 4m_e^2 g^{\rho\sigma}] \\ & \quad \times [p_{(\mu)\rho} p'_{(\mu)\sigma} + p_{(\mu)\sigma} p'_{(\mu)\rho} - g_{\rho\sigma} p_{(\mu)} \cdot p'_{(\mu)} + 4m_{(\mu)}^2 g_{\rho\sigma}] \\ &= 8 \left(\frac{e^2}{(p_e - p'_e)^2} \right)^2 [(p_e \cdot p_{(\mu)})(p'_e \cdot p'_{(\mu)}) + (p_e \cdot p'_{(\mu)})(p_{(\mu)} \cdot p'_e) \\ & \quad + 2m_e^2 m_{(\mu)}^2 - m_e^2 p_{(\mu)} \cdot p'_{(\mu)} - m_{(\mu)}^2 p_e \cdot p'_e]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.4.2 Αντίδραση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$: πλάτος σκέδασης

Καταλήξαμε στην ακόλουθη έκφραση για το πλάτος σκέδασης:

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = ie^2 \frac{1}{(p_{e1} + p_{e2})^2} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] [\bar{u}_{s_{(\mu)1}}(\vec{p}_{(\mu)1}) \gamma_\rho v_{s_{(\mu)2}}(\vec{p}_{(\mu)2})].$$

Εξετάζουμε χωριστά τις διάφορες συνεισφορές:

(1) Πρώτα η συνεισφορά της φερμιονικής γραμμής του ηλεκτρονίου:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_{e1}, s_{e2}} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\sigma u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})]^* \\ &= \sum_{s_{e1}, s_{e2}} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2})] [\bar{u}_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2}) \gamma^\sigma v_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1})] \\ &= \sum_{s_{e1}} \left[\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho \left(\sum_{s_{e2}} u_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2}) \bar{u}_{s_{e2}}(\vec{p}_{e2}) \right) \gamma^\sigma v_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \right] \\ &= \sum_{s_{e1}} [\bar{v}_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1}) \gamma^\rho (\not{p}_{e2} + m_e) \gamma^\sigma v_{s_{e1}}(\vec{p}_{e1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr}[\gamma^\rho (\not{p}_{e2} + m_e) \gamma^\sigma (\not{p}_{e1} - m_e)] = \text{Tr}[\gamma^\rho \not{p}_{e2} \gamma^\sigma \not{p}_{e1}] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
&= p_{e1\kappa} p_{e2\lambda} \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\sigma \gamma^\lambda] - 4m_e^2 g^{\rho\sigma} \\
&= 4p_{e1\kappa} p_{e2\lambda} [g^{\rho\kappa} g^{\sigma\lambda} + g^{\rho\lambda} g^{\sigma\kappa} - g^{\rho\sigma} g^{\kappa\lambda}] - 4m_e^2 g^{\rho\sigma} \\
&= 4[p_{e1}^\rho p_{e2}^\sigma + p_{e1}^\sigma p_{e2}^\rho - g^{\rho\sigma} p_{e1} \cdot p_{e2} - m_e^2 g^{\rho\sigma}]
\end{aligned}$$

(2) Η φερμιονική γραμμή του μιονίου δίνει αντίστοιχη συνεισφορά, με τις μετατροπές που είχαμε και στην περίπτωση του ηλεκτρονίου:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s(\mu_1), s(\mu_2)} [\bar{v}_{s(\mu_1)}(\vec{p}(\mu_1)) \gamma^\rho u_{s(\mu_2)}(\vec{p}(\mu_2))] [\bar{v}_{s(\mu_1)}(\vec{p}(\mu_1)) \gamma^\sigma u_{s(\mu_2)}(\vec{p}(\mu_2))]^* \\
&= 4[p_{(\mu_1)}^\rho p_{(\mu_2)}^\sigma + p_{(\mu_1)}^\sigma p_{(\mu_2)}^\rho - g^{\rho\sigma} p_{(\mu_1)} \cdot p_{(\mu_2)} - m_{(\mu)}^2 g^{\rho\sigma}].
\end{aligned}$$

Άρα η συνολική συνεισφορά Σ ισούται με:

$$\begin{aligned}
&\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} \right)^2 \\
&\text{Tr}[\gamma^\rho (\not{p}_{e2} + m_e) \gamma^\sigma (\not{p}_{e1} - m_e)] \text{Tr}[\gamma^\rho (\not{p}_{(\mu_2)} + m_{(\mu)}) \gamma^\sigma (\not{p}_{(\mu_1)} - m_{(\mu)})] \\
&= \frac{1}{4} 16 \left(\frac{e^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} \right)^2 [p_{e1}^\rho p_{e2}^\sigma + p_{e1}^\sigma p_{e2}^\rho - g^{\rho\sigma} p_{e1} \cdot p_{e2} - m_e^2 g^{\rho\sigma}] \\
&\quad \times [p_{(\mu_1)\rho} p_{(\mu_2)\sigma} + p_{(\mu_1)\sigma} p_{(\mu_2)\rho} - g_{\rho\sigma} p_{(\mu_1)} \cdot p_{(\mu_2)} - m_{(\mu)}^2 g_{\rho\sigma}] \\
&= 8 \left(\frac{e^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} \right)^2 [(p_{e1} \cdot p_{(\mu_1)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu_2)}) + (p_{e1} \cdot p_{(\mu_2)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu_1)}) \\
&\quad + 2m_e^2 m_{(\mu)}^2 + m_e^2 (p_{\mu_1} \cdot p_{(\mu_2)}) + m_{(\mu)}^2 (p_{e1} \cdot p_{(e2)})]. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

6.5 Εξειδίκευση στο σύστημα κέντρου μάζας

Θεωρούμε τώρα ότι οι μάζες του ηλεκτρονίου και του μιονίου μπορούν σε καλή προσέγγιση να αμεληθούν (ότι δηλαδή είναι αμελητέες ως προς τις ορμές που εμπλέκονται. Τότε το κατάλληλο σύστημα αναφοράς για τους υπολογισμούς είναι το σύστημα κέντρου μάζας, στο οποίο οι (τριςδιάστατες) ορμές του ηλεκτρονίου και του μιονίου είναι αντίθετες, τόσο πριν, όσο και μετά την αλληλεπίδραση. Θα υπολογίσουμε τις ενεργούς διατομές για τις δύο διαδικασίες που περιγράψαμε προηγουμένως και έχουμε έτοιμα τα τετράγωνα των πλατών τους.

