



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΥΛΙΚΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές ”

ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΦΕΡΜΙΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΜΠΟΖΟΝΙΚΗ ΣΤΗ ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

ΤΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΣΤΑ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΑΤΑ BOSE-EINSTEIN

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Μαρτίνου Ανδριάνας

Ερευνητικός Επιβλέπων

Ακαδημαϊκός Επιβλέπων

Μπονάτσος Διονύσιος

Κουτσούμπας Γεώργιος

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Δ.Π.Μ.Σ. του Ε.Μ.Π. της σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. και του Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. “Δημόκριτος”. Το έναυσμα για το θέμα δόθηκε κατά τη διάρκεια του μαθήματος “Κβαντομηχανική ΙΙ”, όπου ο κ. Δ. Μπονάτσος ανέφερε ότι υπάρχει ένα μέγεθος που μπορεί να χαρακτηρίσει το πόσο μποζονικά ή φερμιονικά συμπεριφέται ένα μη στοιχειώδες σωματίδιο. Ο ισχυρισμός αυτός μου κέντρισε το ενδιαφέρον γιατί δεν είχε περάσει καιρός από τότε που ο κ. Δ. Φραντζεσκάκης μου είχε εκφράσει το εξής ερώτημα “Γιατί τα Συμπυκνώματα *Bose – Einstein* απωθούνται, παρότι έχουν δημιουργηθεί από μια συλλογή μποζονίων;”. Χάρη στην προηγούμενη μελέτη που είχε κάνει ο κ. Μπονάτσος πάνω στα παραφερμιόνια πιάσαμε αμέσως να εφαρμόσουμε τη θεωρία των παραφερμιονίων πάνω στα *BECs*.

Ο κ. Μπονάτσος είναι ένας ερευνητής πρώτης τάξης και γι’ αυτό του αξίζει η διεθνής φήμη που έχει. Μου έδειξε τον τρόπο με τον οποίο υποστηρίζουμε μια νέα επιστημονική ιδέα, αφιέρωσε χρόνο και καλή πίστη σε μένα, με εισήγαγε στις μεθόδους εργασίας στα θέματα Θεωρητικής Φυσικής και με καλωσόρισε σε μια ερευνητική ομάδα. Για όλα αυτά τον ευχαριστώ θερμά.

Κατά τη διάρκεια του Μεταπτυχιακού προγράμματος που παρακολούθησα διεύρυνα τις γνώσεις μου σε νέα αντικείμενα και εμπάθυνα σε ήδη γνωστά. Ως εκ τούτου, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές που μου δίδαξαν Φυσική σε αυτό το πρόγραμμα και ενδεικτικά αναφέρω τον κ. Κ. Παρασκευαΐδη, τον κ. Μ. Αναγνωστάκη και τον κ. Μ. Πίσσα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γ. Κουτσούμπα, τον κ. Κ. Παρασκευαΐδη και τον κ. Δ. Μπονάτσο που λάβαν μέρος στην τριμελή επιτροπή για αυτήν την εργασία. Ευχαριστώ ιδιαίτερος τον κ. Κουτσούμπα για τη συμμετοχή του στην εκπόνηση αυτής της εργασίας, μέσω των χρήσιμων υποδείξεων που έκανε στα ζητήματα της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Είμαι ευγνώμων στον κ. Παρασκευαΐδη που υπήρξε πάντα παρών και πρόθυμος να καθοδηγήσει σε οποιοδήποτε ζήτημα αφορούσε τις σπουδές μου.

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να ερμηνεύσει τη μετάβαση από τη μποζονική στη φερμιονική συμπεριφορά των συμπυκνωμάτων *Bose – Einstein* που δημιουργήθηκαν σε ένα πείραμα στο *Rice University*. Το θεωρητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για το στόχο αυτό είναι οι Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζουμε τους αριθμούς Q και τους Γενικευμένους Παραφερμιονικούς Ταλαντωτές. Ακολούθως στο δεύτερο κεφάλαιο δείχνουμε ότι οι Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές εφαρμόζονται επιτυχώς σε διάφορα πυρηνικά και μοριακά συστήματα. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, δείχνουμε την επιτυχία αυτής της θεωρίας σε δύσκολα υπερολοκληρώσιμα συστήματα γενικού ενδιαφέροντος. Αφού λοιπόν έχουμε πειστεί για την καταλληλότητά τους, στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε τα θεωρητικά εργαλεία μελέτης των *BECs*, π.χ. εξίσωση *Gross Pitaevskii*, τις πειραματικές τεχνικές δημιουργίας τους και τέλος εφαρμόζουμε τη θεωρία των παραφερμιονίων σε αυτά. Στο τελευταίο κεφάλαιο παραθέτουμε τα συμπεράσματα μας και κρίνουμε την επιτυχία της μεθόδου.

