**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**

**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»**

# Πληθωριστική Κοσμολογία

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του Νικόλαου Συρράκου**

Επιβλέπων: Αλέκος Κεχαγιάς

Αθήνα, Ιούνιος, 2017

# Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών ‘‘Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές’’. Όπως προδίδει και ο τίτλος της, στην εργασία αυτή μελετήσαμε τη θεωρία του κοσμικού πληθωρισμού, ενώ παράλληλα έγινε ανάλυση διάφορων πληθωριστικών μοντέλων και σύγκριση των θεωρητικών τους προβλέψεων με τις παρατηρήσεις.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του Κοσμολογικού Μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης, συγκεντρώνοντας τις βασικές εξισώσεις που θα μας είναι χρήσιμες για την μετέπειτα ανάπτυξη του θέματος και θέτοντας τις βάσεις για το φορμαλισμό μας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια αναλυτική μελέτη δύο προβλημάτων του κοσμολογικού μοντέλου, του προβλήματος του ορίζοντα (Horizon problem) και του προβλήματος της επιπεδότητας (Flatness problem). Στη συνέχεια, αναζητώντας λύση σε αυτά τα δύο προβλήματα οδηγούμαστε στην ιδέα του κοσμικού πληθωρισμού ως μια εποχή επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής, εξετάζονται οι συνθήκες υπό τις οποίες θα μπορούσε να λάβει χώρα το φαινόμενο του πληθωρισμού στη φύση, ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε τις προβλέψεις που δίνει η θεωρία του πληθωρισμού και τις φυσικές επιπτώσεις, τις οποίες θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε σήμερα.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη διάφορων πληθωριστικών μοντέλων, εξάγονται οι θεωρητικές τους προβλέψεις και γίνεται σύγκριση των προβλέψεων αυτών με παρατηρησιακά δεδομένα από τον δορυφόρο Planck [17].

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου Καθηγητή Α. Κεχαγιά, για την ευκαιρία που μου έδωσε να δουλέψω σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς και τους γονείς μου για τη συνολική υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Το Κοσμολογικό Μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης

Τα δεδομένα της παρατηρησιακής κοσμολογίας δείχνουν πως ζούμε σε ένα χωρικά επίπεδο, ομογενές, ισότροπο και διασταλόμενο σύμπαν. Με την έννοια της διαστολής του σύμπαντος εννοούμε πως στο παρελθόν, η απόσταση μεταξύ εμάς και των μακρινών γαλαξιών ήταν μικρότερη από ότι είναι σήμερα. Ένας λειτουργικός τρόπος για να περιγράψουμε το φαινόμενο της διαστολής του σύμπαντος, είναι το να εισάγουμε τον παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Η τιμή του σήμερα είναι μονάδα, αλλά ήταν μικρότερη κατά το παρελθόν.

Για να πάρουμε μια ποιοτική απεικόνιση του σύμπαντος, μπορούμε να φανταστούμε τον χώρο ως ένα πλέγμα το οποίο διαστέλλεται ομοιόμορφα με το πέρασμα του χρόνου. Τα σημεία του πλέγματος διατηρούν τις συντεταγμένες τους, επομένως η απόσταση μεταξύ των συντεταγμένων, την οποία θα αποκαλούμε comoving απόσταση, παραμένει σταθερή. Η φυσική απόσταση είναι ανάλογη του παράγοντα κλίμακας $a(t)$ και έχει χρονική εξάρτηση.

## 1.1 Ο μηχανισμός διαστολής του σύμπαντος

Η βαρύτητα παίζει κύριο ρόλο στην εξέλιξη του σύμπαντος, επομένως η ανάλυσή μας θα γίνει μέσα από το φορμαλισμό της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΣ) του Einstein. Για το υπόλοιπο της συζήτησής μας θα χρησιμοποιήσουμε μονάδες όπου $\hbar = c = 1$.

### 1.1.1 Η FRW μετρική

Η μετρική εν γένει μετατρέπει την απόσταση των συντεταγμένων σε φυσική απόσταση. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της ιδιότητας στη ΓΣ είναι η ακόλουθη

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.1}$$

Η μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι γενικά συμμετρική, το οποίο σημαίνει ότι έχει 4 διαγώνια και 6 μη διαγώνια στοιχεία. Η λειτουργία της είναι να παρέχει μία σύνδεση μεταξύ των συντεταγμένων και του φυσικού, στοιχειώδους μήκους $ds^2$. Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΣ) χρησιμοποιούμε την μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$. Ποια μετρική θα χρησιμποιήσουμε όμως για το σύμπαν μας;

Όπως είπαμε στην αρχή, το σύμπαν μας διαστέλλεται. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες του παράγοντα κλίμακας και της comoving απόστασης, αυτό σημαίνει ότι αν $x_0$ είναι η comoving απόσταση μεταξύ δύο σημείων σήμερα, η φυσική τους απόσταση σε κάποιο παρελθόντα χρόνο $t$ θα ήταν $a(t)x_0$.

Έχοντας ως παρατηρησιακό δεδομένο την χωρική επιπεδότητα του σύμπαντός μας, οδηγούμαστε σε μια μετρική που θα είναι όμοια με την μετρική Minkowski, με την διαφορά όμως ότι ο παράγοντας κλίμακας θα πρέπει να πολλαπλασιάζεται με την απόσταση. Καταλήγουμε λοιπόν πως για ένα χωρικά επίπεδο και διασταλόμενο σύμπαν θα χρησιμοποιούμε τη μετρική

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

η οποία μπορεί να γραφεί και σε μορφή που να θυμίζει την (1.1) ως

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{1.3}$$

Η μετρική αυτή είναι γνωστή και ως Friedmann-Robertson-Walker μετρική.

### 1.1.2 Η εξίσωση Friedmann

Η βαρύτητα περιγράφεται από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein, $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Ricci, R είναι το βαθμωτό Ricci και $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής. Ο τανυστής Ricci εκφράζεται μέσω των συμβόλων Christoffel.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} \tag{1.5}$$

Το σύμβολο Christoffel δίνεται από την έκφραση

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right] \tag{1.6}$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τη μορφή των εξισώσεων Einstein για ένα χωρικά επίπεδο και διαστελόμενο σύμπαν, πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τα σύμβολα Christoffel και τον τανυστή Ricci χρησιμοποιώντας την FRW. Ξεκινάμε υπολογίζοντας το $\Gamma^{0}_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = -1\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{0}}\right] = -1\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{0}}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{0}} \tag{1.7}$$

$$\Gamma^{0}_{00} = 0,\ \Gamma^{0}_{0i} = \Gamma^{0}_{i0} = 0 \tag{1.8}$$

$$\Gamma^{0}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{0}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(a^{2}\delta_{ij}) = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{1.9}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\Gamma^{i}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\Gamma^{i}_{\alpha\beta} &= \frac{g^{i\nu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right]\\ &= \frac{\delta_{ij}}{2a^{2}}\left[\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{j}}\right]\\ &= \frac{\delta_{ij}}{2a^{2}}\left[\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^{\alpha}}\right]\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\Gamma^{i}_{00} = 0,\ \Gamma^{0}_{ij} = 0 \tag{1.11}$$

$$\Gamma^{i}_{0j} = \Gamma^{i}_{j0} = \frac{\delta_{ij}}{2a^{2}}\left[\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^{0}}\right] = \frac{\delta_{ij}}{2a^{2}}2a\dot{a} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{1.12}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τα στοιχεία του τανυστή Ricci. Τα μόνα στοιχεία που δεν μηδενίζονται είναι για $\mu = \nu = 0$ και για $\mu = \nu = i$.

$$\begin{aligned}R_{00} &= \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}\\ &= -\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} - \Gamma^{\alpha}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}\\ &= -\Gamma^{i}_{0i,0} - \Gamma^{i}_{j0}\Gamma^{j}_{0i}\\ &= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} = -3\frac{\ddot{a}}{a}\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} \\
&= \Gamma^{0}_{ij,0} + \Gamma^{k}_{0k}\Gamma^{0}_{ij} - \Gamma^{0}_{lj}\Gamma^{l}_{i0} - \Gamma^{k}_{0j}\Gamma^{0}_{ik} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(a\dot{a}\delta_{ij}) + 3\frac{\dot{a}}{a}a\dot{a}\delta_{ij} - a\dot{a}\delta_{lj}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{il} - \frac{\dot{a}}{a}\delta_{jk}a\dot{a}\delta_{ik} \\
&= (\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij} + 3\dot{a}^2\delta_{ij} - \dot{a}^2\delta_{ij} - \dot{a}^2\delta_{ij} \\
&= (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Έχοντας αυτά τα αποτελέσματα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το βαθμωτό Ricci

$$
\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \\
&= -R_{00} + \frac{1}{a^2}\delta_{ij}R_{ij} = 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{1}{a^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \\
&= 3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\ddot{a}}{a} = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Μετά από όλες αυτές τις πράξεις, είμαστε έτοιμοι να δούμε ποια μορφή παίρνουν οι εξισώσεις πεδίου του Einstein για την FRW μετρική. Για να μπορέσουμε να τις λύσουμε όμως χρειάζεται να ξέρουμε τη μορφή του τανυστή ενέργειας-ορμής. Στο σημείο αυτό κάνουμε την προσέγγιση ότι το σύμπαν μπορεί να περιγραφεί από ένα ιδανικό και ισότροπο ρευστό, του οποίου ο τανυστής ενέργειας-ορμής έχει τη μορφή

$$
T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}
\tag{1.16}
$$

όπου $\rho$ είναι η πυκνότητα ενέργειας και $\mathcal{P}$ είναι η πίεση. Το χρονικό-χρονικό στοιχείο των εξισώσεων πεδίου θα είναι λοιπόν

$$
\begin{aligned}
R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 8\pi G T_{00} \\
-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] &= 8\pi G\rho \\
H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

ενώ το χωρικό-χωρικό κομμάτι είναι

$$
\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}H^2 = -4\pi G\mathcal{P}
\tag{1.18}
$$

Η εξίσωση (1.17) είναι γνωστή ως εξίσωση Friedmann για ένα χωρικά επίπεδο σύμπαν. $H(t) = {}^{\dot{a}}/_{a}$ είναι ο παράγοντας Hubble (γνωστός και ως σταθερά του Hubble), $H_0$ είναι η σημερινή του τιμή και $\rho$ είναι η πυκνότητα ενέργειας που αντιστοιχεί σε οτιδήποτε βρίσκεται στο σύμπαν (ακτινοβολία, ύλη, σκοτεινή ενέργεια).

Μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της κρίσιμης ενεργειακής πυκνότητας $\rho_{cr}$, με τη σημερινή τιμής της να είναι

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{1.19}$$

η οποία είναι η πυκνότητα που θα χρειαζόταν το σύμπαν για να διασταλλεί με ρυθμό $H_0$ χωρίς τη συμβολή κάποιου άλλου στοιχείου. Η εξίσωση (1.17) μπορεί τότε να πάρει τη μορφή

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \tag{1.20}$$

## 1.2 Σύμορφος χρόνος

Η διαστολή του σύμπαντος παρατηρείται με τη μορφή γαλαξιών που απομακρύνονται από εμάς. Οι γαλαξίες αυτοί λειτουργούν ως πηγές φωτός και παρατηρώντας τα μήκη κύματος στα οποία εκπέμπουν, μπορούμε να συμπεράνουμε πόσο γρήγορα απομακρύνονται από εμάς. Όμως το μήκος κύματος τους φωτός που εκπέμπεται από μια πηγή που απομακρύνεται μεγαλώνει, με αποτέλεσμα το μήκος κύματος που παρατηρεί κανείς να είναι μεγαλύτερο από το μήκος κύματος που εξέπεμψε η πηγή. Μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία μέσω του παράγοντα ερυθρομετατόπισης $z$:

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{1}{a} \tag{1.21}$$

Άρα λοιπόν, μετρώντας το κατά πόσο τα εκπεμπόμενα μήκη κύματος έχουν μετατοπιστεί προς το ερυθρό μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα το πόσο γρήγορα οι πηγές εκπομπής απομακρύνονται από εμάς.

Πως όμως μετράμε αποστάσεις σε ένα σύμπαν που διαστέλλεται; Η θεμελιώδης ποσότητα είναι η απόσταση στο comoving πλέγμα. Για ένα χωρικά επίπεδο σύμπαν, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ είναι $[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}}$.

