ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80 ΑΘΗΝΑ
ΤΗΛ. 210 772 3009, 772 3032 - FAX: 210 772 3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
TEL. +30210 772 3009, 772 3032 - FAX: +30210 772 3025

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ιούνιος 2023 – Κ. Αναγνωστόπουλος

ΟΔΗΓΙΕΣ

Να γράψετε το 1ο θέμα. Να επιλέξετε να γράψετε το ένα από τα θέματα 2 ή 3. Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα.

Άριστα είναι το 100.

ΘΕΜΑ 1ο (60 βαθμοί)

Θεωρείστε τη μετρική Schwarzschild στην περιοχή $r > 2M$, και το μετασχηματισμό συντεταγμένων $(t, r, \theta, \phi) \to (t, \xi, \theta, \phi)$, έτσι ώστε

$$r - 2M = \frac{\xi^2}{8M}\,, \quad \xi > 0\,. \tag{1}$$

Μετρική (10 βαθμοί)

Δείξτε ότι στο (t, ξ, θ, ϕ) σύστημα συντεταγμένων

$$ds^2 = -\frac{\kappa^2\xi^2}{\kappa^2\xi^2+1}dt^2 + (\kappa^2\xi^2+1)d\xi^2 + \frac{1}{4\kappa^2}(\kappa^2\xi^2+1)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{2}$$

όπου

$$\kappa = \frac{1}{4M}\,. \tag{3}$$

Εφαπτόμενος χώρος (5 βαθμοί)

Θεωρήστε τη βάση συντεταγμένων (coordinate basis)

$$\{\partial_\mu\} = \{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\} = \{\partial_t, \partial_\xi, \partial_\theta, \partial_\phi\}\,. \tag{4}$$

Εξετάστε το είδος (χωρικά, χρονικά ή null) των διανυσμάτων βάσης.

Υπολογίστε την ορθοκανονική βάση

$$\{\hat{e}_\mu\} = \{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{e}_t, \hat{e}_\xi, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}\,. \tag{5}$$

Υπολογίστε ένα μηδενικό (null) διάνυσμα και εκφράστε το ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\{\partial_\mu\}$.

Killing Vector Fields (KVF) (5 βαθμοί)

Να δείξετε ότι τα διανύσματικά πεδία ∂_t και ∂_ϕ είναι KVF της μετρικής (2).

Σωμάτιο μάζας $m > 0$ πέφτει ελεύθερα ακολουθώντας την τροχιά $(t(\tau), \xi(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$. Να γράψετε τις εκφράσεις που δίνουν τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες κατά τη διάρκεια κίνησης του σωματιδίου.

Καμπυλότητα (15 βαθμοί)

Οι συνιστώσες του τανυστή Riemann στη βάση $\{\partial_\mu\}$ είναι:

$$R_{1010} = -\frac{4\kappa^4\xi^2}{(\kappa^2\xi^2+1)^3} \tag{6}$$

$$R_{2020} = \frac{\kappa^2\xi^2}{2(\kappa^2\xi^2+1)^2} \tag{7}$$

$$R_{2121} = -\frac{1}{2} \tag{8}$$

$$R_{3030} = \frac{\kappa^2\xi^2\sin^2\theta}{2(\kappa^2\xi^2+1)^2} \tag{9}$$

$$R_{3131} = -\frac{1}{2}\sin^2\theta \tag{10}$$

$$R_{3232} = \frac{(\kappa^2\xi^2+1)\sin^2\theta}{4\kappa^2}\,. \tag{11}$$

Να υπολογιστούν οι συνιστώσες του $R_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\lambda}$ στη βάση $\{\hat e_\mu\}$.