6.5.1 Αντίδραση $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$: ενεργός διατομή

Ξεκινάμε από το πλάτος σκέδασης (6.5) που υπολογίσαμε ήδη, αλλά θέτουμε $m_e = m_{(\mu)} = 0$:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = 8 \left(\frac{e^2}{(p_e - p'_e)^2} \right)^2 [(p_e \cdot p_{(\mu)})(p'_e \cdot p'_{(\mu)}) + (p_e \cdot p'_{(\mu)})(p_{(\mu)} \cdot p'_e)].$$

Πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε τις εκφράσεις για τις τετραορμές στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Υποθέτουμε ότι η ορμή του ηλεκτρονίου μετά την κρούση σχηματίζει γωνία θ με την ορμή του ηλεκτρονίου πριν την κρούση. Αυτή η ποσότητα λέγεται γωνία σκέδασης. Τα μέτρα όλων των (τρι)ορμών είναι ίσα:

$$|\vec{p}_e| = |\vec{p}'_e| = |\vec{p}_{(\mu)}| = |\vec{p}'_{(\mu)}| \equiv p.$$

Εξ άλλου:

$$(p_e - p'_e)^2 = p_e^2 + p_e'^2 - 2(E_e E'_e - |\vec{p}_e| |\vec{p}'_e| \cos \theta) = 0 + 0 - 2(p^2 - p^2 \cos \theta) = -2p^2(1 - \cos \theta),$$

$$p_e \cdot p_{(\mu)} = p^2 - p^2 \cos \pi = 2p^2, \quad p'_e \cdot p'_{(\mu)} = p^2 - p^2 \cos \pi = 2p^2,$$

$$p_e \cdot p'_{(\mu)} = p^2 - p^2 \cos(\pi - \theta) = p^2(1 + \cos \theta), \quad p_{(\mu)} \cdot p'_e = p^2 - p^2 \cos(\pi - \theta) = p^2(1 + \cos \theta).$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της ενεργού διατομής προσαρμόζοντας την (3.6) και μη εκτελώντας προς στιγμής τις ολοκληρώσεις:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(p_e \cdot p_{(\mu)})} \frac{d^3 p'_e}{(2\pi)^3 E'_e} \frac{d^3 p'_{(\mu)}}{(2\pi)^3 E'_{(\mu)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + p_{(\mu)} - p'_e - p'_{(\mu)})] \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{1}{8p^2} \frac{d^3 p'_e}{(2\pi)^3 E'_e} \frac{d^3 p'_{(\mu)}}{(2\pi)^3 E'_{(\mu)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + p_{(\mu)} - p'_e - p'_{(\mu)})] \\ &\quad \times 8 \left(\frac{e^2}{(p_e - p'_e)^2} \right)^2 [(p_e \cdot p_{(\mu)})(p'_e \cdot p'_{(\mu)}) + (p_e \cdot p'_{(\mu)})(p_{(\mu)} \cdot p'_e)] \\ &= \frac{1}{p^2} \frac{d^3 p'_e}{(2\pi)^3 E'_e} \frac{d^3 p'_{(\mu)}}{(2\pi)^3 E'_{(\mu)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + p_{(\mu)} - p'_e - p'_{(\mu)})] \left(\frac{e^2}{-2p^2(1 - \cos \theta)} \right)^2 \\ &\quad [(2p^2)(2p^2) + (p^2(1 + \cos \theta))(p^2(1 + \cos \theta))] \\ &= \frac{1}{16p^2} \frac{d^3 p'_e}{(2\pi)^3 E'_e} \frac{d^3 p'_{(\mu)}}{(2\pi)^3 E'_{(\mu)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + p_{(\mu)} - p'_e - p'_{(\mu)})] \frac{e^4}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} [4 + (1 + \cos \theta)^2]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Σ' αυτό το στάδιο πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω στον δισδιάστατο χώρο των φάσεων, τον

$$dLips_2 = \frac{d^3 p_e'}{(2\pi)^3 E_e'} \frac{d^3 p_{(\mu)'}}{(2\pi)^3 E_{(\mu)'}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + p_{(\mu)} - p_e' - p_{(\mu)'})].$$

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι η ολοκλήρωση στις μεταβλητές, π.χ., $\vec{p}'_{(\mu)}$, είναι τετριμμένη, λόγω του χωρικού κομματιού της συνάρτησης δέλτα. Επί πλέον, $d^3 p_e' = p'^2 dp' d\Omega_e$. Σημειώνουμε ότι για τις ενέργειες της αρχικής κατάστασης σ' αυτό το σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $E_e = E_{(\mu)} = p$, ενώ για τις ενέργειες της τελικής κατάστασης ισχύουν οι σχέσεις: $E_e' = E_{(\mu)'} = p'$ (αφού θεωρούμε άμαζα σωματίδια), οπότε $\delta(E_e + E_{(\mu)} - E_e' - E_{(\mu)'}) = \delta(2p - 2p') = \frac{1}{2} \delta(p' - p)$. Συνολικά, επομένως:

$$\begin{aligned} dLips_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2 E_e' E_{(\mu)'}} p'^2 dp' d\Omega_e \delta(E_e + E_{(\mu)} - E_e' - E_{(\mu)'}) = \frac{1}{8\pi^2 p'^2} p'^2 dp' d\Omega_e \delta(p' - p) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} dp' d\Omega_e \delta(p' - p) \rightarrow \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_e \end{aligned}$$

και

$$d\sigma = \frac{1}{16p^2} \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_e \frac{e^4}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} [4 + (1 + \cos \theta)^2] \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \frac{1}{128\pi^2 p^2} \frac{e^4}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} [4 + (1 + \cos \theta)^2].$$

Με την υπενθύμιση του ορισμού της σταθεράς λεπτής υφής $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e^4 = 16\pi^2 \alpha^2$ καταλήγουμε στην:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \frac{\alpha^2}{2E_{KM}^2} \frac{[4 + (1 + \cos \theta)^2]}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

αφού η ολική ενέργεια (των προσπιπτόντων) στο σύστημα κέντρου μάζας είναι: $E_{KM} = E_e + E_{(\mu)} \approx 2p \Rightarrow p^2 = \frac{E_{KM}^2}{4}$.

6.5.2 Αντίδραση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$: ενεργός διατομή

Ξεκινάμε από το πλάτος σκέδασης (6.4.2) που υπολογίσαμε ήδη, αλλά θέτουμε $m_e = m_{(\mu)} = 0$:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 8 \left(\frac{e^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} \right)^2 [(p_{e1} \cdot p_{(\mu 1)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu 2)}) + (p_{e1} \cdot p_{(\mu 2)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu 1)})].$$

Πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε τις εκφράσεις για τις τετραορμές στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Τα μέτρα όλων των (τρι)ορμών είναι ίσα:

$$|\vec{p}_{e1}| = |\vec{p}_{e2}| = |\vec{p}'_{(\mu 1)}| = |\vec{p}'_{(\mu 2)}| \equiv p.$$

Για ευκολία καταγράφουμε τις τετραορμές:

$$p_{e1} = (p, p\hat{k}_e), p_{e2} = (p, -p\hat{k}_e), p_{(\mu 1)} = (p, p\hat{k}_{(\mu)}), p_{(\mu 2)} = (p, -p\hat{k}_{(\mu)}), \hat{k}_e \cdot \hat{k}_{(\mu)} = \cos \theta,$$