Μια πολύ σημαντική comoving απόσταση είναι η απόσταση που θα μπορούσε να έχει διανύσει το φως από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι σήμερα, υπό την απουσία αλληλεπιδράσεων. Για ένα χρονικό διάστημα $dt$, το φως ταξιδεύει μια comoving απόσταση $dx = dt/a$, επομένως η συνολική comoving απόσταση που θα μπορούσε να έχει ταξιδέψει το φως είναι

$$\eta = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{a(\tau)} \tag{1.22}$$

Η απόσταση αυτή είναι σημαντική διότι καμιά πληροφορία δεν μπορεί να έχει διαδοθεί μακρύτερα από $\eta$ πάνω στο comoving πλέγμα από την αρχή του χρόνου. Επομένως, περιοχές που απέχουν αποστάσεις μεγαλύτερες από $\eta$ δεν είναι αιτιατά συνδεδεμένες (causally connected) , το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά μεταξύ τους. Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε την απόσταση $\eta$ ως τον comoving ορίζοντα. Μπορούμε επίσης να δώσουμε στο $\eta$ την ερμηνεία μιας χρονικής μεταβλητής, την οποία θα ονομάσουμε σύμορφο χρόνο, ενώ το σύμβολο $t$ αναπαριστά τον κοσμικό χρόνο. Ο σύμορφος χρόνος χρησιμοποιείται συχνά για την περιγραφή της εξέλιξης του σύμπαντος. Στην περίπτωση που θα χρησιμοποιήσουμε τον σύμορφο χρόνο ως χρονική μεταβλητή, η παράγωγος ως προς αυτή τη μεταβλητή θα συμβολίζεται με ένα τόνο, π.χ. $a'$. Μπορούμε επίσης να γράψουμε το στοιχείο μήκους $\mathrm{d}s^2$ χρησιμοποιώντας τον συμόρφο χρόνο, ως

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\big( - \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\vec{x}^2\big) \tag{1.23}$$

# Κεφάλαιο 2

# Προβλήματα του Κοσμολογικού Μοντέλου και Κοσμικός Πληθωρισμός

## 2.1 Το πρόβλημα του ορίζοντα

Ένα πολύ βασικό πρόβλημα του καθιερωμένου μοντέλου της μεγάλης έκρηξης είναι το λεγόμενο πρόβλημα του ορίζοντα. Το 1965 ανακαλύφθηκε ένα σχεδόν ισοτροπικό υπόβαθρο μικροκυματικής ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία αυτή, γνωστή ως CMB (από το Cosmic Microwave Background radiation), μας παρέχει μια εικόνα του σύμπαντος όταν αυτό είχε ηλικία μόλις $3 \times 10^5$ έτη. Για τα φωτόνια του CMB ο παράγοντας ερυθρομετατόπισης είναι $z = 1100$ και αντιστοιχεί στην περίοδο της τελευταίας σκέδασής τους. Από τότε μέχρι και σήμερα ταξιδεύουν ελεύθερα στο σύμπαν, ώσπου φτάνουν σε εμάς και τα ανιχνεύουμε.

Για να κατανοήσουμε το πρόβλημα το οποίο συνόδευσε την ανακάλυψη του CMB θα μελετήσουμε το ακόλουθο σενάριο. Έστω ότι ένας comoving παρατηρητής σε ένα σημείο $(r_e, t_e)$ εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα και ότι αυτό το σήμα ανιχνεύεται από έναν comoving παρατηρητή σε ένα άλλο σημείο $(r_0, t_0)$. Το φως ταξιδεύει σε κοσμικές γραμμές για τις οποίες η χωροχρονική μετατόπιση είναι μηδέν. Για να απλουστεύσουμε την ανάλυσή μας θα ορίσουμε το σημείο $r_0$ ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων. Με βάση αυτή την επιλογή θα ισχύει ότι $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 = 0$ και επομένως

$$\mathrm{d}s^2 = 0 \rightarrow \mathrm{d}t^2 = a(t)^2 \mathrm{d}r^2 \rightarrow \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^{r_e} \mathrm{d}r \tag{2.1}$$

Η εξίσωση (2.1) μας δίνει την comoving απόσταση που έχει διανύσει το σήμα. Η φυσική απόσταση της εκπέμπουσας πηγής τη χρονική στιγμή $(t_0)$ που αυτό ανιχνεύεται είναι

$$d_{phys} = a(t_0)\int_0^{r_e} \mathrm{d}r = a(t_0)\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{2.2}$$

Το μοντέλο της μεγάλης έκρηξης τοποθετεί την έναρξη μέτρησης του χρόνου κατά την χρονική στιγμή όπου $a(t) = 0$. Επομένως η έκφραση

$$a(t)\int_0^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{2.3}$$

μας δίνει την μακρύτερη φυσική απόσταση που έχει ταξιδέψει ένα φωτεινό σήμα από την αρχή του σύμπαντος. Στην (2.3) μπορούμε να αναγνωρίσουμε τον σύμορφο χρόνο (1.22), που όπως προαναφέραμε αποτελεί την μακρύτερη comoving απόσταση που έχει ταξιδέψει ένα φωτεινό σήμα από την αρχή του σύμπαντος.

Η εξίσωση (2.3) αναπαριστά επίσης την μακρύτερη απόσταση κατά την οποία δύο περιοχές θα μπορούσαν να έχουν επικοινωνήσει ύστερα από τη μεγάλη έκρηξη. Αυτή η απόσταση ονομάζεται σωματιαδιακός ορίζοντας. Θα συμβολίσουμε με $d_H$ την φυσική έκταση του ορίζοντα και με $r_H$ την αντίστοιχη comoving έκτασή του.

$$d_H(t) = a(t)\int_0^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = a(t)\int_0^{r_H} \mathrm{d}r \tag{2.4}$$

Θα υπολογίσουμε την έκταση του ορίζοντα για τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις. Για την εποχή κατά την οποία στο σύμπαν επικρατούσε η ακτινοβολία, όπου ίσχυε $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$

$$d_H(t) = t^{\frac{1}{2}}\int_0^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{t'^{\frac{1}{2}}} = 2t \tag{2.5}$$

και για την εποχή όπου στο σύμπαν επικρατούσε η ύλη, όπου ίσχυε $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$

$$d_H(t) = t^{\frac{2}{3}}\int_0^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{t'^{\frac{2}{3}}} = 3t \tag{2.6}$$

Μετά από όλες αυτές τις τεχνικές παρατηρήσεις, ας δούμε τι μπορούμε να πούμε για το CMB. Όπως είπαμε αρχικά, η ακτινοβολία αυτή είναι σχεδόν ισοτροπική. Η φυσική απόσταση της πηγής του CMB κατά τη στιγμή της εκπομπής ήταν

$$d_{CMB}(t_e) = a(t_e)\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{2.7}$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά τη στιγμή της εκπομπής οι πηγές της ακτινοβολίας που ερχόταν από αντίθετες κατευθύνσεις στον ουρανό θα χωρίζονταν από από μια φυσική απόσταση περίπου ίση με

$$d_{sep}(t_e) = 2d_{CMB}(t_e) \tag{2.8}$$

Επιπλέον τη έκταση του ορίζοντα την στιγμή της εκπομπής ήταν

$$d_H(t_e) = a(t_e) \int_0^{t_e} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{2.9}$$

Θέτουμε τώρα το ακόλουθο ερώτημα. Είναι δυνατόν οι πηγές που εκπέμπουν το CMB να ήταν αιτιατά συνδεδεμένες μεταξύ τους την στιγμή της εκπομπής; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το λόγο της απόστασης που τις χώριζε προς την έκταση του ορίζοντα.

$$\frac{d_{sep}(t_e)}{d_H(t_e)} = \frac{2\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}}{\int_0^{t_e} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}} \tag{2.10}$$

Για ένα σύμπαν στο οποίο κυριαρχεί η ύλη, ισχύει ότι $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ και αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned} d_{sep}(t_e) &= 2a(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = 2a(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{2}{3}}} = 6a(t_e)\left(t_0^{\frac{1}{3}} - t_e^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= 6a(t_e)t_0^{\frac{1}{3}}\left(1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{6t_0 a(t_e)}{a(t_0)}\left(1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$d_H(t_e) = a(t_e) \int_0^{t} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{2}{3}}} = 3a(t_e)t_e^{\frac{1}{3}} = \frac{3t_0 a(t_e)}{a(t_0)}\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.12}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.10), (2.11), (2.12) παίρνουμε

$$\frac{d_{sep}(t_e)}{d_H(t_e)} = 2\left(\left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) = 2\left(\left(\frac{a(t_0)}{a(t_e)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \tag{2.13}$$

Χρησιμοποιώντας τη σύμβαση ότι για το παρόν ισχύει πως $(t = t_0), a(t_0) = 1$, και χρησιμοποιώντας το ορισμό της ερυθρομετατόπισης (1.21), η εξίσωση (2.13) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{d_{sep}(t_e)}{d_H(t_e)} = 2\left[\sqrt{1+z} - 1\right] \tag{2.14}$$

Για το CMB, $z = 1100$, άρα η εξίσωση (2.14) δίνει

$$d_{sep}(t_e) \simeq 60 d_H(t_e) \tag{2.15}$$

Άρα λοιπόν κατά τη στιγμή της εκπομπής η απόσταση που χώριζε τις δύο περιοχές ήταν περίπου 60 φορές μεγαλύτερη της έκτασης του ορίζοντα. Αυτό σημαίνει πως οι περιοχές αυτές δεν ήταν αιτιατά συνδεδεμένες μεταξύ τους εκείνη τη στιγμή.

Παρόλα αυτά, από τη στιγμή που το CMB είναι σχεδόν ισοτροπικό, αυτές οι περιοχές που χωρίζονταν μεταξύ από αποστάσεις πολλών οριζόντων κατά τη στιγμή της εκπομπής, είχαν σχεδόν την ίδια θερμοκρασία. Αν όμως δεν ήταν αιτιατά συνδεδεμένες, γεγονός που σημαίνει ότι κατά τη στιγμή της εκπομπής δεν μπορούσαν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, τότε πως είναι δυνατόν να έχουν σχεδόν ίδιες θερμοκρασίες;

Αυτό είναι το πρόβλημα του ορίζοντα!

## 2.2 Το πρόβλημα της επιπεδότητας

Το σύμπαν φαίνεται να είναι χωρικά επίπεδο, παρόλα αυτά αν επιτρέψουμε την ύπαρξη χωρικής καμπυλότητας, τότε η μετρική που θα το περιγράφει θα είναι η γενική FRW μετρική

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{2.16}$$

όπου $k$ είναι η σταθερά καμπυλότητας. Εαν είναι $k = 0$ τότε έχουμε ένα χωρικά επίπεδο σύμπαν, εαν είναι $k = +1$ τότε έχουμε ένα σύμπαν που μοιάζει με σφαίρα (κλειστό σύμπαν) και εαν είναι $k = -1$ τότε έχουμε ένα σύμπαν με γεωμετρία υπερβολικού χώρου (ανοιχτό σύμπαν). Χρησιμοποιώντας τη μετρική (2.16), μπορούμε να εξάγουμε τη γενικευμένη εξίσωση Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{2.17}$$

Παρατηρούμε αμέσως πως θέτοντας $k = 0$ παίρνουμε την εξίσωση (1.17) για ένα χωρικά επίπεδο σύμπαν.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (2.17) στην παρακάτω μορφή

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{cr}} - \frac{k}{\left(aH\right)^2} \tag{2.18}$$

όπου $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$ είναι η χρονοεξαρτώμενη κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε τις ακόλουθες χρονοεξαρτώμενες συναρτήσεις ενεργειακών λόγων

$$\Omega(a) = \frac{\rho(a)}{\rho_{cr}(a)} \tag{2.19}$$

$$\Omega_k(a) = -\frac{k}{\left(aH(a)\right)^2} \tag{2.20}$$

όπου $\Omega(a)$ είναι η ενεργειακή συνεισφορά όλων των διαφορετικών συστατικών του σύμπαντος (ύλη, ακτινοβολία, σκοτεινή ενέργεια) και $\Omega_k(a)$ είναι η αντίστοιχη συνεισφορά λόγω χωρικής καμπυλότητας. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτούς, η γενικευμένη εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή

$$1 = \Omega(a) + \Omega_k(a) \tag{2.21}$$

Από τη στιγμή που τα παρατηρησιακά μας δεδομένα μας δείχνουν ότι ζούμε σε ένα χωρικά επίπεδο σύμπαν, θα πρέπει να ισχύει ότι $|\Omega_k| < 1$. Ας δούμε τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από τη συνθήκη αυτή. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραμέτρου Hubble, μπορούμε να ξαναγράψουμε το $|\Omega_k|$ στη μορφή

$$|\Omega_k| = \frac{|k|}{\dot{a}^2} \tag{2.22}$$

Στην εποχή της κυριαρχίας της ύλη στο σύμπαν, από τη στιγμή που η θερμοκρασία έπεσε στους $10^4 K$ εως το πρόσφατο παρελθόν, ο παράγοντας κλίμακας αυξανόταν ως $t^{2/3}$, το οποίο σημαίνει ότι και το $|\Omega_k|$ αυξανόταν ως $t^{2/3}$, επομένως ως $a(t)$. Από τη στιγμή όμως που $a(t) \propto T^{-1}$, θα ισχύει ότι $|\Omega_k| \propto T^{-1}$ και επειδή $|\Omega_k| < 1$, όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος ήταν $10^4 K$, θα ίσχυε ότι $|\Omega_k| \leq 10^{-4}$.

