ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80 ΑΘΗΝΑ
ΤΗΛ. 210 772 3009, 772 3032 - FAX: 210 772 3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
TEL. +30210 772 3009, 772 3032 - FAX: +30210 772 3025

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σεπτέμβριος 2023 – Κ. Αναγνωστόπουλος

ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε κάθε θέμα σε **ξεχωριστές κόλλες**.

Ολοκληρώματα των οποίων τα αποτελέσματα είναι καθαροί (αδιάστατοι) αριθμοί θα μπαίνουν στην τελική απάντηση με συμβολική μορφή και δεν χρειάζεται να υπολογίζονται. Για παράδειγμα, αν σε μια έκφραση παρουσιάζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_{4M}^{6M} \frac{dr}{\sqrt{1-2M/r}} = \int_2^3 \frac{2M\,d\lambda}{\sqrt{1-1/\lambda}} = 2M\int_2^3 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-1/\lambda}} = 2M\,I_1\,,$$

όπου $\lambda = r/(2M)$.

Χωρόχρονος Minkowski (20 βαθμοί)

Στον 4-διάστατο χωρόχρονο Minkowski θεωρείται η καμπύλη:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R\cosh\theta\,,\\ t(\theta) &= R\sinh\theta\,, \qquad -\infty < \theta < +\infty\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Πάνω στην καμπύλη αυτή, δίνονται τα γεγονότα $O(0,0)$, $A(R,0)$, $B\,(x(\theta_0), t(\theta_0))$, $C(2R, \sqrt{3}R)$, $\theta_0 > 0$ (ο 1ος αριθμός είναι η x-συντεταγμένη, και ο 2ος η t-συντεταγμένη).

1. Να γίνει η γραφική παράσταση της $(x(\theta), t(\theta))$ σε άξονες $x - t$, και να τοποθετηθούν τα παραπάνω σημεία πάνω στην καμπύλη
2. Να υπολογιστούν οι χωροχρονικές αποστάσεις των OA, OB, OC, AB
3. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου AB της καμπύλης
4. Να υπολογιστεί το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο C.
5. Αδρανειακός παρατηρητής παρατηρεί τα γεγονότα O και C και συμπεραίνει πως συμβαίνουν ταυτόχρονα. Πόσος χρόνος περνάει μεταξυ των γεγονότων A, C για τον παρατηρητή αυτόν;

Δίνεται: $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx)$.

Καμπύλος Χώρος (30 βαθμοί)

Θεωρήστε την υπερεπιφάνεια $dt = 0$ στη μετρική Schwarzschild με μετρική

$$dS^2 = \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,. \tag{2}$$

και την καμπύλη

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \frac{2M}{\lambda}\,,\\ \theta(\lambda) &= \frac{1}{2}\lambda^2\,, \qquad 0 < \lambda < 1\,,\\ \phi(\lambda) &= \frac{1}{3}\lambda^3\,. \end{aligned} \tag{3}$$

1. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σφαιρών $r = 3M$ και $r = 4M$
2. Υπολογίστε τον χωρικό όγκο μεταξύ των σφαιρών
3. Υπολογίστε τα μήκη των διανυσμάτων $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi$
4. Υπολογίστε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathrm{e}_r, \mathrm{e}_\theta, \mathrm{e}_\phi$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi$ για $r > 2M$.
5. Υπολογίστε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη, σαν συνάρτηση του λ.
6. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης για $1/4 < \lambda < 1/2$.

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής (20 βαθμοί)

Δίνεται ο τανυστής ενέργειας-ορμής ιδανικού υγρού σε χώρο Minkowski στη μορφή

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}\,, \qquad u^\mu u_\mu = -1\,. \tag{4}$$

Υποθέστε ότι ικανοποιεί την εξίσωση $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

1. Δείξτε ότι $\partial_\mu(\rho u^\mu) + p\,\partial_\mu u^\mu = 0$
2. Δείξτε ότι ο τανυστής $P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu$ είναι τανυστής προβολής, δηλαδή $P^\mu{}_\sigma P^\sigma{}_\nu = P^\mu{}_\nu$
3. Δείξτε ότι $P^\sigma{}_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu \partial_\mu u^\sigma + \partial^\sigma p + u^\sigma u^\mu \partial_\mu p = 0$

Καμπυλότητα (30 βαθμοί)

Σε χώρο με μετρική συμβατή με τη συναλλοίωτη παράγωγο και $\Gamma^\rho{}_{[\nu\lambda]} = 0$, ο τανυστής του Riemann έχει συνιστώσες

$$R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\,, \tag{5}$$

και

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda\,. \tag{6}$$

Ο τανυστής του Weyl δίνεται από τη σχέση

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \left(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}\right) + \frac{1}{3} g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} R\,. \tag{7}$$

1. Να δείξετε ότι $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} V^\lambda$
2. Να δείξετε ότι $C^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = 0$
3. Να δείξετε ότι $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$, θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις $R_{(\rho\sigma)\mu\nu} = R_{\rho\sigma(\mu\nu)} = 0$, $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$

Υπενθυμίζεται ότι:

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}\right)\,, \tag{8}$$

$$B_{[\mu\nu\sigma]} = \frac{1}{3!}\left(B_{\mu\nu\sigma} + B_{\sigma\mu\nu} + B_{\nu\sigma\mu} - B_{\mu\sigma\nu} - B_{\nu\mu\sigma} - B_{\sigma\nu\mu}\right)\,. \tag{9}$$