δηλαδή υποθέτουμε ότι η ορμή του μιονίου μετά την κρούση σχηματίζει γωνία θ με την ορμή του ηλεκτρονίου πριν την κρούση. Άρα:

$$\begin{aligned} (p_{e1} + p_{e2})^2 &= p_{e1}^2 + p_{e2}^2 + 2(E_{e1}E_{e2} + |\vec{p}_{e1}||\vec{p}_{e2}|) = 0 + 0 + 2(p^2 + p^2) = 4p^2, \\ p_{e1} \cdot p_{(\mu1)} &= p^2 - p^2 \cos \theta = p^2(1 - \cos \theta), \quad p_{e2} \cdot p_{(\mu2)} = p^2 - p^2 \cos \theta = p^2(1 - \cos \theta), \\ p_{e1} \cdot p_{(\mu2)} &= p^2 + p^2 \cos \theta = p^2(1 + \cos \theta), \quad p_{e2} \cdot p_{(\mu1)} = p^2 + p^2 \cos \theta = p^2(1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Και πάλι, προσαρμόζουμε την (3.6) και αφήνουμε, προς το παρόν, τις ολοκληρώσεις:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(p_{e1} \cdot p_{e2})} \frac{d^3 p_{(\mu1)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu1)}} \frac{d^3 p_{(\mu2)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu2)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - p_{(\mu1)} - p_{(\mu2)})] \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{1}{8p^2} \frac{d^3 p_{(\mu1)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu1)}} \frac{d^3 p_{(\mu2)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu2)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - p_{(\mu1)} - p_{(\mu2)})] \\ &\quad \times 8 \left(\frac{e^2}{(p_{e1} + p_{e2})^2} \right)^2 [(p_{e1} \cdot p_{(\mu1)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu2)}) + (p_{e1} \cdot p_{(\mu2)})(p_{e2} \cdot p_{(\mu1)})] \\ &= \frac{1}{p^2} \frac{d^3 p_{(\mu1)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu1)}} \frac{d^3 p_{(\mu2)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu2)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - p_{(\mu1)} - p_{(\mu2)})] \\ &\quad \times \left(\frac{e^2}{4p^2} \right)^2 [(p^2(1 - \cos(\theta)))^2 + (p^2(1 + \cos(\theta)))^2] \\ &= \frac{1}{16p^2} \frac{d^3 p_{(\mu1)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu1)}} \frac{d^3 p_{(\mu2)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu2)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - p_{(\mu1)} - p_{(\mu2)})] e^4 [1 + \cos^2(\theta)]. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Σ' αυτό το στάδιο πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω στον δισδιάστατο χώρο των φάσεων, τον

$$dLips_2 = \frac{d^3 p_{(\mu1)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu1)}} \frac{d^3 p_{(\mu2)}}{(2\pi)^3 E_{(\mu2)}} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{e1} + p_{e2} - p_{(\mu1)} - p_{(\mu2)})].$$

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι η ολοκλήρωση στις μεταβλητές, π.χ., $\vec{p}_{(\mu2)}$, είναι τετριμένη, λόγω του χωρικού κομματιού της συνάρτησης δέλτα. Επί πλέον, $d^3 p_{(\mu1)} = p_{(\mu1)}^2 dp_{(\mu1)} d\Omega_{(\mu1)}$. Σημειώνουμε ότι για τις ενέργειες της αρχικής κατάστασης σ' αυτό το σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $E_{e1} = E_{e2} = p$, ενώ για τις ενέργειες της τελικής κατάστασης ισχύουν οι σχέσεις: $E_{(\mu1)} = E_{(\mu2)} = p'$ (αφού θεωρούμε άμαζα σωματίδια), οπότε $\delta(E_{e1} + E_{e2} - E_{(\mu1)} - E_{(\mu2)}) = \delta(2p - 2p') = \frac{1}{2} \delta(p' - p)$. Συνολικά, επομένως:

$$dLips_2 = \frac{1}{(2\pi)^2 E_{(\mu1)} E_{(\mu2)}} p_{(\mu1)}^2 dp_{(\mu1)} d\Omega_{(\mu1)} \delta(E_{e1} + E_{e2} - E_{(\mu1)} - E_{(\mu2)})$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 p'^2} p'^2 dp' d\Omega_{(\mu)} \delta(p' - p) = \frac{1}{8\pi^2} dp' d\Omega_e \delta(p' - p) \rightarrow \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_{(\mu)}$$

και

$$d\sigma = \frac{1}{16p^2} \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_{(\mu)} e^4 [1 + \cos^2 \theta] \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega_{(\mu)}} = \frac{1}{128\pi^2 p^2} e^4 [1 + \cos^2 \theta].$$

Με την υπενθύμιση του ορισμού της σταθεράς λεπτής υφής $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e^4 = 16\pi^2 \alpha^2$ και της σχέσης $E_{KM} = E_{e1} + E_{e2} \approx 2p \Rightarrow p^2 = \frac{E_{KM}^2}{4}$ καταλήγουμε στην:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{(\mu)}} = \frac{\alpha^2}{4E_{KM}^2} [1 + \cos^2 \theta].$$

Κεφάλαιο 7

Παράρτημα: Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

7.1 Κλασική θεωρία

Ξεκινάμε γράφοντας τις εξισώσεις του Maxwell στο σύστημα μονάδων των Heaviside και Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = J^0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (7.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.2)$$

J^0 και \vec{J} οι πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού ρεύματος αντίστοιχα. Οι δύο ομογενείς εξισώσεις (7.2) μπορούν να λυθούν συναρτήσας ενός βαθμωτού πεδίου A^0 , του βαθμωτού δυναμικού, και ενός διανυσματικού πεδίου \vec{A} , του διανυσματικού δυναμικού, ως εξής:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Τα A^0 και \vec{A} συναποτελούν ένα τετράνυσμα: $A^\mu = (A^0, \vec{A})$. Ο ταυιστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφτεί ως

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (7.4)$$

Αυτές οι εξισώσεις δεν είναι παρά οι εξισώσεις (7.3) σε συναλλοίωτη μορφή. Οι ομογενείς εξισώσεις (7.2) μπορούν να γραφτούν και με τη μορφή:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (7.5)$$

ενώ οι μη ομογενείς εξισώσεις (7.1) παίρνουν τη μορφή:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το τετραδιάνυσμα $J^\nu \equiv (J^0, \vec{J})$. Οι μη ομογενείς εξισώσεις του Maxwell γράφονται συναρτήσας του δυναμικού A^ν ως εξής:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu \quad (7.6)$$

Όσο για τις ομογενείς εξισώσεις (7.5) του Maxwell τα πράγματα είναι ακόμη πιο απλά: ικανοποιούνται αυτόματα, αν εκφράσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο συναρτήσει του δυναμικού:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) + \partial_\lambda (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0.$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις του Maxwell σε Λαγκρανζιανή μορφή. Ορίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα ως:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\nu. \quad (7.7)$$