Σε προγενέστερους χρόνους, κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας της ακτινοβολίας στο σύμπαν, ο παράγοντας κλίμακας αυξανόταν ως $t^{1/2}$, το οποίο σημαίνει ότι $|\Omega_k| \propto a^2$ και ως προς τη θερμοκρασία $|\Omega_k| \propto T^{-2}$. Για να μην είναι το $|\Omega_k|$ μεγαλύτερο από $10^{-4}$ για $T = 10^4 K$, όταν η θερμοκρασία ήταν $T = 10^{10} K$ η συνεισφορά λόγω καμπυλότητας θα πρέπει να ήταν περίπου $10^{-16}$, και ακόμα μικρότερη σε παρελθόντες χρόνους.

Δεν υπάρχει τίποτα το παράδοξο στο αποτέλεσμα αυτό, μιας και δεν υπάρχει κάποιος λόγος που να απαγορεύει στην καμπυλότητα να έχει μια τόσο μικρή τιμή. Ωστόσο θα θέλαμε να βρούμε μια εξήγηση για το αποτέλεσμα αυτό. Η απουσία εξήγησης είναι γνωστή ιστορικά ως το πρόβλημα της επιπεδότητας.

## 2.3 Ο κοσμικός πληθωρισμός ως λύση

### 2.3.1 Λύνοντας το πρόβλημα του ορίζοντα

Στην εξίσωση (1.22) ορίσαμε τον σύμορφο χρόνο ως την μακρύτερη comoving απόσταση την οποία μπορεί να έχει διανύσει ένα φωτεινό σήμα από την αρχή του σύμπαντος. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (1.22) στην ακόλουθη μορφή

$$\eta = \int_0^a \frac{\mathrm{d}a'}{a'} \frac{1}{a'H(a')} = \int_0^a (\mathrm{d}ln a')\big(a'H(a')\big)^{-1} \tag{2.23}$$

Η ποσότητα $\big(aH(a)\big)^{-1}$ ορίζεται ως η comoving ακτίνα Hubble, η οποία αναπαριστά την comoving απόσταση που μπορεί να διανύσει ένα σωματίδιο κατά τη διάρκεια μιας περιόδου διαστολής, δηλαδή περίπου για όσο χρόνο χρειάζεται για να διπλασιαστεί ο παράγοντας κλίμακας. Η διαφορά μεταξύ του σύμορφου χρόνου, ο οποίος καλείται και comoving ορίζοντας, και τη comoving ακτίνας Hubble έγκειται στο γεγονός ότι εαν η απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων είναι μεγαλύτερη από $\eta$, τότε τα δύο σωματίδια ήταν πάντα αιτιατά ασύνδετα. Από την άλλη εαν η απόσταση μεταξύ τους είναι μεγαλύτερη από $\big(aH(a)\big)^{-1}$, τότε είναι μονάχα τώρα αιτιατά ασύνδετα. Αυτό αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο, τώρα ο comoving ορίζοντας να είναι πολύ μεγαλύτερος από την comoving ακτίνα Hubble, έτσι ώστε σωματίδια που δεν μπορούν να επικοινωνήσουν σήμερα, να μπορούσαν να επικοινωνήσουν στο παρελθόν. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί εαν κατά το παρελθόν η ποσότητα $\big(aH(a)\big)^{-1}$ ήταν πολύ μεγαλύτερη από ότι είναι σήμερα. Παρόλα αυτά κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό για ένα σύμπαν στο οποίο κυριαρχεί είτε η ύλη είτε η ακτινοβολία, όπου η comoving ακτίνα Hubble αυξάνεται με το χρόνο.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να σκιαγραφήσουμε μια λύση για το πρόβλημα του ορίζοντα. Έστω ότι κατά το παρελθόν το σύμπαν δεν κυριαρχείτο από ύλη ή από ακτινοβολία. Ίσως τότε για ένα σύντομο χρονικό διάστημα η comoving ακτίνα Hubble να μειωνόταν. Εαν όμως η ποσότητα $\big(aH(a)\big)^{-1}$ μειώνεται, τότε η ποσότητα $aH(a)$ πρέπει να αυξάνεται. Οι συνέπειες αυτής της διαδικασίας για τον παράγοντα κλίμακας τότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a\frac{\dot{a}}{a}\right] = \ddot{a} > 0 \tag{2.24}$$

Άρα λοιπόν για να δώσουμε μια λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα, το σύμπαν θα πρέπει να έχει περάσει από μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής. Αυτή είναι η βασική ιδέα του κοσμικού πληθωρισμού.

Τα περισσότερα πληθωριστικά μοντέλα λειτουργούν σε θερμοκρασίες της τάξης των $10^{15}GeV$. Ποια ήταν η έκταση της comoving ακτίνας Hubble όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος ήταν $T = 10^{15}GeV$; Για να απαντήσουμε στην ερώτηση αυτή θα κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση: θα αγνοήσουμε την εποχή της κυριαρχίας της ύλης στο σύμπαν και θα θεωρήσουμε ότι από το τέλος της πληθωριστικής εποχής του σύμπαντος μέχρι και σήμερα ζούμε σε ένα σύμπαν στο οποίο κυριαρχεί η ακτινοβολία. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $H \sim a^{-2}$ και επομένως

$$\frac{a_0 H_0}{a_e H_e} = a_e \tag{2.25}$$

όπου $a_e$ είναι η τιμή του παράγοντα κλίμακας κατά τη λήξη του πληθωρισμού. Εαν η τιμή $a_e$ αντιστοιχεί σε μια εποχή όπου $T = 10^{15}GeV$ τότε

$$a_e \simeq \frac{T_0}{10^{15}GeV} \simeq 10^{-28} \tag{2.26}$$

Η εξίσωση (2.26) μας λέει ότι η comoving ακτίνα Hubble στο τέλος του πληθωρισμού ήταν 28 τάξεις μεγέθους μικρότερη από ότι είναι σήμερα. Υπενθυμίζουμε ότι για να λειτουργήσει ο πληθωρισμός, η comoving ακτίνα Hubble στην αρχή του πληθωρισμού θα πρέπει να ήταν μεγαλύτερη από τη σημερινή της έκταση. Λόγω της (2.26) λοιπόν, η comoving ακτίνα Hubble κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού θα πρέπει να μειώθηκε τουλάχιστον 28 τάξεις μεγέθους.

Για να μπορέσουμε να μοντελοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία, θα ξεκινήσουμε κάνοντας την υπόθεση ότι η παράμετρος Hubble H παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και επειδή $\mathrm{d}lna = H\mathrm{d}t$, θα έχουμε

$$a(t) = a_e \exp\big[H(t - t_e)\big] \tag{2.27}$$

όπου $t < t_e$, με το $t_e$ να είναι η χρονική στιγμή λήξης του πληθωρισμού. Σε μια μείωση $10^{-28}$ στην comoving ακτίνα Hubble αντιστοιχεί μια αύξηση του παράγοντα κλίμακας της τάξης $10^{28}$, το οποίο σημαίνει ότι το όρισμα του εκθετικού στην εξίσωση (2.27) θα πρέπει να είναι της τάξης $ln\big(10^{28}\big) \sim 64$. Αν λάβουμε υπόψη μας διορθώσεις λόγω της εποχής της κυριαρχίας της ύλης στο σύμπαν τότε καταλήγουμε στο νούμερο 60. Αυτό σημαίνει ότι ο κοσμικός πληθωρισμός μπορεί να λύσει το πρόβλημα του ορίζοντα εαν το σύμπαν διασταλεί εκθετικά για 60 e-folds.

Για να επιστρέψουμε σε φυσικές ποσότητες, το φυσικό μέγεθος (ο παράγοντας κλίμακας επί το comoving μέγεθος) μιας αιτιατά συνδεδεμένης περιοχής αυξάνεται εκθετικά γρήγορα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Αυτό σημαίνει ότι αστρονομικές περιοχές που παρατηρούμε σήμερα είχαν μικροσκοπικό μέγεθος πριν τον πληθωρισμό. Ο συνολοικός comoving ορίζοντας παύει να είναι μια χρήσιμη χρονική μεταβλητή κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, αφού το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά γρήγορα και ο σύμορφος χρόνος γίνεται πολύ γρήγορα μεγάλος, ενώ μετά τον πληθωρισμό αυξάνεται πολύ πιο αργά κατά τη διάρκεια της κυριαρχείας της ακτινοβολίας και ύστερα της ύλης. Για αυτό το λόγο αφαιρούμε το αρχέγονο κομμάτι από το συνολικό ορίζοντα και επαναορίζουμε τον σύμορφο χρόνο ως

$$\eta = \int_{t_e}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{2.28}$$

Αυτό σημαίνει πως κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού ο comoving ορίζοντας είναι αρνητικός, παρόλα αυτά αυξάνεται συνεχώς.

Εν κατακλείδι, στην προσπάθειά μας να λύσουμε το πρόβλημα του ορίζοντα φτάσαμε στην ιδέα του κοσμικού πληθωρισμού, ως μια εποχή εκθετικής διαστολής του σύμπαντος. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαστολής, η φυσική ακτίνα Hubble $H^{-1}$ παραμένει σταθερή, με αποτέλεσμα σωματίδια που ήταν αρχικά σε αιτιατή σύνδεση μεταξύ τους να μην μπορούν πλέον να επικοινωνήσουν.

### 2.3.2 Λύνοντας το πρόβλημα της επιπεδότητας

Ας υποθέσουμε ότι η εποχή του πληθωρισμού υπήρξε και ότι κατά τη διάρκεια αυτής ίσχυε ότι $a \sim e^N$. Εαν στην αρχή του πληθωρισμού ίσχυε ότι $|\Omega_k| \sim 1$, τότε στο τέλος του θα είχαμε $|k|/\big(a_e H_e\big)^2 \sim e^{-2N}$. Αυτό σημαίνει ότι η σημερινή του τιμή θα είναι

$$|\Omega_k| = \frac{|k|}{\big(a_0 H_0\big)^2} = e^{-2N}\left(\frac{a_e H_e}{a_0 H_0}\right) < 1 \Rightarrow e^N > \frac{a_e H_e}{a_0 H_0} \tag{2.29}$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες υποθέσεις που κάναμε για τις (2.25) και (2.26), θα έχουμε

$$e^N > 10^{28} \Rightarrow N > ln\left(10^{28}\right) \sim 64 \tag{2.30}$$

το οποίο σημαίνει ότι για να είναι το σύμπαν χωρικά επίπεδο σήμερα $\big(|\Omega_k| < 1\big)$, ο πληθωρισμός θα πρέπει να διήρκησε περίπου 60 e-folds, ακριβώς όσο βρήκαμε και για τη λύση του προβλήματος του ορίζοντα. Άρα λοιπόν ο πληθωρισμός λύνει ταυτόχρονα και τα δύο προβλήματα.

# Κεφάλαιο 3

# Ο μηχανισμός του Κοσμικού Πληθωρισμού

## 3.1 Αρνητική πίεση

Τώρα που έχουμε μια ιδέα για το πως μπορούμε να λύσουμε τα προβλήματα του ορίζοντα και της επιπεδότητας, πρέπει να σκεφτούμε πως είναι δυνατόν η ιδέα μας να υπάρξει στη φύση. Μέσω της γενικής σχετικότητας, η διαστολής του σύμπαντος συνδέεται με την ενέργειά του. Άρα λοιπόν η ερώτηση που πρέπει να απαντήσουμε τώρα είναι, τι είδους ενέργεια μπορεί να προκαλέσει την επιταχυνόμενη διαστολή;

Για να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση, γυρνάμε στις εξισώσεις Einstein για την επίπεδη FRW μετρική (1.3)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{3.1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\mathcal{P} \tag{3.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.1) με (1/2) και αφαιρώντας από αυτή την (3.2) παίρνουμε

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}) \tag{3.3}$$

Λόγω της (2.24), για να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή θα πρέπει

$$\mathcal{P} < -\frac{\rho}{3} \tag{3.4}$$

Από τη στιγμή που η ενεργειακή πυκνότητα είναι πάντα θετική, η πίεση θα πρέπει να είναι αρνητική. Η μη σχετικιστική ύλη έχει μικρή και θετική πίεση, ενώ για ένα σχετικιστικό αέριο ισχύει $\mathcal{P} = +\rho/3$, το οποίο είναι και πάλι θετικό. Αυτό σημαίνει πως ό,τι κι αν προκαλεί τον πληθωρισμό, δεν είναι κοινή ύλη ή ενέργεια.

## 3.2 Το πεδίο inflaton

Τώρα θα μελετήσουμε τον πληθωρισμό μέσω ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου, το οποίο θα ονομάσουμε inflaton. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι εαν ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(\vec{x},t)$ μπορεί να ικανοποιήσει τη συνθήκη (3.4).