Ελεύθερη πτώση σε σταθερό ξ (25 βαθμοί)

Παρατηρητής πέφτει ελεύθερα και κινείται σε τροχιά με σταθερό $\xi = \xi_0$.
Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$.
Πόσος χρόνος περνάει στο σύστημα του παρατηρητή (ιδιόχρονος) κατά μία πλήρη περιστροφή;
Δίνονται οι εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπύλων:

$$\ddot t + \frac{2}{\kappa^2\xi^3+\xi}\dot t\dot\xi = 0 \tag{12}$$

$$\ddot\xi - \frac{1}{2}\xi\left[\dot\theta^2 - \frac{2\kappa^2}{(\kappa^2\xi^2+1)^3}\left(\dot t^2 + (\kappa^2\xi^2+1)^2\dot\xi^2\right) + \sin^2\theta\,\dot\phi^2\right] = 0 \tag{13}$$

$$\ddot\theta + \frac{4\kappa^2\xi}{\kappa^2\xi^2+1}\dot\theta\dot\xi - \cos\theta\sin\theta\,\dot\phi^2 = 0 \tag{14}$$

$$\ddot\phi + 2\cot\theta\,\dot\theta\dot\phi + \frac{4\kappa^2\xi}{\kappa^2\xi^2+1}\dot\xi\dot\phi = 0\,, \tag{15}$$

όπου

$$\dot t = \frac{dt}{d\tau}\,, \quad \dot\xi = \frac{d\xi}{d\tau}\,, \quad \ldots \tag{16}$$

ΘΕΜΑ 2ο (40 βαθμοί)

Θεωρήστε το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, με Λαγκρατζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{17}$$

όπου

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{18}$$

Τα παρακάτω ερωτήματα, να απαντηθούν όταν η μετρική είναι Minkowski (επίπεδη). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε σχέσεις που ισχύουν σε καμπύλο χωρόχρονο.

Τανυστής Ενέργειας-Όρμής (20 βαθμοί)

Να δείξετε ότι ο τανυστής ενέργειας-ορμής του ΗΜ πεδίου μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} \tag{19}$$

Δίνεται ότι

$$E_i = -F_{0i} \tag{20}$$

$$B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^{ij}\,. \tag{21}$$

Να εκφράσετε τις συνιστώσες του $T_{\mu\nu}$ συναρτήσει των E_i, B_i.
Να εκφράσετε τη Λαγκρατζιανή πυκνότητα (17) συναρτήσει των E_i, B_i.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{22}$$

$$\delta g = -g\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\,. \tag{23}$$

Διατήρηση Τανυστή Ενέργειας-Όρμής (20 βαθμοί)

Να δείξετε ότι, αν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης για την (17) (εξισώσεις Maxwell), τότε ισχύει ότι:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{24}$$

ΘΕΜΑ 3ο (40 βαθμοί)

Έστω ∇_μ η συναλλοίωτη παράγωγος μιας Levi-Civita συνοχής, συμβατής με τη μετρική $g_{\mu\nu}$. Στις επόμενες ερωτήσεις, μπορείτε να θεωρήσετε τις παρακάτω σχέσεις δεδομένες:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}V^\lambda \tag{25}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, V^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}V^\lambda \tag{26}$$

$$R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\,. \tag{27}$$

Συνοχή (10 βαθμοί)

Να δείξετε πως αν δύο διανύσματα W^μ, U^μ μετατοπίζονται παράλληλα πάνω σε μια καμπύλη με εφαπτόμενο διάνυσμα V^μ, τότε τα εσωτερικά γινόμενα $W^\mu W_\mu$, $U^\mu U_\mu$, $W^\mu U_\mu$, παραμένουν σταθερά πάνω στην καμπύλη.
Να δείξετε ότι αν ω_μ είναι ένα one-form field, τότε

$$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\omega_\lambda\,. \tag{28}$$

Καμπυλότητα (15 βαθμοί)

Να δείξετε ότι

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\omega_\rho = -R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\omega_\lambda \tag{29}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,F^\sigma{}_\rho = R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu}F^\lambda{}_\rho - R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}F^\sigma{}_\lambda\,. \tag{30}$$

Συμμετρίες Τανυστή Riemann (15 βαθμοί)

Να δείξετε ότι

$$R^\mu{}_{[\nu\rho\sigma]} = 0\,. \tag{31}$$