Το ρεύμα οφείλεται σε φορτισμένα σωματίδια, που μπορεί να είναι είτε μποζόνια είτε φερμιόνια, με διαφορετικές εκφράσεις για την κάθε περίπτωση. Θα τα εξετάσουμε αργότερα. Για να ελέγξουμε ότι η μεταβολή αυτής της Λαγκρανζιανής δίνει τις εξισώσεις του Maxwell είναι χρήσιμο να γράψουμε τη δράση με κάποιους εναλλακτικούς τρόπους αξιοποιώντας τον ορισμό (7.4) και παραγοντικές ολοκληρώσεις:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x J^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)] - \int d^4x J^\mu A_\mu. \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)] - J^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Υποθέτουμε ότι τα δυναμικά A^ν μηδενίζονται στα όρια του χώρου και του χρόνου, οπότε οι τυχόν επιφανειακοί όροι μπορούν να παραλείπονται. Συμβολικά, με βάση αυτήν την υπόθεση: $\int f(x)[\partial_\mu g(x)] = \int [-\partial_\mu f(x)]g(x)$, για κάθε ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων και για οποιοδήποτε μ . Δηλαδή μπορεί κανείς να μεταθέτει τις παραγωγίσεις από τον έναν όρο στον άλλον, αρκεί να θυμάται το επί πλέον πρόσημο. Μπορεί κανείς να δει ότι με τέτοιους χειρισμούς η μορφή (7.8) μπορεί να πάρει τη χρήσιμη μορφή:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2] - \int d^4x J^\mu A_\mu \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2] - J^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Η έκφραση (7.9) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή της εξίσωσης κίνησης από τις εξισώσεις Euler-Lagrange):

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}. \quad (7.10)$$

Το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu, \quad (7.11)$$

που δεν είναι άλλη από την εξίσωση (7.6). Δηλαδή πράγματι, η Λαγκρανζιανή (7.8) (είτε η (7.9)) αναπαράγουν τις σωστές εξισώσεις κίνησης.

Πρέπει να αναφέρουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των εξισώσεων κίνησης: τη λεγόμενη **συμμετρία βαθμίδας** (gauge symmetry). Τα τετραδυναμικά A_ν δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα: αν μετασχηματίσει κανείς τα πεδία A_ν στα πεδία $\tilde{A}_\nu = A_\nu + \partial_\nu \Lambda(x)$, όπου το $\Lambda(x)$ είναι αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση, τότε οι εξισώσεις (7.6) ικανοποιούνται εξ ίσου καλά από τα πεδία \tilde{A}^ν , όσο και από τα πεδία A^ν :

$$\partial_\mu[\partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu] = \partial_\mu[\partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda(x)) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x))] = \partial_\mu[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = J^\nu,$$

δηλαδή, αν $\partial_\mu[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = J^\nu$, τότε και $\partial_\mu[\partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu] = J^\nu$. Οι ομογενείς εξισώσεις ικανοποιούνται και από τα \tilde{A}^ν , όπως μπορεί κανείς να δει εύκολα. Αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι οι βαθμοί ελευθερίας είναι δύο και όχι τέσσερεις, όπως φαίνεται να υποδεικνύει το διάνυσμα A^μ , που έχει τέσσερεις συνιστώσες. (Οι βαθμοί ελευθερίας ξεκινάνε από έξι (τα πεδία \vec{E} και \vec{B}), αλλά οι ομογενείς εξισώσεις (7.2) επιβάλλουν τέσσερεις (1 + 3) περιορισμούς, οπότε απομένουν μόνο δύο).

Ας εξετάσουμε το μετασχηματισμό της Λαγκρανζιανής (7.9) κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \tilde{A}_\nu)(\partial^\mu \tilde{A}^\nu) - (\partial_\mu \tilde{A}^\mu)^2] - J^\mu \tilde{A}_\mu \\ &= -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \{A_\nu + \partial_\nu \Lambda\})(\partial^\mu \{A^\nu + \partial^\nu \Lambda\}) - (\partial_\mu \{A^\mu + \partial^\mu \Lambda\})^2] - J^\mu \{A_\mu + \partial_\mu \Lambda\} \\ &= \mathcal{L} - \frac{1}{2}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) - (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda)(\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda)(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) - (\partial_\mu \partial^\mu \Lambda)(\partial_\nu \partial^\nu \Lambda)] - J^\mu \partial_\mu \Lambda. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα την αντίστοιχη δράση: $\tilde{S} = \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}$. Μέσω παραγοντικών ολοκληρώσεων η δράση μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2}[-(\partial^2 A_\nu)(\partial^\nu \Lambda) + (\partial_\nu \Lambda)(\partial^2 A^\nu) + (\partial^2 \Lambda)^2 - (\partial^2 \Lambda)(\partial^2 \Lambda)] + \Lambda \partial_\mu J^\mu \right\} \\ &= \int d^4x \{ \mathcal{L} + \Lambda \partial_\mu J^\mu \} \\ &= S + \int d^4x [\Lambda \partial_\mu J^\mu]. \end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό: $\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$). Διαπιστώνουμε ότι η δράση μένει αναλλοίωτη, υπό την προϋπόθεση ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο συζεύγνυται με ρεύμα που διατηρείται, δηλαδή $\partial_\mu J^\mu = 0$. Βλέπουμε ότι γίνονται απαλοιφές πολλών όρων λόγω του ότι οι δύο όροι της Λαγκρανζιανής, ο $(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ και ο $(\partial_\mu A^\mu)^2$ εμφανίζονται με συντελεστή μονάδα. Αν ο δεύτερος όρος έχει κάποιον άλλο συντελεστή, η δράση δε θα είναι πια αναλλοίωτη, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς κάνοντας τα ίδια βήματα που περιγράψαμε με τη νέα Λαγκρανζιανή. Αυτή η διαδικασία αξιοποιείται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων κβάντωσης της θεωρίας.

7.2 Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Το πρώτο βήμα για την κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι να ορίσει κανείς τις συζυγείς ορμές των πεδίων A_μ : $p^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$. Εμφανίζεται αμέσως θέμα με τη συζυγή ορμή του πεδίου A_0 :

$$p^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2]}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0.$$

Αναδύεται αμέσως ένα βασικό πρόβλημα: δεν είναι δυνατόν να επιβάλλουμε μη τετριμένες σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των πεδίων A_0 και των συζυγών τους ορμών p^0 , αφού η ορμή είναι ταυτοτικά μηδενική. Αυτή η δυσκολία συνδέεται με το γεγονός ότι τα πεδία A^μ είναι υπερβολικά πολλά για να περιγράψουν τη φυσική πραγματικότητα, που έχει μόνο δύο βαθμούς ελευθερίας. Αυτό αντικατοπτρίζεται στην αναλλοιότητα της δράσης κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Μία πιθανή λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε μια μορφή της Λαγκρανζιανής που να μην είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Όπως περιγράψαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, ένας τρόπος για να φτάσουμε σε μη αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή είναι να θεωρήσουμε την αρχική και να της προσθέσουμε έναν όρο

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

όπου το ξ είναι αυθαίρετη σταθερά. Αυτό συνεπάγεται ότι η δράση γίνεται:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (1 - \frac{1}{\xi})(\partial_\mu A^\mu)^2] - J^\mu A_\mu,$$

οπότε οι δύο όροι της Λαγκρανζιανής είναι $(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ και $(1 - \frac{1}{\xi})(\partial_\mu A^\mu)^2$ και ο σχετικός συντελεστής δεν είναι πια μονάδα, άρα η δράση δεν είναι πια αναλλοίωτη.