Η δράση για ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο το οποίο κάνει ζεύξη με την βαρύτητα είναι

$$S_\phi = -\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi \quad \text{με} \quad \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \tag{3.5}$$

όπου $\mathcal{L}_\phi$ είναι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του βαθμωτού πεδίου. Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής ο οποίος αντιστοιχεί στην (3.5) και δίνεται από την εξίσωση

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.6}$$

Ο υπολογισμός έχει ως εξής

$$\begin{aligned}
\delta S_\phi &= -\int \mathrm{d}^4x\left[\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L}_\phi + \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\right] \\
&= -\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\Big[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi\Big]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Επομένως

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right) \tag{3.8}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.8) ως

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi\partial_\nu\phi - g^\mu{}_\nu\left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi + V(\phi)\right) \tag{3.9}$$

Θεωρούμε ότι το πεδίο inflaton $\phi$ είναι κυρίως ομογενές, αποτελούμενο από ένα μηδενικής τάξης όρο $\phi^{(0)}(t)$ και από μια πρώτης τάξης διαταραχή $\delta\phi(\vec{x},t)$. Στην ακόλουθη ανάλυση χρησιμοποιούμε μόνο το ομογενές κομμάτι του πεδίου. Από τη στιγμή που έχει μόνο χρονική εξάρτηση, μονάχα οι χρονικές παράγωγοι θα επιβιώσουν. Επομένως ο τανυστής ενέργειας-ορμής γίνεται

$$T^{\mu(0)}_\nu = -g^\mu{}_0 g^0{}_\nu\big(\dot\phi^{(0)}\big)^2 - g^\mu{}_\nu\left[-\frac{1}{2}\big(\dot\phi^{(0)}\big)^2 + V\big(\phi^{(0)}\big)\right] \tag{3.10}$$

Εφαρμόζοντας την (1.16) στην (3.10) παίρνουμε

$$\rho = \frac{1}{2}\big(\dot{\phi}^{(0)}\big)^2 + V\big(\phi^{(0)}\big) \tag{3.11}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\big(\dot{\phi}^{(0)}\big)^2 - V\big(\phi^{(0)}\big) \tag{3.12}$$

άρα λοιπόν η εξίσωση Friedmann για το μη διαταραγμένο κομμάτι του βαθμωτού πεδίου είναι

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\big(\dot{\phi}^{(0)}\big)^2 + V\big(\phi^{(0)}\big)\right) \tag{3.13}$$

Από την εξίσωση (3.12) παρατηρούμε ότι για να έχουμε αρνητική πίεση, θα πρέπει η δυναμική ενέργεια του πεδίου να είναι μεγαλύτερη από την κινητική του.

Συνδυάζοντας τις (3.1) και (3.11) και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, έχουμε

$$2\frac{\dot{a}}{a}\left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] = \frac{8\pi G}{3}\left[\left(\dot{\phi}^{(0)}\right)\left(\ddot{\phi}^{(0)}\right) + V_\phi \dot{\phi}^{(0)}\right] \tag{3.14}$$

όπου

$$V_\phi = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi^{(0)}} \tag{3.15}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τις (3.1) και (3.3), μπορούμε να ξαναγράψουμε το δεξί μέρος της (3.14) στη μορφή

$$2\frac{\dot{a}}{a}\left[-\frac{4\pi G}{3}\big(\rho + 3\mathcal{P}\big) - \frac{8\pi G}{3}\rho\right] = -8\pi G\frac{\dot{a}}{a}\big(\rho + \mathcal{P}\big) \tag{3.16}$$

Λόγω των (3.11) και (3.12), η εξίσωση (3.16) γίνεται

$$-8\pi G\frac{\dot{a}}{a}\big(\rho + \mathcal{P}\big) = -8\pi G H\big(\dot{\phi}^{(0)}\big)^2 \tag{3.17}$$

Εφαρμόζοντας την (3.17) στην (3.14) παίρνουμε την εξίσωση κίνησης του πεδίου inflaton.

$$\ddot{\phi}^{(0)} + 3H\dot{\phi}^{(0)} + V_\phi = 0 \tag{3.18}$$

## 3.3 Προσέγγιση αργής κύλισης

Έχοντας αναπτύξει ένα γενικό φορμαλισμό για το βαθμωτό πεδίο inflaton, ας δούμε κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να οδηγήσει σε μια πληθωριστική εποχή. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να συμβεί αυτό είναι να έχουμε αρνητική πίεση, το οποίο λόγω της (3.12) σημαίνει ότι

$$V \gg \left(\dot{\phi}^{(0)}\right)^2 \tag{3.19}$$

Θεωρούμε δηλαδή ότι το βαθμωτό πεδίο κυλίεται αργά πάνω στο δυναμικό, το οποίο θα είναι αρκετά επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι το $\dot{\phi}^{(0)}$ θα είναι μικρό, άρα μπορούμε να αγνοήσουμε το $\ddot{\phi}^{(0)}$. Με βάση αυτά η εξίσωση Friedmann γίνεται

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V \tag{3.20}$$

ενώ η εξίσωση κίνησης του πεδίου γίνεται

$$\begin{aligned} 3H\dot{\phi}^{(0)} &= -V_\phi \\ \dot{\phi}^{(0)} &= -\frac{V_\phi}{3H} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Λόγω της (3.21) η (3.19) δίνει

$$H^2 \ll \frac{\left(V_\phi\right)^2}{V} \tag{3.22}$$

ενώ η συνθήκη $|\ddot{\phi}^{(0)}| \ll |3H\dot{\phi}^{(0)}|$ μας δίνει

$$|V_{\phi\phi}| \ll H^2 \tag{3.23}$$

Μπορούμε να ορίσουμε κάποιες παραμέτρους για να ποσοτικοποιήσουμε την διαδικασία της αργής κύλισης. Η πρώτη παράμετρος είναι η

$$\epsilon_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{H}\right) = -\frac{\dot{H}}{H^2} \tag{3.24}$$

Λόγω των (3.13) και (3.18) έχουμε ότι

$$\dot{H} = -4\pi G\left(\dot{\phi}^{(0)}\right)^2 \tag{3.25}$$

και λόγω των (3.20) και (3.21), η παράμετρος $\epsilon_1$ γίνεται

$$\epsilon_1 = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 \tag{3.26}$$

όπου $M_{pl}$ είναι η ανηγμένη (reduced) μάζα Planck, ίση με

$$M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G} = \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \tag{3.27}$$

και $m_{pl}$ είναι η μάζα Planck. Η δεύτερη παράμετρος που ορίζουμε είναι η $\delta$

$$\delta = M_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} = \frac{1}{3}\frac{V_{\phi\phi}}{H^2} \tag{3.28}$$

ενώ μέσω των $\epsilon_1$ και $\delta$ μπορούμε να ορίσουμε την παράμετρο $\epsilon_2$

$$\epsilon_2 = 2M_{pl}^2 \left[ \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 - \frac{V_{\phi\phi}}{V} \right] = 4\epsilon_1 - 2\delta \tag{3.29}$$

Ας εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά την παράμετρο $\epsilon_1$. Εξ ορισμού η παράμετρος αυτή μετράει πως μεταβάλλεται η φυσική ακτίνα Hubble με το χρόνο. Η αρχική μας υπόθεση ήταν πως η φυσική ακτίνα Hubble παραμένει σταθερή με το χρόνο, όμως στην προσέγγιση αργής κύλισης θεωρούμε πως η μεταβολή της είναι πολύ μικρή, αλλά όχι μηδενική, όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.25). Ας δούμε τι σημαίνει αυτό για την παράμετρο $\epsilon_1$.

$$\begin{aligned} \dot{a} &= aH \\ \ddot{a} &= \dot{a}H + a\dot{H} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= H^2 + \dot{H} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Λόγω της (3.24) η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon_1) \tag{3.31}$$

Λόγω της πληθωριστικής συνθήκης (2.24), το αριστερό μέλος της (3.31) θα είναι θετικό, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\epsilon_1 < 1 \tag{3.32}$$

Για όσο καιρό ικανοποιείται η συνθήκη αυτή, το σύμπαν θα βρίσκεται σε μια εποχή πληθωρισμού. Εν γένει κατά τη διάρκεια της πληθωριστικής εποχής ισχύει $\epsilon_1 \ll 1$, $|\delta| \ll 1$. Το τέλος του πληθωρισμού ορίζεται ως η στιγμή όπου η συνθήκη (3.32) θα παραβιαστεί

$$\epsilon_1 = 1 \tag{3.33}$$

Αυτό που μένει να βρούμε είναι, δεδομένου ενός βαθμωτού πεδίου που ικανοποιεί τις συνθήκες (3.19) και (3.32), πόσα e-folds θα διαρκέσει η πληθωριστική εποχή. Εαν ονομάσουμε $\phi_i$ και $\phi_f$ τις τιμές του πεδίου inflaton στην αρχή και στο τέλος του πληθωρισμού αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
N &\equiv \int_{t_i}^{t_f} H\,\mathrm{d}t \\
&\simeq \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}^{(0)}}\mathrm{d}\phi^{(0)} \\
&\simeq -3\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H^2}{V_\phi}\mathrm{d}\phi^{(0)} \\
&= -8\pi G\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_\phi}\mathrm{d}\phi^{(0)} \\
&= -\frac{1}{M_{pl}^2}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_\phi}\mathrm{d}\phi^{(0)}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (3.21),(3.20) και (3.27).

# Κεφάλαιο 4

# Κοσμολογικές διαταραχές

Η θεωρία του κοσμικού πληθωρισμού κατασκευάστηκε αρχικά για να δώσει λύση στα 2 σημαντικά προβλήματα του μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης που αναλύσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Η κύρια λειτουργία της όμως είναι το να παράγει μέσω των κβαντικών διακυμάνσεων του πεδίου inflaton, την αφετηρία των κοσμολογικών διαταραχών που δημιούργησαν τις πρώτες δομές του σύμπαντος, την εξέλιξη των οποίων παρατηρούμε εμείς σήμερα.

Οι διακυμάνσεις του πεδίου inflaton συνδέονται με τον τανυστή ενέργειας-ορμής και επομένως μέσω των εξισώσεων Einstein προκαλούν διαταραχές στην ίδια τη μετρική. Αν αντιστοιχήσουμε ένα μήκος κύματος $\lambda = 2\pi a/\kappa$ σε αυτές τις διαταραχές, τότε λόγω της εκθετικής διαστολής του σύμπαντος πολύ γρήγορα θα βγουν εκτός της φυσικής ακτίνας Hubble, $\lambda \gg H^{-1}$. Αυτή την κλίμακα μήκους θα την ονομάσουμε super-Hubble. Μόλις βρεθούν σε super-Hubble κλίκαμα, οι διαταραχές αυτές ''παγώνουν'' και μπορούν να τις αντιμετωπίσουμε ως κλασσικές.

Με το τέλος του πληθωρισμού η φυσική ακτίνα Hubble αυξάνεται και οι διακυμάνσεις ξαναμπαίνουν στον ορίζοντα Hubble($H^{-1}$). Αυτές οι διακυμάνσεις δημιουργούν διαταραχές στην ύλη, οι οποίες με τη σειρά τους γεννούν τις δομές που παρατηρούμε σήμερα στο σύμπαν (συμπλέγματα γαλαξιών κτλ).

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι κβαντικές διαταραχές του πεδίου inflaton συνδέονται με τις διαταραχές της μετρικής, καθώς και τις προβλέψεις που μπορεί να κάνει κανείς βασισμένος στην θεωρία του κοσμικού πληθωρισμού.

## 4.1 Βαθμωτές διαταραχές μετρικής

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι διακυμάνσεις του πεδίου inflaton συνδέονται άμεσα με διαταραχές της μετρικής.[1] Σκοπός μας εδώ είναι να βρούμε την διαταραγμένη μορφή των εξισώσεων Einstein λόγω των διαταραχών της μετρικής. Η μορφή των διαταραχών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι [2]

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & 0 \\ 0 & (1-2\Psi)\delta_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -1+2\Phi & 0 \\ 0 & (1+2\Psi)\delta^{ij} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

όπου χρησιμοποιούμε το σύμορφο χρόνο ως χρονική μεταβλητή. Αν γράψουμε τη συνολική μετρική ως

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\vec{x},\eta) \ , \ \delta g_{\mu\nu} \ll g^{(0)}_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

τότε έχουμε

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Phi & 0 \\ 0 & -2\Psi\delta_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 2\Phi & 0 \\ 0 & 2\Psi\delta^{ij} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Είμαστε έτοιμοι τώρα να ξεκινήσουμε τον υπολογισμό των διαταραγμένων εξισώσεων Einstein, αρχίζοντας από τα σύμβολα Christoffel

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{a}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\delta g^{a\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\right] \\ &+ \frac{1}{2}g^{a\rho}\left[\frac{\partial \delta g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \delta g_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \delta g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

[1] Εν γένει οι διαταρχές της μετρικής μπορούν να ταξηνομηθούν ανάλογα με το spin τους σε βαθμωτές (0), διανυσματικές (1) και τανυστικές (2). Στον πληθωρισμό εμφανίζονται μόνο οι βαθμωτές και οι τανυστικές.

[2] Στην γλώσσα της θεωρίας βαθμίδας, αυτή η επιλογή αντιστοιχεί στην σύμορφη Νευτώνεια βαθμίδα.