Θα επαναλάβουμε τα βήματα που κάναμε προηγουμένως και θα διαπιστώσουμε ότι τα προβλήματα έχουν αντιμετωπιστεί με μερική επιτυχία. Η τροποποιημένη Λαγκρανζιανή είναι η:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - J^\mu A_\mu. \quad (7.12)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \Rightarrow \partial_\mu \left[\partial^\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu A^\mu \right] = J^\nu \\ &\Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial \cdot A) = J^\nu, \end{aligned} \quad (7.13)$$

όπου $\partial \cdot A \equiv \partial_\mu A^\mu$. Αυτές οι εξισώσεις κίνησης ανάγονται στις αρχικές εξισώσεις (7.11) στο όριο όπου $\xi \rightarrow \infty$. Οι συζυγείς ορμές ισούνται με

$$p^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (1 - \frac{1}{\xi})(\partial_\mu A^\mu)^2]}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\dot{A}^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) g^{\mu 0} \partial \cdot A.$$

Ειδικότερα:

$$p^0 = -\dot{A}^0 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial \cdot A.$$

Αυτή η έκφραση δεν μηδενίζεται ταυτοτικά. Ξεκινώντας από την εξίσωση διατήρησης του ρεύματος $\partial_\nu J^\nu = 0$ η εξίσωση κίνησης (7.13) δίνει:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu (\partial \cdot A) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial_\nu (\partial \cdot A) &= \partial^\nu (\partial \cdot A) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial_\mu (\partial \cdot A) &= 0 \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu (\partial \cdot A) = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει μόνο αν το ξ δεν είναι άπειρο. Σύμφωνα μ' αυτή τη σχέση, αν η έκφραση $\partial \cdot A$ μηδενίζεται στα όρια του χώρου και του χρόνου, θα μηδενίζεται παντού. Οι εξισώσεις κίνησης (7.13) ανάγονται στις προηγούμενες (7.11) και οι εξισώσεις το Maxwell μένουν αναλλοίωτες σε επίπεδο \vec{E} και \vec{B} , όπως θα έπρεπε. Εκείνο που επιδιώξαμε ήταν να περικόψουμε την υπερβολική αυθαιρεσία στην επιλογή των A^μ και όχι να επηρεάσουμε τις εξισώσεις του Maxwell, που έχουν επιβεβαιωθεί με τόση ακρίβεια.

7.3 Διαδότης

Πριν προχωρήσουμε, θα εξετάσουμε τη λύση της εξίσωσης κίνησης (7.13), που γράφεται και ως:

$$\left[g^{\mu\kappa} \partial^\rho \partial_\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\kappa \right] A_\mu = J^\kappa(x).$$

Αντί να ασχοληθούμε με αυτήν την εξίσωση, που περιλαμβάνει το δεύτερο μέλος $J^\kappa(x)$ με την αυθαίρετη εξάρτηση από το x , θα μελετήσουμε τη συνάρτηση Green, που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το δεύτερο μέλος με $g_\kappa^\mu \delta^{(4)}(x - x')$:

$$\left[g^{\mu\kappa} \partial^\rho \partial_\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\kappa \right] D_{\mu\nu}(x - x') = g_\nu^\kappa \delta^{(4)}(x - x').$$

Η λύση βρίσκεται μετασχηματίζοντας κατά Fourier:

$$-\left[g^{\mu\kappa} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\kappa \right] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = g_\nu^\kappa.$$

Η εύρεση του $\tilde{D}_{\mu\nu}(k)$ διευκολύνεται από το γεγονός ότι είναι τανυστής δεύτερης τάξης, άρα θα είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο υπαρκτών αντικειμένων αυτού του τύπου, του $g_{\mu\nu}$ και του $k_\mu k_\nu$:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = A(k^2)g_{\mu\nu} + B(k^2)k_\mu k_\nu.$$

Αντικαθιστώντας και εξισώνοντας ποσότητες με την ίδια τανυστική δομή βρίσκουμε τελικά:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right].$$

Αν θυμηθούμε την τροποποίηση που χρειάστηκε στο διαδότη βαθμωτών πεδίων (με το $i\epsilon$) καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα:

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (7.14)$$

Δύο πολύ δημοφιλείς επιλογές της παραμέτρου ξ είναι οι:

$$\xi = 1 \Rightarrow i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (\text{Feynman}), \quad (7.15)$$

$$\xi = 0 \Rightarrow i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \quad (\text{Landau}). \quad (7.16)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ως επί το πλείστον τη βαθμίδα του Feynman ($\xi = 1$). Σ' αυτή τη βαθμίδα η δράση γράφεται:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (7.17)$$

και οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = J^\nu, \quad (7.18)$$

δηλαδή το σύστημα μοιάζει με τέσσερα άμαζα βαθμωτά πεδία.

7.4 Ανάπτυγμα Fourier

Κατ' αναλογία με το ανάπτυγμα των βαθμωτών πεδίων καταγράφουμε το ανάπτυγμα για το τετραδυναμικό:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [\epsilon_s^\mu(p) a_s(p) e^{-ip \cdot x} + \epsilon_s^{*\mu}(p) a_s^*(p) e^{+ip \cdot x}], \quad E_p = |\vec{p}|. \quad (7.19)$$

Τα διανύσματα πόλωσης $\epsilon_s^\mu(p)$ ορίζονται ως εξής: επιλέγουμε ένα αυθαίρετο χρονοειδές διάνυσμα n^μ , ($n^0 > 0$) το οποίο θα μπορούσε να είναι το $(1, 0, 0, 0)$, και το ταυτίζουμε με το $\epsilon_0^\mu(p)$:

$$\epsilon_0^\mu(p) = n^\mu.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$\epsilon_3^\mu(p) = \frac{p^\mu - (p \cdot n)n^\mu}{\sqrt{(p \cdot n)^2 - p^2}}.$$

Το χρονοειδές $\epsilon_0^\mu(p)$ ονομάζεται βαθμωτό διάνυσμα πόλωσης, ενώ το χωροειδές $\epsilon_3^\mu(p)$ διάμηκες διάνυσμα πόλωσης. Απομένουν τα δύο εγκάρσια χωροειδή διανύσματα πόλωσης, $\epsilon_1^\mu(p)$ και $\epsilon_2^\mu(p)$. Αυτά μπορούν να επιλεγούν σχετικά αυθαίρετα στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\epsilon_0^\mu(p) - \epsilon_3^\mu(p)$. Για παράδειγμα αν, για κάποιο δεδομένο \vec{p} , επιλέξουμε τους άξονες, έτσι ώστε η διεύθυνση διάδοσης του \vec{p} να ταυτίζεται με τον άξονα των z , τα διανύσματα πόλωσης μπορούν να επιλεγούν ως:

$$\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0), \quad \epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1).$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως εγκάρσια διανύσματα τα:

$$\epsilon_L^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \epsilon_R^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0),$$

που ταιριάζουν καλύτερα σε κυκλική πόλωση, ενώ τα ϵ_1^μ και ϵ_2^μ περιγράφουν επιτυχέστερα τη γραμμική πόλωση.