Κρατώντας γραμμικούς όρους πρώτης τάξης έχουμε

$$\delta\Gamma^0_{00} = \Phi' \tag{4.7}$$
$$\delta\Gamma^0_{0i} = \partial_i\Phi \tag{4.8}$$
$$\delta\Gamma^i_{00} = \partial^i\Phi \tag{4.9}$$
$$\delta\Gamma^0_{ij} = -2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ij} - 2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{ij} - \Psi'\delta_{ij} \tag{4.10}$$
$$\delta\Gamma^i_{0j} = -\Psi'\delta^i_j \tag{4.11}$$
$$\delta\Gamma^i_{jk} = \partial_j\Psi\delta^i_k - \partial_k\Psi\delta^i_j + \partial^i\Psi\delta_{jk} \tag{4.12}$$

Συνεχίζουμε με τη διαταραγμένη μορφή του τανυστή Ricci

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = {} & \partial_a\Gamma^a_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^a_{\nu a} - \delta\Gamma^a_{\sigma a}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^a_{\sigma a}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \\ & - \delta\Gamma^a_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu a} - \Gamma^a_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu a}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Και πάλι κρατώντας γραμμικούς όρους πρώτης τάξης έχουμε

$$\delta R_{00} = \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Psi' + 3\frac{a'}{a}\Phi' \tag{4.14}$$

$$\delta R_{0i} = 2\partial_i\Psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{ij} = {} & \Bigg( -\frac{a'}{a}\Phi' - 5\frac{a'}{a}\Psi' - 2\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi \\ & - 2\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi - \Psi'' + \partial_\kappa\partial^\kappa\Psi\Bigg)\delta_{ij} \\ & + \partial_i\partial_j\Psi - \partial_i\partial_j\Phi\end{aligned} \tag{4.16}$$

Για το βαθμωτό Ricci θα ισχύει

$$\delta R = \delta g^{\mu a}R_{a\mu} + g^{\mu a}\delta R_{a\mu} \tag{4.17}$$

και επομένως

$$\delta R = \frac{1}{a^2}\left( - 2\partial_i\partial^i\Phi - 6\Psi'' - 6\frac{a'}{a}\Phi' - 18\frac{a'}{a}\Psi' - 12\frac{a''}{a}\Phi + 4\partial_i\partial^i\Psi\right) \tag{4.18}$$

Οι διαταραχές του τανυστή Eistein θα είναι

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R \tag{4.19}$$

και οι συνιστώσες του θα έχουν τη μορφή

$$\delta G_{00} = -6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\partial_i\partial^i\Psi \tag{4.20}$$

$$\delta G_{0i} = 2\partial_i\Psi + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\delta G_{ij} = &\Bigg(2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\bigg(\frac{a'}{a}\bigg)^2\Phi \\ &+ 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\bigg(\frac{a'}{a}\bigg)^2\Psi + 2\Psi'' - \partial_\kappa\partial^\kappa\Psi + \partial_\kappa\partial^\kappa\Phi\Bigg)\delta_{ij} \\ &+ \partial_i\partial_j\Psi - \partial_i\partial_j\Phi\end{aligned} \tag{4.22}$$

### 4.1.1 Διαταραχές τανυστή ενέργειας-ορμής

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής επηρεάζεται και από τις διαταραχές της μετρικής αλλά και από τις κβαντικές διακυμάνσεις του πεδίου inflaton:

$$\begin{aligned}\delta T_{\mu\nu} = &\partial_\mu\delta\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\delta\phi - \delta g_{\mu\nu}\bigg(\frac{1}{2}g^{a\beta}\partial_a\phi\partial_\beta\phi + V\bigg) \\ &- g_{\mu\nu}\bigg(\frac{1}{2}\delta g^{a\beta}\partial_a\phi\partial_\beta\phi + g^{a\beta}\partial_a\delta\phi\partial_\beta\phi + V'\delta\phi\bigg)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Οι συνιστώσες του θα έχουν τη μορφή

$$\delta T_{00} = \delta\phi'\phi' + 2\Phi V a^2 + a^2 V'\delta\phi \tag{4.24}$$

$$\delta T_{0i} = \partial_i\delta\phi\phi' \tag{4.25}$$

$$\delta T_{ij} = \Big(\delta\phi'\phi' - \Phi\phi^2 - a^2V'\delta\phi - \Psi(\phi')^2 + 2\Psi V a^2\Big)\delta_{ij} \tag{4.26}$$

### 4.1.2 Διαταραγμένες εξισώσεις Einstein

Ξεκινάμε συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.22) και (4.26). Βλέπουμε ότι ο τανυστής ενέργειας-ορμής δεν έχει μη διαγώνιες συνιστώσες επομένως θα ισχύει ότι

$$\partial_i\partial_j\Big(\Psi - \Phi\Big) = 0 \Leftrightarrow \Psi = \Phi \tag{4.27}$$

Η παραπάνω συνθήκη μας επιτρέπει να δουλέψουμε μόνο με μία από τις ποσότητες $\Psi, \Phi$,και εμείς διαλέγουμε την $\Psi$. Συγκρίνοντας τώρα τις εξισώσεις (4.21) και (4.25) βλέπουμε ότι ισχύει

$$\Psi' + \frac{a'}{a}\Psi = 4\pi G\phi'\delta\phi = \epsilon_1 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \frac{\delta\phi}{\phi'} \tag{4.28}$$

Στον κοσμικό χρόνο $t$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\dot{\Psi} + H\Psi = \epsilon_1 H^2 \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \tag{4.29}$$

### 4.1.3 Το φάσμα ισχύος

Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι να μελετήσουμε την εξέλιξη των διαταραχών σε super-Hubble κλίμακες για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τα αποτελέσματα του πληθωρισμού. Είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πως οι διακυμάνσεις του πεδίου inflaton ‘‘παγώνουν’’ μόλις περάσουν σε αυτές τις κλίμακες (δες παράρτημα για λεπτομέρειες). Τι συμβαίνει όμως με τις διαταραχές τις μετρικής;

Η εξίσωση (4.29) μας δείχνει τη σύνδεση μεταξύ τους, όμως η μορφή των διαταραχών (4.1) που επιλέξαμε δεν είναι η μοναδική που μπορεί να επιλέξει κανείς. Η γενική σχετικότητα είναι για θεωρία βαθμίδας και η επιλογή μιας συγκεκριμένης βαθμίδας ισοδυναμεί με την επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων. Για να μπορέσουμε όμως να μελετήσουμε την φυσική πραγματικότητα, χρειαζόμαστε ποσότητες που είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η διαταραχή $\Psi$ προφανώς δεν είναι, αφού εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Για το λόγο αυτό ορίζουμε την διαταραχή καμπυλότητας $\zeta$:

$$\zeta = \Psi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} = \Psi - \frac{\delta\rho}{3(\rho + \mathcal{P})} \tag{4.30}$$

η οποία όχι μόνο είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, αλλά όπως μπορεί να αποδειχτεί, διατηρείται σταθερή σε super-Hubble κλίμακες. Λόγω των (3.11) και (3.12), κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού θα ισχύει ότι $\rho + \mathcal{P} = \dot{\phi}^2$. Επίσης σε super-Hubble κλίμακες το $\delta\phi$ είναι σταθερό, επομένως

$$\delta\rho = \dot{\phi}\dot{\delta\phi} + V'\delta\phi \simeq V'\delta\phi \simeq -3H\dot{\phi}\delta\phi \tag{4.31}$$

άρα η (4.30) σε super-Hubble κλίμακες γράφεται ως

$$\zeta \simeq \Psi + \frac{3H\dot{\phi}}{\dot{\phi}^2}\delta\phi = \Psi + H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \tag{4.32}$$

Λόγω της διατήρησης του (4.32) σε super-Hubble κλίμακες κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και το $\Psi$ δεν θα μεταβάλλεται σημαντικά σε αυτή την περίπτωση. Επομένως επιστρέφοντας στην (4.29) θα έχουμε

$$\Psi \simeq \epsilon_1 H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \tag{4.33}$$

Αυτό σημαίνει ότι η (4.32) θα πάρει τώρα τη μορφή

$$\zeta \simeq (1+\epsilon_1) H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \simeq H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \tag{4.34}$$

Για την καλύτερη μελέτη των διαταραχών, η ποσότητα που χρησιμοποιούμε είναι το φάσμα ισχύος (power spectrum). Εν γένει για ένα πεδίο $g(\vec{x},t)$, το οποίο στο χώρο Fourier γράφεται

$$g(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} g_k(t) \tag{4.35}$$

το φάσμα ισχύως ορίζεται ως

$$P_g(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |g_k|^2 \tag{4.36}$$

Με βάση αυτά λοιπόν, το φάσμα ισχύος της διαταραχής καμπυλότητας $\zeta$ θα είναι, λόγω της (4.34)

$$P_\zeta = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} |\delta\phi_k|^2 = \frac{k^3}{4\pi^2 M_{pl}^2 \epsilon_1} |\delta\phi_k|^2 \tag{4.37}$$

Άρα λοιπόν αυτό που πρέπει τώρα να κάνουμε είναι να βρούμε μια έκφραση για το $\delta\phi_k$. Το πεδίο inflaton είναι όπως έχουμε πει ένα βαθμωτό πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι θα ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \big( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \big) = \frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{4.38}$$

Η διαταραγμένη εξίσωση Klein-Gordon σε super-Hubble κλίμακες έχει τη μορφή

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + (V_{\phi\phi} - 6\epsilon_1 H^2)\delta\phi_k = 0 \tag{4.39}$$

Η λύση τη παραπάνω εξίσωσης δίνεται στα πλαίσια τη θεωρίας των κβαντικών διακυμάνσεων ενός βαθμωτού πεδίου κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού που παραθέτουμε στο παράρτημα της εργασίας. Κάνοντας την αλλαγή $\delta\chi_k = \delta\phi_k / a$ και δουλεύοντας στο σύμορφο χρόνο, η εξίσωση Klein-Gordon παίρνει τη μορφή

$$\delta\chi_k'' - \frac{1}{\eta^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\delta\chi_k = 0 \tag{4.40}$$

όπου $\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon_1 - \delta$. Η λύση τελικά θα έχει τη μορφή

$$|\delta\phi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \tag{4.41}$$

Άρα λοιπόν βλέπουμε πως όντως οι διακυμάνσεις του πεδίου inflaton, και κατ΄ επέκταση της διαταραχής της μετρικής, είναι όντως σχεδόν σταθερές σε super-Hubble κλίμακες. Είμαστε πλέον έτοιμοι να υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος της διαταραχής καμπυλότητας

$$P_\zeta(k) = \frac{1}{2M_{pl}^2\epsilon_1}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_s-1} = A_\zeta^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_s-1} \tag{4.42}$$

όπου $n_s$ είναι ο φασματικός δείκτης των βαθμωτών διαταραχών, τον οποίο ορίζουμε ως

$$n_s - 1 = \frac{\mathrm{dln}P_\zeta}{\mathrm{dln}k} = 3 - 2\nu = 2\delta - 6\epsilon_1 = -2\epsilon_1 - \epsilon_2 \tag{4.43}$$

Η ποσότητα $n_s$ μετράται πειραματικά μέσω αστρονομικών παρατηρήσεων και η σύγκρισή της με την θεωρητική τιμή που προβλέπει κάθε πληθωριστικό μοντέλο μπορεί να μας δώσει μια εικόνα για το πόσο κοντά στην πραγματικότητα βρίσκονται οι εκτιμήσεις μας.

## 4.2 Τανυστικές διαταραχές μετρικής

Οι τανυστικές διαταραχές της μετρικής μεταφράζονται σε βαρυτικά κύματα τα οποία μεταφέρουν στην πραγματικότητα τις διακυμάνσεις του πεδίου βαρύτητας. Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, προβλέπεται από τη θεωρία πως θα παραχθούν κβαντικές διακυμάνσεις της μετρικής, οι οποίες θα παράξουν το δικό τους φάσμα ισχύος. Η μορφή των τανυστικών διαταραχών είναι

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\Big[-\mathrm{d}\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\Big] \tag{4.44}$$

με $h_{ij} \ll 1$. Οι διαταραχές αυτές έχουν δύο πολώσεις και μπορούν να γραφτούν ως

$$h_{ij} = h_{(1)}e_{ij}^{(1)} + h_{(2)}e_{ij}^{(2)} \tag{4.45}$$

όπου $e^{(1)}, e^{(2)}$ είναι τα διανύσματα πόλωσης. Οι εξισώσεις κίνησης για τα πεδία $h_{ij}$ μπορούν να εξαχθούν από την δράση

$$S_h = \frac{M_{pl}^2}{4}\int \mathrm{d}x^3\mathrm{d}\eta \;\; a^2\frac{1}{2}\Big[\big(h'_{ij}\big)^2 - \big(\nabla h_{ij}\big)^2\Big] \tag{4.46}$$

Η δράση αυτή ''θυμίζει'' την δράση δύο ανεξάρτητων, άμαζων βαθμωτών πεδίων. Με βάση τη μελέτη των κβαντικών διακυμάνσεων ενός άμαζου βαθμωτού πεδίου που υπάρχει στο παράρτημα, μπορεί να δείξει κανείς πως, κάνοντας την αλλαγή

$$u_k = \frac{aM_{pl}}{2} h_k \tag{4.47}$$

και δουλεύοντας σε σύμορφο χρόνο, η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0 \tag{4.48}$$

Η εξίσωση αυτή έχει ακριβής λύση, η οποία είναι

$$u_k = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \tag{4.49}$$

Μας ενδιαφέρει η μορφή της λύσης σε super-Huble κλίμακες

$$|u_k| = \frac{Ha}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2} - \nu_T}, \ \nu_T = \frac{3}{2} - \epsilon_1 \tag{4.50}$$

Μπορούμε τώρα λοιπόν να υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος των τανυστικών διακυμάνσεων για super-Huble κλίμακες

$$P_h = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{ij} |h_{ij\ k}|^2 = \frac{8}{M_{pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T} = A_h^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T} \tag{4.51}$$

όπου $n_T$ είναι ο φασματικός δείκτης για τις τανυστικές διαταραχές, για τον οποίο ισχύει

$$n_T = \frac{\mathrm{dln} P_h}{\mathrm{dln} k} = 3 - 2\nu_T = -2\epsilon_1 \tag{4.52}$$

Όπως στην περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών, έτσι και εδώ, η τιμή του φασματικού δείκτη $n_T$ μπορεί να συγκριθεί με παρατηρησιακά δεδομένα για να διαπιστώσουμε το πόσο καλά δουλεύει κάθε μοντέλο.