Η κβάντωση μπορεί να γίνει επιβάλλοντας τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{A}_\nu(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{p}_\mu(t, \vec{x}), \hat{p}_\nu(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{p}_\nu(t, \vec{y})] = -ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (7.20)$$

Οι αριθμοί $A^\mu(x)$, $a_s(p)$ και $a_s^*(p)$ της σχέσης (7.19) προάγονται σε τελεστές και η σχέση μετατρέπεται στην:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [\epsilon_s^\mu(p) \hat{a}_s(p) e^{-ip \cdot x} + \epsilon_s^{*\mu}(p) \hat{a}_s^\dagger(p) e^{+ip \cdot x}]. \quad (7.21)$$

Θα φανεί χρήσιμο στη συνέχεια να ξεχωρίσουμε τις συνεισφορές με θετικές από εκείνες με αρνητικές συχνότητες:

$$\begin{aligned} \hat{A}_+^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [\epsilon_s^\mu(p) \hat{a}_s(p) e^{-ip \cdot x}], \\ \hat{A}_-^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [\epsilon_s^{*\mu}(p) \hat{a}_s^\dagger(p) e^{+ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα πεδία στις σχέσεις μετάθεσης με τα ίσα τους από το ανάπτυγμα (7.21), θα προκύψουν οι σχέσεις:

$$[\hat{a}_r(p), \hat{a}_s(p')] = 0, \quad [\hat{a}_r^\dagger(p), \hat{a}_s^\dagger(p')] = 0, \quad r, s = 0, 1, 2, 3$$

και

$$[\hat{a}_0(p), \hat{a}_0^\dagger(p')] = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_r(p), \hat{a}_s^\dagger(p')] = +\delta_{rs}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad r, s = 1, 2, 3.$$

Διαπιστώνουμε ότι η μηδενική συνιστώσα είναι προβληματική, με την έννοια ότι οι σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιεί έχουν αντίθετο πρόσημο από τις αντίστοιχες των βαθμωτών πεδίων, επί παραδείγματι τις (1.16).

Ορίζουμε το κενό $|0\rangle$ της θεωρίας κατά τα γνωστά, ως την κατάσταση για την οποία

$$\hat{a}_s(p)|0\rangle = 0, \forall s, \forall p, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Για τα βαθμωτά πεδία οι καταστάσεις ενός σωματιδίου έχουν θετικό μέτρο, αλλά εδώ αυτό δεν είναι εγγυημένο: αν $|p, s\rangle = \hat{a}_s^\dagger(p)|0\rangle$, τότε:

$$\langle p, 0|p', 0\rangle = \langle 0|\hat{a}_0(p)\hat{a}_0^\dagger(p')|0\rangle = \langle 0|[\hat{a}_0(p), \hat{a}_0^\dagger(p')]|0\rangle = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}').$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι **ασύμβατο** με ο,τιδήποτε ξέρουμε σχετικά με την κβαντομηχανική.

Για να ξεπεράσουμε τα παράδοξα, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι στην πραγματικότητα δεν έχουμε κβαντώσει την ηλεκτροδυναμική, αλλά **κβαντώσαμε μια άλλη θεωρία, η οποία συμφωνεί με την ηλεκτροδυναμική αν και μόνο αν $\partial_\mu A^\mu = 0$** . Θα έλεγε κανείς ότι μια πιθανή λύση θα μπορούσε να ήταν η απαίτηση $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$, σε επίπεδο τελεστών. Όμως αυτό δε γίνεται, γιατί η σχέση μετάθεσης $[\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{p}_\nu(t, \vec{y})] = -ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ συνεπάγεται ότι $[\partial_\mu \hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{p}_\nu(t, \vec{y})] = -i\partial_\nu^x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0$. Δηλαδή, αν επιβάλλουμε την $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ σε επίπεδο τελεστών, πρέπει να ισχύει η $0 = -i\partial_\nu^x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0$, άτοπο. Όμως η απαίτηση να μηδενίζεται τελεστικά η παράσταση $\partial_\mu \hat{A}^\mu \equiv \partial \cdot \hat{A}$ είναι υπερβολική. Αυτό που μπορεί να γίνει είναι να περιοριστούν οι καταστάσεις στις λεγόμενες φυσικές καταστάσεις $\langle \Psi'|$ και $|\Psi\rangle$, δηλαδή εκείνες για τις οποίες ισχύει:

$$\langle \Psi'|\partial \cdot \hat{A}|\Psi\rangle = 0.$$

Για να αποκτήσουμε κάποια διαισθητική εικόνα της σημασίας αυτών των συνθηκών, ας θεωρήσουμε το κομμάτι του αναπτύγματος Fourier με θετικές συχνότητες:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{A}_+^\mu(x) &= \partial_\mu \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [\epsilon_s^\mu(p) \hat{a}_s(p) e^{-ip \cdot x}] \\ &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=0}^3 [-ip_\mu \epsilon_s^\mu(p) \hat{a}_s(p) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned}$$

Αν τώρα επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς όπου το \vec{p} θα βρίσκεται στην κατεύθυνση \hat{z} , θα ισχύει:

$$p^\mu = (E_p, 0, 0, E_p), \quad p_\mu = (E_p, 0, 0, -E_p).$$

Αν, επί πλέον, χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα πόλωσης που έχουμε ήδη παρουσιάσει,

$$\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0), \quad \epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1),$$

τότε:

$$p_\mu \epsilon_s^\mu(p) \hat{a}_s(p) = E_p \epsilon_s^0(p) \hat{a}_s(p) - E_p \epsilon_s^3(p) \hat{a}_s(p) = E_p \hat{a}_0(p) - E_p \hat{a}_3(p)$$

και

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{A}_+^\mu(x) &= -i \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} [E_p \hat{a}_0(p) + (-E_p) \hat{a}_3(p)] e^{-ip \cdot x} \\ &= -i \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} E_p [\hat{a}_0(p) - \hat{a}_3(p)] e^{-ip \cdot x}. \end{aligned}$$

Η απαίτηση $\partial \cdot \hat{A}_+ |\Psi\rangle = 0$ μεταφράζεται στην

$$\hat{a}_0(p) |\Psi\rangle = \hat{a}_3(p) |\Psi\rangle,$$

ενώ $\eta < \Psi' | \partial \cdot \hat{A}_- = 0$ στην

$$\langle \Psi' | \hat{a}_0^\dagger(p) = \langle \Psi' | \hat{a}_3^\dagger(p).$$

Έστω τώρα ότι $\xi = 1$, οπότε $\hat{p}^\mu = \dot{\hat{A}}^\mu$. Η Χαμιλτονιανή με χρήση του αναπτύγματος Fourier μπορεί να εκφραστεί ως:

$$: \hat{H} : \equiv \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \int d^3 p E_p [-\hat{a}_0^\dagger(p) \hat{a}_0(p) + \hat{a}_1^\dagger(p) \hat{a}_1(p) + \hat{a}_2^\dagger(p) \hat{a}_2(p) + \hat{a}_3^\dagger(p) \hat{a}_3(p)].$$

Αν τώρα θεωρήσουμε το στοιχείο πίνακα μεταξύ φυσικών καταστάσεων θα βρούμε:

$$\langle \Psi' | : \hat{H} : | \Psi \rangle = \int d^3 p E_p \langle \Psi' | [\hat{a}_1^\dagger(p) \hat{a}_1(p) + \hat{a}_2^\dagger(p) \hat{a}_2(p)] | \Psi \rangle,$$

αφού οι συνεισφορές από τα διανύσματα 0 και 3 αλληλοεξουδετερώνονται για φυσικές καταστάσεις, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Δηλαδή στην αναμενόμενη τιμή της Χαμιλτονιανής συνεισφέρουν μόνο οι δύο εγκάρσιες καταστάσεις πόλωσης, πράγμα που αληθεύει και για όλα τα υπόλοιπα παρατηρήσιμα μεγέθη. Άρα φαίνεται ότι **οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας είναι δύο**, παρά το ότι τα A^μ έχουν τέσσερις συνιστώσες. Επί πλέον, **η βαθμωτή πόλωση δεν περιλαμβάνεται στους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας**, οπότε το αντίθετο πρόσημο και το αρνητικό μέτρο που τη χαρακτηρίζει δεν αντιπροσωπεύει πρόβλημα.

7.5 Παρατηρήσεις σχετικά με τον διαδότη

Θα υιοθετήσουμε την επιλογή $\xi = 1$, οπότε $i\tilde{D}^{\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$. Τα διανύσματα πόλωσης ικανοποιούν τη σχέση πληρότητας

$$g^{\mu\nu} = -\epsilon_0^\mu \epsilon_0^{\nu*} + \epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu*} + \epsilon_2^\mu \epsilon_2^{\nu*} + \epsilon_3^\mu \epsilon_3^{\nu*}$$

και τα δύο από αυτά δίνονται από τις σχέσεις:

$$\epsilon_0^\mu = n^\mu = (1, 0, 0, 0) = g^{\mu 0}, \quad \epsilon_3^\mu = \frac{p^\mu - (p \cdot n)n^\mu}{\sqrt{(p \cdot n)^2 - p^2}}.$$

Αντικαθιστώντας ο διαδότης γράφεται:

$$i\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[\epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu*} + \epsilon_2^\mu \epsilon_2^{\nu*} + \frac{[p^\mu - (p \cdot n)n^\mu][p^\nu - (p \cdot n)n^\nu]}{(p \cdot n)^2 - p^2} - n^\mu n^\nu \right]. \quad (7.23)$$

Οι πρώτοι δύο όροι αναφέρονται στις εγκάρσιες πολώσεις 1 και 2 και ερμηνεύονται ως ανταλλαγές εγκάρσιων φωτονίων. Οι δύο τελευταίοι όροι θα γίνουν:

$$\begin{aligned} & \frac{p^\mu p^\nu - (p \cdot n)p^\mu n^\nu - (p \cdot n)p^\nu n^\mu + (p \cdot n)^2 n^\mu n^\nu}{(p \cdot n)^2 - p^2} - \frac{(p \cdot n)^2 n^\mu n^\nu - p^2 n^\mu n^\nu}{(p \cdot n)^2 - p^2} \\ &= \frac{p^2 n^\mu n^\nu}{(p \cdot n)^2 - p^2} + \frac{p^\mu p^\nu - (p \cdot n)(p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu)}{(p \cdot n)^2 - p^2} \\ \Rightarrow -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} &= \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[\frac{[p^\mu - (p \cdot n)n^\mu][p^\nu - (p \cdot n)n^\nu]}{(p \cdot n)^2 - p^2} - n^\mu n^\nu \right] \\ &= \frac{n^\mu n^\nu}{(p \cdot n)^2 - p^2} + \frac{p^\mu p^\nu - (p \cdot n)(p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu)}{(p^2 + i\epsilon)[(p \cdot n)^2 - p^2]}. \end{aligned}$$

Τελικά ο διαδότης μπορεί να γραφτεί ως:

$$i\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} [\epsilon_1^\mu(p) \epsilon_1^{\nu*}(p) + \epsilon_2^\mu(p) \epsilon_2^{\nu*}(p)] + i\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p) + i\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p), \quad (7.24)$$

$$i\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p) \equiv \frac{in^\mu n^\nu}{(p \cdot n)^2 - p^2}, \quad i\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p) \equiv i \frac{p^\mu p^\nu - (p \cdot n)(p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu)}{(p^2 + i\epsilon)[(p \cdot n)^2 - p^2]}. \quad (7.25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $n^\mu = g^{\mu 0} \Rightarrow p \cdot n = p^0$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $D_C^{\mu\nu}(x - x')$ στο χώρο των θέσεων (επισημαίνουμε ότι: $i\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p) = \frac{ig^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(p \cdot n)^2 - p^2}$):

$$\begin{aligned} iD_C^{\mu\nu}(x - x') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p) e^{-ip \cdot (x - x')} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ig^{\mu 0} g^{\nu 0}}{\vec{p}^2} e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(x_0 - x'_0)} \\ iD_C^{\mu\nu}(x - x') &= \frac{ig^{\mu 0} g^{\nu 0}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x_0 - x'_0), \end{aligned} \quad (7.26)$$

αφού

$$\begin{aligned} \int d^3 p \frac{e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{|\vec{p}|^2} &= 2\pi \int_0^{+\infty} d|\vec{p}| |\vec{p}|^2 d\cos\theta \frac{e^{+i|\vec{p}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta}}{|\vec{p}|^2} \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} d|\vec{p}| \int_0^\pi d\cos\theta e^{+i|\vec{p}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} d|\vec{p}| \int_0^\pi d\cos\theta e^{+i|\vec{p}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{|\vec{p}|=0}^{+\infty} d|\vec{p}| \frac{1}{i|\vec{p}| |\vec{x} - \vec{x}'|} [e^{+i|\vec{p}| |\vec{x} - \vec{x}'|} - e^{-i|\vec{p}| |\vec{x} - \vec{x}'|}] \\
&= 2\pi \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} dz \frac{1}{iz |\vec{x} - \vec{x}'|} e^{+iz |\vec{x} - \vec{x}'|}
\end{aligned}$$

Θα εξηγήσουμε κάπως αναλυτικότερα τα βήματα που κάναμε. Το ολοκλήρωμα στο p_0 είναι γνωστό ότι δίνει (2 π επί) τη συνάρτηση δέλτα. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος στο χωρικό μέρος d^3p γίνεται με τη βοηθητική εισαγωγή ενός όρου $-i|\vec{p}|$ στον αριθμητή, όπου το i είναι μια θετική ποσότητα, που θα τη στείλουμε στο μηδέν όταν τελειώσει ο υπολογισμός. Αυτό γίνεται για να τιθασεύσουμε τις μεγάλες ταλαντώσεις που οφείλονται στον φανταστικό εκθέτη $i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')$:

$$\begin{aligned}
\int d^3p \frac{e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \eta|\vec{p}|}}{|\vec{p}|^2} &= 2\pi \int_0^{+\infty} d|\vec{p}| |\vec{p}|^2 d\cos\theta \frac{e^{+i|\vec{p}| |\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta - \eta|\vec{p}|}}{|\vec{p}|^2} \\
&= -2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} d\cos\theta \int_0^{+\infty} d|\vec{p}| e^{-|\vec{p}|(\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta)} \\
&= -2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} d\cos\theta \frac{1}{\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} = +2\pi \int_{z=-1}^1 dz \frac{1}{\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'|z}.
\end{aligned}$$

Εδώ θα επικαλεστούμε το απλό ολοκλήρωμα:

$$\int_{z=-1}^1 dz \frac{1}{\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'|z} = \frac{i}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \ln \left[\frac{\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'|}{\eta + i|\vec{x} - \vec{x}'|} \right],$$

το οποίο, στο όριο $\eta \rightarrow 0$, ισούται με $\ln(-1)$, άρα:

$$\int_{z=-1}^1 dz \frac{1}{\eta - i|\vec{x} - \vec{x}'|z} = \frac{i}{|\vec{x} - \vec{x}'|} (-i\pi) = \frac{\pi}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \eta|\vec{p}|}}{|\vec{p}|^2} = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|},$$

δηλαδή η εξίσωση (7.26).