## 4.3 Ο λόγος πλατών

Έχοντας βρει δύο εκφράσεις για τα φάσματα ισχύος των διαταραχών της μετρικής, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον λόγο των πλατών τους ως

$$r = \frac{A_h^2}{A_\zeta^2} = 16\epsilon_1 \tag{4.53}$$

Ο λόγος του πλάτους των τανυστικών διαταραχών προς το πλάτος των βαθμωτών διαταραχών είναι μια ποσότητα που χαρακτηρίζει κάθε μοντέλο και μέσω του ορισμού της παραμέτρου $\epsilon_1$ συνδέεται άμεσα με την ενεργειακή κλίμακα του πληθωρισμού.

# Κεφάλαιο 5

# Ανάλυση Μοντέλων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε διάφορα πληθωριστικά μοντέλα και θα εξάγουμε τις θεωρητικές προβλέψεις που δίνουν για τις παραμέτρους αργής κύλισης $\epsilon_1$,$\epsilon_2$ καθώς και για το φασματικό δείκτη $n_s$ αλλά και για τον λόγο των πλατών $r$.

Για κάθε μοντέλο οι τιμές των $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $n_s$, $r$ υπολογίζονται για την τιμή του πεδίου inflaton, όταν το μήκος κύματος της διαταραχής που προκαλεί ξεπερνά την ακτίνα Hubble. Το σημείο αυτό θα το ονομάσουμε σημείο μεταπήδησης. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν το μήκος κύματος μιας διαταραχής περνά σε super-Hubble κλίκαμα, οι διαταραχές ‘‘παγώνουν’’ (είναι σχεδόν σταθερές με το χρόνο), επομένως η τιμή του πεδίου inflaton στο σημείο μεταπήδησης είναι η κατάλληλη τιμή για να δώσει προβλέψεις που μπορούν να συγκριθούν με παρατηρησιακά δεδομένα.

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη των πληθωριστικών μοντέλων παραθέτουμε τις μαθηματικές εκφράσεις των ποσοτήτων που θα μας απασχολήσουν:

$$\epsilon_1 = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 \tag{5.1}$$

$$\epsilon_2 = 2M_{pl}^2\left[\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 - \frac{V_{\phi\phi}}{V}\right] \tag{5.2}$$

$$n_s = 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2 \tag{5.3}$$

$$r = 16\epsilon_1 \tag{5.4}$$

$$N = -\frac{1}{M_{pl}^2}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_\phi}\mathrm{d}\phi^{(0)} \tag{5.5}$$

Για όλα τα μοντέλα που θα μελετήσουμε, η μορφή του δυναμικού για το κάθε υποψήφιο πεδίο inflaton ακολουθεί την εργασία [5].

## 5.1 Higgs Inflation

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό [6], το πεδίο inflaton είναι το πεδίο Higgs, το οποίο ανακαλύφθηκε το 2012 [7],[8] στον LHC, έχοντας όμως μια non-minimal σύζευξη με τη βαρύτητα. Για το μοντέλο αυτό το δυναμικό έχει τη μορφή

$$V(\phi) = M^4\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{pl}}}\right)^2 \tag{5.6}$$

όπου

$$M^4 = \frac{M_{pl}^4 \lambda}{4\xi^2} \tag{5.7}$$

με $\lambda \simeq 0.7$ να είναι η self-interacting σταθερά σύζευξης του μποζονίου Higgs και $\xi \gg 1$ να είναι η σταθερά σύζευξης του Higgs με τη βαρύτητα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi/M_{pl}$, η εξίσωση (5.6) γίνεται

$$V(x) = M^4\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x}\right)^2 \tag{5.8}$$

ενώ οι (5.1) και (5.2) θα γίνουν

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_x}{V}\right)^2 \tag{5.9}$$

$$\epsilon_2 = 2\left[\left(\frac{V_x}{V}\right)^2 - \frac{V_{xx}}{V}\right] \tag{5.10}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τις δύο πρώτες παραγώγους του δυναμικού ως προς τη νέα μεταβλητή $x$:

$$V_x = \sqrt{\frac{8}{3}}M^4\left(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}x}\right) \tag{5.11}$$

$$V_{xx} = \frac{4}{3}M^4 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}x} - \frac{4}{3}M^4 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x}\right) \tag{5.12}$$

Βάσει των παραπάνω, οι (5.9) και (5.10) δίνουν

$$\epsilon_1 = \frac{4}{3}\left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}x}\right)^{-2} \tag{5.13}$$

$$\epsilon_2 = \frac{2}{3}\left[\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right]^{-2} \tag{5.14}$$

Ο πληθωρισμός σταμάτα μόλις παραβιαστεί η συνθήκη $\epsilon_1 \ll 1$, δηλαδή όταν $\epsilon_1 = 1$. Άρα η τιμή του πεδίου $x$ όταν λήξει ο πληθωρισμός θα είναι

$$\left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}x_{end}}\right)^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \quad x_{end} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \simeq 0.94 \tag{5.15}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την τιμή του πεδίο $x$ όταν η διαταραχή περάσει σε super-Hubble κλίκαμα. Ο υπολογισμός θα γίνει μέσω του αριθμού των e-folds που θα έχει ''τρέξει'' ο πληθωρισμός ως εκείνη τη στιγμή. Δουλεύοντας στα όρια $x \gg 1$ και $x_* \gg x_{end}$, όπου $x_*$ είναι τη τιμή του πεδίου στο σημείο μεταπήδησης, η εξίσωση (5.5) δίνει

$$N_* = -\frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\phi_*}^{\phi_f} \frac{V}{V'} \mathrm{d}\phi^{(0)} = -\int_{x_*}^{x_{end}} \frac{V}{V_x} \mathrm{d}x \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}x_*} \tag{5.16}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $x_*$, έχουμε

$$x_* = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left(\frac{4N_*}{3}\right) \tag{5.17}$$

Άρα λοιπόν, οι τιμές των παραμέτρων αργής κύλισης στο σημείο μεταπήδησης θα είναι

$$\epsilon_{1*} = \frac{4}{3\left(1 - \frac{4N_*}{3}\right)^2} \tag{5.18}$$

$$\epsilon_{2*} = \frac{2}{3}\left[\sinh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4N_*}{3}\right)\right)\right]^{-2} \tag{5.19}$$

Αν αφήσουμε τον πληθωρισμό να τρέξει για $N_* = 60$ e-folds, τότε οι τιμές που θα πάρουμε για τις $\epsilon_{1*}$ και $\epsilon_{2*}$ παραμέτρους είναι

$$\epsilon_{1*} = 0.000213641 \tag{5.20}$$

$$\epsilon_{2*} = 0.0341826 \tag{5.21}$$

Επομένως για τον φασματικό δείκτη $n_s$ και για το λόγο πλατών $r$ θα έχουμε από τις (5.3) και (5.4):

$$n_s = 0.96539 \tag{5.22}$$

$$r = 0.00341826 \tag{5.23}$$

## 5.2 Radiative Corrected Higgs Inflation

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό [9], υπεισέρχονται κβαντικές διορθώσεις στον υπολογισμό του δυναμικού του πεδίου Higgs, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται η έκφραση (5.6):

$$V(\phi) = M^4\left(1 - 2e^{-\frac{2\phi}{\sqrt{6}M_{pl}}} + \frac{A_1}{16\pi^2}\frac{\phi}{\sqrt{6}M_{pl}}\right) \tag{5.24}$$

όπου και πάλι $M^4 = \frac{M_{pl}^4\lambda}{4\xi^2}$, ενώ για την παράμετρο $A_1$ θα ισχύει

$$\frac{A_1}{64\pi^2} \ll 1 \tag{5.25}$$

Κάνοντας πάλι την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi/M_{pl}$ το δυναμικό θα πάρει τη μορφή

$$V(x) = M^4\left(1 - 2e^{-\frac{2x}{\sqrt{6}}} + \frac{A_1}{16\pi^2}\frac{x}{\sqrt{6}}\right) \tag{5.26}$$

Υπολογίζουμε τις δύο πρώτες παραγώγους της (5.26):

$$V_x = M^4\left[\frac{4}{\sqrt{6}}e^{-\frac{2x}{\sqrt{6}}} + \frac{A_1}{16\sqrt{6}\pi^2}\right] \tag{5.27}$$

$$V_{xx} = -M^4\frac{4}{3}e^{-\frac{2x}{\sqrt{6}}} \tag{5.28}$$

Βάσει των παραπάνω, οι παράμετροι $\epsilon_1, \epsilon_2$ θα έχουν τη μορφή

$$\epsilon_1 = \frac{1}{12}\left[\frac{4e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} + \frac{A_1}{16\pi^2}}{1 - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} + \frac{A_1}{32\pi^2}\sqrt{\frac{2}{3}}x}\right]^2 \tag{5.29}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3}\frac{8e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x}\left[1 + \frac{A_1}{16\pi^2} + \frac{A_1}{32\pi^2}\sqrt{\frac{2}{3}}x\right] + \frac{A_1}{256\pi^2}}{\left[1 - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} + \frac{A_1}{32\pi^2}\sqrt{\frac{2}{3}}x\right]^2} \tag{5.30}$$

Εαν παρόλα αυτά κάνουμε την προσέγγιση $V(\phi) \simeq M^4$, [5], τότε θα πάρουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\epsilon_1 \simeq \frac{1}{12}\left[4e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} + \frac{A_1}{16\pi^2}\right]^2 \tag{5.31}$$

$$\epsilon_2 \simeq 4\epsilon_1 + \frac{8}{3}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x} \tag{5.32}$$

Ο πληθωρισμός θα σταματήσει όταν $\epsilon_1 = 1$:

$$4e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x_{end}} + \frac{A_1}{16\pi^2} = \sqrt{12} \Leftrightarrow \quad x_{end} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{A_1}{64\pi^2}\right) \simeq \sqrt{\frac{3}{8}} \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \tag{5.33}$$

Χρειαζόμαστε την τιμή του πεδίου στο σημείο μεταπήδησης το οποίο θα υπολογίσουμε μέσω του αριθμού των e-folds του πληθωρισμού. Χρησιμοποιώντας και πάλι την προσέγγιση $V(\phi) \simeq M^4$ και αγνοώντας και πάλι τη συνεισφορά του $x_{end}$, δουλεύοντας δηλαδή στο όριο $x_* \gg x_{end}$, θα έχουμε:

$$N_* \simeq -\int_{x_*}^{x_{end}} \frac{\sqrt{6}}{4e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}x_*} + \frac{A_1}{16\pi^2}} = \frac{48\pi^2}{A_1} \ln\left(1 + \frac{A_1}{64\pi^2} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}x_*}\right) \tag{5.34}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω έκφραση παίρνουμε την τιμή του πεδίο στο σημείο μεταπήδησης:

$$x_* = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left[\frac{64\pi^2}{A_1}\left(e^B - 1\right)\right] \tag{5.35}$$

όπου $B = N_* A_1/\left(48\pi^2\right)$. Αντικαθιστώντας την (5.35) στις (5.31), (5.32) έχουμε:

$$\epsilon_{1*} = \frac{4}{3}\left(\frac{A_1}{64\pi^2}\right)^2 \left(\frac{e^B}{e^B - 1}\right)^2 \tag{5.36}$$

$$\epsilon_{2*} = 4\epsilon_{1*} + \frac{8}{3}\frac{A_1}{64\pi^2}\frac{1}{e^B - 1} \tag{5.37}$$

Οι προβλέψεις του μοντέλου αυτού για το φασματικό δείκτη $n_s$ και τον λόγο πλατών $r$ είναι

$$n_s = 1 - 6\epsilon_{1*} - \frac{8}{3}\frac{A_1}{64\pi^2}\frac{1}{e^B - 1} \simeq 1 - \frac{2}{N_*}\left(\frac{B}{e^B - 1}\right) \tag{5.38}$$

$$r = \frac{64}{3}\left(\frac{A_1}{64\pi^2}\right)^2 \left(\frac{e^B}{e^B - 1}\right)^2 \tag{5.39}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως όταν λάβουμε υπόψη μας τις κβαντικές διορθώσεις στο πεδίο Higgs, τα αποτελέσματα που παίρνουμε εξαρτώνται από την παράμετρο $A_1$. Στο τέλος του κεφαλαίου, θα συγκρίνουμε τις προβλέψεις των μοντέλων με τις παρατηρησιακές τιμές που προκείπτουν για τα $n_s$ και $r$ και θα δούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου $A_1$ δίνει έγκυρα αποτελέσματα το συγκεκριμένο μοντέλο.