Για να δούμε τη φυσική σημασία των διαφόρων όρων, θα θεωρήσουμε μια σκέδαση δύο σωματιδίων με ρεύματα $J_1^\mu(x)$ και $J_2^\nu(y)$ και με τη μεσολάβηση του φωτονίου. Θα βασιστούμε στην τροποποιημένη Λαγκρανζιανή (7.12):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - J_\mu A^\mu$$

και θα θεωρήσουμε ότι τα ρεύματα είναι αριθμοί και όχι τελεστές, ενώ θα αντιμετωπίσουμε το A^μ ως τελεστή. Μία σημαντική έκφραση της Λαγκρανζιανής του

ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, που προκύπτει από παραγοντικές ολοκληρώσεις και θα μας φανεί χρήσιμη εδώ, είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu(x) \left[g_{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu(x) - J_\mu(x) A^\mu(x),$$

που γράφεται στο χώρο των ορμών ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(-p) \left[g_{\mu\nu} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) p_\mu p_\nu \right] \tilde{A}^\nu(p) - \tilde{J}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p) \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(-p) \left[\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) \right] \tilde{A}^\nu(p) - \tilde{J}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p), \quad \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) = - \left[g_{\mu\nu} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) p_\mu p_\nu \right]. \end{aligned}$$

Η χαμηλότερη μη τετριμμένη συνεισφορά στον πίνακα σκέδασης θα είναι δεύτερης τάξης, όπως στη συνεισφορά C_2 στην περίπτωση των βαθμωτών πεδίων. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int d^4x \int d^4x' J_1^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-x') J_2^\nu(x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_1^\mu(-p) \tilde{D}_{\mu\nu}(p) \tilde{J}_2^\nu(p). \quad (7.27)$$

Το κομμάτι $D_C^{\mu\nu}(x-x')$ θα συνεισφέρει:

$$\int d^4x \int d^4x' \frac{J_1^0(x) J_2^0(x')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x^0 - x'^0).$$

Φαίνεται σαν ακαριαία αλληλεπίδραση από απόσταση μεταξύ των δύο πυκνοτήτων φορτίου $J_1^0(x)$ και $J_2^0(x')$, γι' αυτό την ονομάζουμε αλληλεπίδραση Coulomb.

Για να διερευνήσουμε το ρόλο του όρου $\tilde{D}_{\mu\nu 0}(p)$ θα ξεκινήσουμε από την αναπαράσταση στο χώρο των ορμών στη δεύτερη ισότητα της εξίσωσης (7.27). Υπενθυμίζουμε ότι τα ρεύματα διατηρούνται, δηλαδή $\partial_\mu J_1^\mu = \partial_\mu J_2^\mu = 0$, οπότε και $p_\mu \tilde{J}_1^\mu = p_\mu \tilde{J}_2^\mu = 0$. Όμως το κομμάτι $\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p)$ έχει σ' όλους τους όρους του κάποιον παράγοντα είτε p^μ είτε p^ν , είτε και τους δύο, σύμφωνα με την εξίσωση (7.25). Αυτό σημαίνει ότι δεν θα συνεισφέρει τελικά σ' αυτό το πλάτος σκέδασης.

7.6 Κανόνες Feynman για τα φωτόνια

Συνοπτικά οι κανόνες του Feynman για τα φωτόνια έχουν να κάνουν με τις **εσωτερικές** γραμμές, στις οποίες αντιστοιχίζεται η έκφραση

$$i\tilde{D}^{\mu\nu}(p)$$

και παριστάνει φωτόνιο με ορμή p που συνδέει κορυφές με δείκτες μ και ν . Τα **εισερχόμενα εξωτερικά** φωτόνια $\tilde{A}_\mu(p)$ αντιστοιχούν στην έκφραση $\epsilon_\mu(p)$, ενώ τα **εξερχόμενα εξωτερικά** φωτόνια αντιστοιχούν στην έκφραση $\epsilon_\mu^*(p)$. Στον υπολογισμό ενεργών διατομών με φυσικά φωτόνια θα μας χρειαστούν τα αθροίσματα

μόνο για εγκάρσιες πολώσεις. Επιλύοντας την εξίσωση (7.24) ως προς αυτά τα α-θροίσματα, αφού πρώτα κάνουμε την αντικατάσταση $i\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$, βρίσκουμε ότι:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_s^\mu(p)\epsilon_s^{\nu*}(p) \equiv \epsilon_1^\mu(p)\epsilon_1^{\nu*}(p) + \epsilon_2^\mu(p)\epsilon_2^{\nu*}(p) = -g^{\mu\nu} - p^2 [\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p) + \tilde{D}_0^{\mu\nu}(p)].$$

Ο όρος $p^2\tilde{D}_C^{\mu\nu}(p)$ μηδενίζεται, επειδή $p^2 = 0$ για φυσικά (άμαζα) φωτόνια. Για τον όρο $\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p)$ αυτό το επιχείρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί, γιατί, σύμφωνα με την (7.25) υπάρχει ένας πρόσθετος παρονομαστής $\frac{1}{p^2+i\epsilon}$, που εξουδετερώνει το πολλαπλασιαστικό p^2 . Όμως, όπως εξηγήσαμε προ ολίγου, το κομμάτι $\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p)$ έχει σ' όλους τους όρους του κάποιον παράγοντα είτε p^μ είτε p^ν , οπότε η συνεισφορά του μηδενίζεται λόγω της διατήρησης των ρευμάτων, δηλαδή λόγω των σχέσεων:

$$p_\mu\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p) = 0, \quad p_\nu\tilde{D}_0^{\mu\nu}(p) = 0.$$

Τελικά, επομένως, κατά τη διαδικασία υπολογισμού ενεργών διατομών, αρκεί να χρησιμοποιεί κανείς την ισότητα:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_s^\mu(p)\epsilon_s^{\nu*}(p) = -g^{\mu\nu}.$$

Δε θα δώσουμε τώρα παραδείγματα χρήσης των κανόνων που μόλις διατυπώσαμε, γιατί θα βρουν την πλήρη εφαρμογή τους όταν εισαγάγουμε βαθμωτά ή φερμιονικά πεδία, με τα οποία το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα αλληλεπιδράσει. Οι σχετικές εφαρμογές βρίσκονται στα σχετικά κεφάλαια.