## 5.3 Large Field Inflation

Εδώ πρόκειται για μια ολόκληρη κατηγορία μοντέλων, τα οποία είναι επίσης γνωστά στη βιβλιογραφία και ως χαοτικός πληθωρισμός (chaotic inflation) και χαρακτηρίζονται από ένα δυναμικό της μορφής

$$V(\phi) = M^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^p \tag{5.40}$$

όπου $p$ είναι μια παράμετρος για την οποία ισχύει $p > 0$ και $M$ είναι ένας παράγοντας νορμαλισμού του δυναμικού. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi / M_{pl}$, το δυναμικό γίνεται

$$V(x) = M^4 x^p \tag{5.41}$$

Εδώ οι παράμετροι $\epsilon_1, \epsilon_2$ είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν

$$\epsilon_1 = \frac{p^2}{2x^2} \tag{5.42}$$

$$\epsilon_2 = \frac{2p}{x^2} \tag{5.43}$$

Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν $\epsilon_1 = 1$, επομένως από την (5.42) εύκολα βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή του πεδίου:

$$x_{end} = \frac{p}{\sqrt{2}} \tag{5.44}$$

Υπολογίζοντας τον αριθμό των e-folds στο σημείο μεταπήδησης βρίσκουμε

$$N_* = \frac{1}{2p} \left( x_*^2 - x_{end}^2 \right) \tag{5.45}$$

Η (5.45) λύνεται εύκολα ως προς $x_*$ και έτσι έχουμε την τιμή του πεδίου στο σημείο μεταπήδησης

$$x_*^2 = 2p \left( N_* + \frac{p}{4} \right) \tag{5.46}$$

Οι τιμές των παραμέτρων $\epsilon_1, \epsilon_2$ για την τιμή του $x_*$ θα είναι

$$\epsilon_{1*} = \frac{p}{4(N_* + p/4)} \tag{5.47}$$

$$\epsilon_{2*} = \frac{1}{N_* + p/4} \tag{5.48}$$

Επομένως οι προβλέψεις του μοντέλου για τα $n_s, r$ είναι

$$n_s = 1 - \frac{p}{2(N_* + p/4)} - \frac{1}{N_* + p/4} \tag{5.49}$$

$$r = \frac{4p}{N_* + p/4} \tag{5.50}$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις με τις τιμές των $n_s, r$ που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις, θα βρούμε τις επιτρεπόμενες τιμές για την παράμετρο $p$.

## 5.4 Natural Inflation

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα fine-tuning που προέκυψαν λόγω της απαίτησης από τον πληθωρισμό να έχει το δυναμικό μεγάλο βαθμό επιπεδότητας [10], [11]. Το δυναμικό σε αυτή την περίπτωση έχει τη μορφή

$$V(\phi) = M^4 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \tag{5.51}$$

Για την παράμετρο $f$ ισχύει η συνθήκη $f/M_{pl} \gg 1$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi/f$, το δυναμικό παίρνει τη μορφή

$$V(x) = M^4 \big[ 1 + \cos x \big] \tag{5.52}$$

Οι παράμετροι $\epsilon_1, \epsilon_2$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\epsilon_1 = \frac{M_{pl}^2}{2f^2} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \tag{5.53}$$

$$\epsilon_2 = \frac{2M_{pl}^2}{f^2} \frac{1}{(1+\cos x)} \tag{5.54}$$

Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν $\epsilon_1 = 1$, το οποίο μας δίνει

$$x_{end} = \arccos\left( \frac{1 - 2f^2/M_{pl}^2}{1 + 2f^2/M_{pl}^2} \right) \tag{5.55}$$

Ο αριθμός των e-folds στο σημείο της μεταπήδησης δίνεται από τη σχέση

$$N_* = \frac{f^2}{M_{pl}^2} \int_{x_*}^{x_{end}} \frac{1+\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{f^2}{M_{pl}^2} \ln\left( \frac{2 - 2\cos x_{end}}{2 - 2\cos x_*} \right) \tag{5.56}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω εξίσωση και λύνοντας ως προς $x_*$, βρίσκουμε

$$x_* = \arccos\left( 1 - \frac{4f^2}{M_{pl}^2 + 2f^2} e^{\left( -\frac{N_* M_{pl}^2}{f^2} \right)} \right) \tag{5.57}$$

Οι τιμές των παραμέτρων $\epsilon_1, \epsilon_2$ για την τιμή $x_*$ είναι

$$\epsilon_{1*} = \frac{M_{pl}^2}{2f^2}\frac{1-\cos x_*}{1+\cos x_*} \tag{5.58}$$

$$\epsilon_{2*} = \frac{2M_{pl}^2}{f^2}\frac{1}{1+\cos x_*} \tag{5.59}$$

Εύκολα τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις προβλέψεις του μοντέλου αυτού για τις τιμές των $n_s, r$:

$$r = \frac{8M_{pl}^2}{f^2}\frac{1-\cos x_*}{1+\cos x_*} \tag{5.60}$$

$$n_s = 1 - \frac{M_{pl}^2}{f^2}\frac{3-\cos x_*}{1+\cos x_*} \tag{5.61}$$

Οι επιτρεπόμενες τιμές της παραμέτρου $f$ θα βρεθούν συγκρίνοντας τις παραπάνω προβλέψεις του μοντέλου με τις τιμές των $n_s, r$ που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις.

## 5.5 Exponential SUSY Inflation

Αυτή η κατηγορία των μοντέλων έχει μελετηθεί αρκετές φορές [12],[13], [14], [15], [16]. Το δυναμικό έχει τη μορφή

$$V(\phi) = M^4\Big(1 - e^{-q\phi/M_{pl}}\Big) \tag{5.62}$$

όπου για την παράμετρο $q$ ισχύει ότι $q > 0$ και τη θεωρούμε τάξης μονάδας. Κάνοντας πάλι την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi/M_{pl}$, το δυναμικό θα πάρει τη μορφή

$$V(x) = M^4\big(1 - e^{-qx}\big) \tag{5.63}$$

Εδώ το δυναμικό έχει απλή μορφή και μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις παραμέτρους $\epsilon_1, \epsilon_2$:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2 e^{-2qx}}{\big(1-e^{-qx}\big)^2} \tag{5.64}$$

$$\epsilon_2 = \frac{2q^2 e^{-qx}}{\big(1-e^{-qx}\big)^2} = 4e^{qx}\epsilon_1 \tag{5.65}$$

Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν $\epsilon_1 = 1$, και η αντίστοιχη τιμή για το πεδίο είναι

$$\frac{q^2 e^{-2qx}}{\big(1-e^{-qx}\big)^2} = 2 \Leftrightarrow \quad x_{end} = \frac{1}{q}\ln\left(1 + \frac{q}{\sqrt{2}}\right) \tag{5.66}$$

Ο αριθμός των e-folds στο σημείο της μεταπήδησης δίνεται από τη σχέση

$$N_* = \frac{1}{q^2}\left[\left(e^{qx_*} - e^{qx_{end}}\right) + q(x_{end} - x_*)\right] \tag{5.67}$$

Κάνοντας την προσέγγιση $x_* \gg x_{end}$ θα έχουμε

$$N_* \simeq \frac{e^{qx_*}}{q^2} \tag{5.68}$$

Η παραπάνω έκφραση αντιστρέφεται εύκολα ως προς $x_*$:

$$x_* = \frac{\ln\left(q^2 N_*\right)}{q} \tag{5.69}$$

Οι τιμές των παραμέτρων $\epsilon_1, \epsilon_2$ στο σημείο μεταπήδησης επομένως θα είναι

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{(q^2 N_* - 1)^2} \tag{5.70}$$

$$\epsilon_2 = \frac{2N_* q^4}{(q^2 N_* - 1)^2} \tag{5.71}$$

και οι αντίστοιχες θεωρητικές προβλέψεις για τα $n_s, r$ θα είναι

$$n_s = 1 - \frac{q^2}{(q^2 N_* - 1)^2} - \frac{2N_* q^4}{(q^2 N_* - 1)^2} \tag{5.72}$$

$$r = \frac{8q^2}{(q^2 N_* - 1)^2} \tag{5.73}$$

Η σύγκριση των παραπάνω εκφράσεων με τις πειραματικές τιμές των $n_s, r$ θα μας δώσει το εύρος τιμών για την παράμετρο $q$.

## 5.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων του δορυφόρου Planck[17], οι πειραματικές τιμές για το φασματικό δείκτη $n_s$ και για το λόγο πλατών $r$ είναι:

$$n_s = 0.965 \pm 0.006 \tag{5.74}$$

$$r < 0.10 \tag{5.75}$$

Ας δούμε λοιπόν, πόσο καλά δουλεύουν τα πληθωριστικά μοντέλα τα οποία μελετήσαμε. Για το μοντέλο Higgs είδαμε ότι οι προβλέψεις που δίνει είναι

$$n_s = 0.96539 \tag{5.76}$$

$$r = 0.00341826 \tag{5.77}$$

άρα συγκρίνοντας με τις πειραματικές τιμές βλέπουμε πως οι προβλέψεις του μοντέλου είναι μέσα στα πειραματικά όρια.

Για τα υπόλοιπα μοντέλα θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των παραμέτρων τους μας δίνουν προβλέψεις μέσα στα όρια των παρατηρήσεων. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις (5.74) και (5.75) και συνδυάζοντάς τες με τις εκφράσεις των $n_s$ και $r$ για κάθε μοντέλο, προκύπτει

- Radiative Corrected Higgs Inflation

$$-3.9 < A_1 < 2.3 \tag{5.78}$$

- Large Field Inflation

$$p < 1.5 \tag{5.79}$$

- Natural Inflation

$$35 < \left(\frac{f}{M_{pl}}\right)^2 < 110 \tag{5.80}$$

- Exponential SUSY Inflation

$$q > 0.15 \tag{5.81}$$

Ο τρόπος που υπολογίζει κανείς αυτά τα όρια είναι η γραφική επίλυση είτε του $n_s$ είτε του $r$ ως συνάρτηση της εκάστοτε παραμέτρου, λαμβάνοντας υπόψη τα παρατηρησιακά όρια.

# Βιβλιογραφία


[1] Scott Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003.

[2] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.

[3] Antonio Riotto, *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*, arXiv:hep-ph/0210162v2.

[4] Roberta Brawer, *Inflationary Cosmology and the Horizon and Flatness Problems: The mutual Constitution of Explanation and Questions*, MIT thesis, 1996.

[5] Jerome Martin, Christophe Ringeval, Vincent Vennin, *Encyclopedia Inflationaris*, arXiv:1303.3787v3.

[6] F.L. Bezrukov, M.E. Shaposhnikov, *The Standard Model Higgs as the Inflaton*, Phys. Lett. **B659** (2008) 703-706, arXiv:0710.3755.

[7] **ATLAS Collaboration** Collaboration, G. Aad et al., *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys.Lett. **B716** (2012) 1-29, arXiv:1207.7214.

[8] **CMS Collaboration** Collaboration, S. Chatrchyan et al., *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys.Lett. **B716** (2012) 30-61, arXiv:1207.7235.

[9] A. Barvinsky, A.Y. Kamenshchik and A. Starobinsky, *Inflation scenario via the Standard Model Higgs Boson and LHC*, JCAP **0811** (2008) 021, arXiv:0809.2104.

[10] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, *Natural inflation with pseudo - Nambu-Goldstone bosons*, Phys.Rev.Lett. **65** (1990) 3233-3236.

[11] F. C. Adams, J. R. Bond, K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, *Natural inflation: Particle physics models, power law spectra for large scale structure, and constraints from COBE*, Phys.Rev. **D47** (1993) 426-455, hep-ph/9207245.

[12] Y. N. Obukhov, *Spin driven inflation*, Phys.Lett. **A182** 241-216, gr-qc/0008015.

[13] E. D. Stewart, *Inflation, supergravity and superstrings*, Phys.Rev. **D51** (1995) 6847-6853, hep=ph/9405389.

[14] G. Dvali and S. H. Tye, *Brane inflation*, Phys.Lett. **B450** (1999) 72-82, hep-ph/ 9812483.

[15] M. Cicoli, C. Burgess, and F. Quevedo, *Fibre Inflation: Observable Gravity Waves from IIB String Compactifications*, JCAP **0903** (2009) 013, arXiv:0808.0691.

[16] G. F. Giudice and H. M. Lee, *Unitarizing Higgs Inflation*, Phys.Lett. **B694** (2011) 294-300, arXiv:1010.1417.

[17] P.A.R. Ade et al., *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, Astron.Astrophys. **594** (2016) A20, arXiv:1502.02114.

# Παράρτημα Α′

# Κβαντικές διακυμάνσεις βαθμωτού πεδίου κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού

## Α′.1 Άμαζο πεδίο σε de Sitter εποχή ($H$ =σταθερό).

Θεωρούμε αρχικά ένα άμαζο βαθμωτο πεδίο $\chi$ το οποίο το αναπτύσσουμε κατά Fourier ως

$$\delta\chi(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\; e^{i\vec{k}\vec{x}}\; \delta\chi_k(t) \tag{Α′.1}$$

Η εξίσωση κίνησης του πεδίου αυτού θα έχει τη μορφή

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0 \tag{Α′.2}$$

Ας κάνουμε μια ποιοτική ανάλυση της λύσης της (Α′.2). Μπορούμε να συνδέσουμε τη διακύμανση $\delta\chi$ με ένα φυσικό μήκος κύματος $\lambda = 2\pi a/k$, όπου $k$ είναι ο κυματάριθμος.

Όταν το μήκος κύματος είναι εντός της φυσικής ακτίνας Hubble, $\lambda \ll H^{-1}$, για τον κυματάριθμο ισχύει $k \gg aH$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $3H\delta\dot{\chi}_k$ στην (Α′.2), η οποία τώρα γράφεται

$$\delta\ddot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0 \tag{Α′.3}$$

Η εξίσωση (Α′.3) περιγράφει στην ουσία έναν αρμονικό ταλαντωτή (εδώ με χρονοεξαρτώμενη συχνότητα). Ποιοτικά λοιπόν περιμένουμε πως όταν το μήκος κύματος της διαταραχής βρίσκεται εντός της ακτίνας Hubble, η διαταραχή θα εκτελεί ταλάντωση.

Για μήκη κύματος μεγαλύτερα της φυσικής ακτίνας Hubble, $\lambda \gg H^{-1}$, επομένως $k \ll aH$ και ο όρος $k^2/a^2$ στην εξίσωση (Α′.2) μπορεί να αγνοηθεί

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k = 0 \tag{Α′.4}$$

Η (Α′.4) έχει λύση της μορφής $\delta\chi_k = c_1 + c_2 e^{-3Ht} \sim c_1$, το οποίο μας λέει ότι σε super-Hubble κλίμακα το $\delta\chi_k$ παραμένει σταθερό.

Η εικόνα που έχουμε ως τώρα λοιπόν είναι η εξής: για μια δεδομένη διαταραχή με αρχικό μήκος κύματος $\lambda \sim a/k$ μέσα στην ακτίνα Hubble, η διαταραχή κάνει ταλάντωση μέχρι το μήκος κύματος να γίνει ίδιας τάξης μεγέθους με την ακτίνα Hubble. Όταν το μήκος κύματος ξεπεράσει στην ακτίνα Hubble, η ταλάντωση σταματά και η διαταραχή ''παγώνει''.

Ας κάνουμε τώρα μια ποσοτική ανάλυση της (Α′.2). Αρχικά κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$\delta\chi_k = \frac{\delta\sigma_k}{a} \tag{Α′.5}$$

και δουλεύουμε στο σύμορφο χρόνο $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/a$. Επειδή έχουμε θεωρήσει $H$ σταθερό, θα ισχύει

$$\eta = \int_{a_e}^{a} \frac{\mathrm{d}a}{Ha^2} \simeq \frac{1}{H}\int_{a_e}^{a} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \simeq -\frac{1}{Ha} \Leftrightarrow a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \tag{Α′.6}$$

με $\eta < 0$. Λόγω της (Α′.5) η (Α′.2) θα γίνει

$$\delta\sigma_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\delta\sigma_k = 0 \tag{Α′.7}$$

Η εξίσωση (Α′.7) ''θυμίζει'' την εξίσωση Klein-Gordon για ένα βαθμωτό πεδίο σε επίπεδο χωροχρόνο, με τη διαφορά ότι εδώ έχουμε ένα αρνητικό και χρονοεξαρτώμενο όρο μάζας $-a''/a = -2/\eta^2$. Μπορούμε να γράψουμε μια δράση που θα μας δώσει την (Α′.7)

$$S_k = \int \mathrm{d}\eta \left[\frac{1}{2}\left(\delta\sigma_k'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\delta\sigma_k^2\right] \tag{Α′.8}$$

Η δράση αυτή περιγράφει έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή που ικανοποιεί τη σχέση

$$\delta\sigma_k^*\delta\sigma_k' - \delta\sigma_k\delta\sigma_k'^* = -i \tag{Α′.9}$$

Ας μελετήσουμε την συμπεριφορά της (Α′.7) για sub-Hubble και super-Hubble κλίμακες. Από τη στιγμή που

$$\frac{k}{aH} = -k\eta \tag{Α′.10}$$

σε sub-Hubble κλίμακα θα είναι $k^2 \gg a''/a$ και η (Α′.7) θα γίνει

$$\delta\sigma_k'' + k^2\delta\sigma_k = 0 \tag{Α′.11}$$

Η λύση της (Α′.11) είναι ένα επίπεδο κύμα

$$\delta\sigma_k = \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \tag{Α′.12}$$

Άρα λοιπόν διαπιστώνουμε και πάλι ότι οι διακυμάνσεις που είναι εντός της ακτίνας Hubble ταλαντώνονται ακριβώς σαν να βρίσκονταν σε επίπεδο χωροχρόνο.

Στη super-Hubble κλίμακα θα έχουμε $k^2 \ll a''/a$, επομένως η (Α′.7) θα γίνει

$$\delta\sigma_k'' - \frac{a''}{a}\delta\sigma_k = 0 \tag{Α′.13}$$

με γενική λύση την

$$\delta\sigma_k = B(k)a \tag{Α′.14}$$

όπου $B(k)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Συγκρίνοντας τις απόλυτες τιμές των λύσεων (Α′.12) και (Α′.14) στο σημείο $k = aH$, βρίσκουμε την τιμή της σταθεράς $B(k)$:

$$|B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \tag{Α′.15}$$

Άρα λοιπόν σε super-Hubble κλίμακες βρήκαμε ότι

$$|\delta\sigma_k| = \frac{Ha}{\sqrt{2k^3}} \tag{Α′.16}$$

και επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή $\delta\chi_k$ έχουμε

$$|\delta\chi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \tag{Α′.17}$$

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο ακριβώς σημείο αν γράφαμε κατευθείαν την ακριβής λύση της (Α′.7), η οποία είναι

$$\delta\sigma_k = \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \tag{Α′.18}$$

και παίρνοντας τα κατάλληλα όρια.

## Α′.2 Κβαντικές διακυμάνσεις βαθμωτού πεδίου με μάζα σε de Sitter εποχή.

Στην προηγούμενη μελέτη είχαμε αγνοήσει τη μάζα του πεδίου, $m_\chi$. Τώρα λοιπόν θα μελετήσουμε τη λύση που προκύπτει όταν εμφανίζεται ένας όρος μάζας

$$\delta\sigma_k'' + \left[k^2 + M^2(\eta)\right]\delta\sigma_k = 0 \tag{Α′.19}$$

όπου

$$M^2(\eta) = \big(m_\chi^2 - 2H^2\big)a^2(\eta) = \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{m_\chi^2}{H^2} - 2\right) \tag{Α'.20}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την (Α'.19) στη μορφή

$$\delta\sigma_k'' + \left[k^2 + \frac{1}{\eta^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right]\delta\sigma_k = 0 \tag{Α'.21}$$

όπου

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2} \tag{Α'.22}$$

Η γενική λύση της (Α'.21) για $\nu$ πραγματικό είναι

$$\delta\sigma_k = \sqrt{-\eta}\Big[c_1(k)H_\nu^{(1)}(-k\eta) + c_2(k)H_\nu^{(2)}(-k\eta)\Big] \tag{Α'.23}$$

όπου $H_\nu^{(1)}(-k\eta), H_\nu^{(2)}(-k\eta)$ είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δευτέρου είδους. Στη sub-Hubble κλίμακα, $k \gg aH \Leftarrow -k\eta \gg 1$, η λύση είναι το επίπεδο κύμα (Α'.12) και επειδή

$$H_\nu^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_\nu^{(2)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{Α'.24}$$

θέτουμε $c_2(k) = 0, c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i(\nu+1/2)\pi/2}$. Η ακριβής λύση γίνεται

$$\delta\sigma_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}\sqrt{-\eta}H_\nu^{(1)}(-k\eta) \tag{Α'.25}$$

Σε super-Hubble κλίμακες, λόγω του ότι

$$H_\nu^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\frac{\pi}{2}}2^{\nu-\frac{3}{2}}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}x^{-\nu} \tag{Α'.26}$$

η εξίσωση (Α'.25) θα γίνει

$$\delta\sigma_k = e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}2^{\nu-\frac{3}{2}}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{\sqrt{2k}}\big(-k\eta\big)^{\frac{1}{2}-\nu} \tag{Α'.27}$$

Επιστρέφοντας στη μεταβλητή $\delta\chi_k$ μέσω της (Α'.5) βρίσκουμε ότι σε super-Hubble κλίμακες

$$|\delta\chi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \tag{Α'.28}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως στην περίπτωση που το πεδίο έχει μάζα, οι κβαντικές διακυμάνσεις έχουν μια μικρή εξάρτηση από το χρόνο. Σε αναλογία με τις παραμέτρους αργής κύλισης, μπορούμε να ορίσουμε την παράμετρο $\delta$:

$$\delta = \frac{m_\chi^2}{3H^2} \ll 1 \tag{A'.29}$$

άρα λόγω της (Α΄.22)

$$\delta \simeq \frac{3}{2} - \nu \tag{A'.30}$$

## Α΄.3 Το φάσμα ισχύος

Μια χρήσιμη ποσότητα για να χαρακτηρίσουμε τις ιδιότητες των διακυμάνσεων είναι το φάσμα ισχύος. Εν γένει για μια ποσότητα $g(\vec{x},t)$, η οποία στο χώρο Fourier γράφεται ως

$$g(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\; e^{i\vec{k}\vec{x}}\; g_k(t) \tag{A'.31}$$

το φάσμα ισχύος ορίζεται ως

$$\langle 0|\, g_{k1} g_{k2}\, |0\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k_1} + \vec{k_2}) |g_k|^2 \tag{A'.32}$$

όπου $|0\rangle$ είναι η κατάσταση κενού του συστήματος. Βάσει αυτού του ορισμού μπορούμε να γράψουμε

$$\langle 0|\, g^2(\vec{x},t)\, |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}+\vec{p})\vec{x}} \langle 0|\, g_k g_p\, |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} |g_k|^2 = \int \frac{\mathrm{d}k}{k}\; P_g(k) \tag{A'.33}$$

Η σχέση (Α΄.33) ορίζει το φάσμα ισχύος για τις διαταραχές του πεδίου $g(\vec{x},t)$ ως

$$P_g = \frac{k^3}{2\pi^2} |g_k|^2 \tag{A'.34}$$

## Α΄.4 Κβαντικές διακυμάνσεις βαθμωτού πεδίου σε quasi de Sitter εποχή

Η μελέτη μας ως τώρα έχει βασιστεί στη συνθήκη ότι η φυσική ακτίνα Hubble παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της πληθωριστικής εποχής. Στην πραγματικότητα όμως κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού η φυσική ακτίνα Hubble μεταβάλλεται με το χρόνο ως $\dot{H} = -\epsilon_1 H^2$. Αυτή η συνθήκη χαρακτηρίζει την quasi de Sitter διαστολή.

Για μικρές τιμές του $\epsilon_1$μπορούμε να γράψουμε

$$a(\eta) = -\frac{1}{H}\frac{1}{\eta^{(1+\epsilon_1)}} \tag{Α΄.35}$$

Ο όρος της μάζας τώρα θα έχει τη μορφή

$$M^2(\eta) = m_\chi^2 a^2 - \frac{a''}{a} \ , \ \frac{a''}{a} \simeq \frac{1}{\eta^2}(2+3\epsilon_1) \tag{Α΄.36}$$

και για μικρές τιμές των $\epsilon_1, \delta$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (Α΄.21), με

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon_1 - \delta \tag{Α΄.37}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος των διακυμάνσεων του πεδίου $\chi$ για super-Hubble κλίμακες

$$P_{\delta\chi} = \frac{k^3}{2\pi^2}|\delta\chi_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2}\left(\frac{H}{\sqrt{2k^3}}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu} \tag{Α΄.38}$$

Ορίζουμε επίσης τον φασματικό δείκτη $n_{\delta\chi}$,

$$n_{\delta\chi} - 1 = \frac{\mathrm{d}\ln P_{\delta\chi}}{\mathrm{d}\ln k} = 2\delta - 6\epsilon_1 \tag{Α΄.39}$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως το φάσμα ισχύος των διακυμάνσεων του πεδίου $\chi$ είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το μήκος κύματος $\lambda \sim a/k$ της διαταραχής