Contents

1	Γενικευμένοι Παραμορφωμένοι Ταλαντωτές	7
1.1	Αριθμοί q	7
1.2	Παραμορφωμένες Στοιχειώδεις Συναρτήσεις q	9
1.3	Αριθμοί Q	9
1.4	Παραμορφωμένες Συναρτήσεις Q	10
1.5	Ο Παραμορφωμένος Αρμονικός Ταλαντωτής q	11
1.6	Ο Γενικευμένος Παραμορφωμένος Ταλαντωτής	14
1.7	Γενικευμένοι Παραμορφωμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές	16
2	Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές σε Πυρηνικά και Μοριακά Συστήματα	19
2.1	Ο Γενικευμένος Παραμορφωμένος Παραφερμιονικός Ταλαντωτής	19
2.2	Το δυναμικό <i>Morse</i>	20
2.3	Σύζευξη φερμιονίων στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό	21
2.4	Σύζευξη φερμιονίων διαφορετικής στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό	23
2.5	Σύζευξη φερμιονίων ίδιας στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό	25
3	Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές σε Υπερολοκληρώσιμα Συστήματα	27
3.1	Ισοτροπικός Αρμονικός Ταλαντωτής σε δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο	27
3.2	Το πρόβλημα του <i>Kepler</i> σε ένα δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο	28
3.3	Το δυναμικό <i>Fokas – Langerstrom</i>	28

3.4	Το δυναμικό <i>Smorodinsky – Winternitz</i>	29
3.5	Το δυναμικό <i>Holt</i>	30
3.6	Δυο ταυτοτικά σωματίδια σε δυο διαστάσεις	31
3.7	Η κλειστή άλγεβρα \bar{W}_0	32
3.8	Η κλειστή άλγεβρα $W_3^{(2)}$	32
3.9	Η τετραγωνική άλγεβρα <i>Hahn QH(3)</i>	33
4	Συμπυκνώματα <i>Bose Einstein (BECs)</i>	35
4.1	Πειραματικές Τεχνικές Δημιουργίας <i>BEC</i>	35
4.1.1	Ψύξη με δέσμες <i>LASER</i>	36
4.1.2	Ψύξη αερίου μέσω εξάτμισης σε μαγνητική παγίδα	38
4.1.3	Παγίδευση με δέσμες <i>LASER</i> (οπτική παγίδα)	39
4.2	Το πείραμα στο <i>Rice University</i>	39
4.3	Παραγωγή της εξίσωσης <i>Gross – Pitaevskii</i>	43
4.3.1	Το δυναμικό του μέσου πεδίου και η σταθερά ζεύξης	44
4.3.2	Ανάλυση του Μποζονικού Πεδιακού Τελεστή σε <i>s</i> κύματα	46
4.3.3	Η εξίσωση <i>Heisenberg</i>	47
4.4	Η ενέργεια ενός <i>BEC</i> σε κυλινδρική παγίδα	48
4.4.1	Υπολογισμός του αριθμού των ατόμων	50
4.4.2	Υπολογισμός της ενέργειας	50
4.5	Η παράμετρος τάξης του παραφερμιονίου	52
4.5.1	Το αέριο <i>Tonks Girardeau</i>	53
5	Συμπεράσματα	55

Chapter 1

Γενικευμένοι Παραμορφωμένοι Ταλαντωτές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια των Γενικευμένων Παραμορφωμένων Ταλαντωτών (ΓΠΤ), οι οποίοι είναι μια γενίκευση των Γενικευμένων Παραφερμιονικών Παραμορφωμένων Ταλαντωτών (ΓΠΠΤ). Θα ξεκινήσουμε με τους q -και τους Q -Παραμορφωμένους Ταλαντωτές, οι οποίοι είναι ειδικές περιπτώσεις των ΓΠΤ.

1.1 Αριθμοί q

Ένας q -Αριθμός που αντιστοιχεί σε έναν κανονικό x αριθμό ορίζεται ως [1]:

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (1.1)$$

όπου q είναι μια παράμετρος. Ο ίδιος ορισμός ισχύει αν ο x είναι ένας τελεστής. Τονίζουμε ότι οι αριθμοί q παραμένουν αναλλοίωτοι υπό την αντικατάσταση $q \rightarrow q^{-1}$.

Αν ο q είναι πραγματικός αριθμός, τότε μπορεί εύκολα να τεθεί στη μορφή:

$$[x] = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau)} \quad (1.2)$$

όπου $q = e^\tau$ και τ πραγματικοί αριθμοί.

Αν ο q είναι ένας παράγοντας φάσης, τότε μπορεί να τεθεί στη μορφή:

$$[x] = \frac{\sin(\tau x)}{\sin(\tau)} \quad (1.3)$$

όπου $q = e^{i\tau}$ και τ ένας πραγματικός αριθμός.

Σε κάθε περίπτωση είναι ξεκάθαρο ότι στο όριο $q \rightarrow 1$ (ή ισοδύναμα $\tau \rightarrow 0$) οι q -Αριθμοί (ή τελεστές) τείνουν στους κανονικούς αριθμούς (ή τελεστές):

$$\lim_{q \rightarrow 1} [x] = x \quad (1.4)$$

Μερικά παραδείγματα αριθμών q δίδονται ακολούθως:

$$[0] = 0, \quad [1] = 1, \quad [2] = q + q^{-1}, \quad [3] = q^2 + 1 + q^{-2} \quad (1.5)$$

Μεταξύ των αριθμών q ισχύουν ταυτότητες που όμως διαφέρουν από αυτές μεταξύ των κανονικών αριθμών. Παραδείγματως χάριν, κάνοντας χρήση του ορισμού (1.1), αποδεικνύεται ότι:

$$[a][b+1] - [b][a+1] = [a-b] \quad (1.6)$$

Το παραγοντικό q ενός ακεραίου αριθμού n ορίζεται από τη σχέση:

$$[n]! = [n][n-1] \dots [2][1] \quad (1.7)$$

Οι διωνυμικοί συντελεστές q ορίζονται ως:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[m-n]![n]!} \quad (1.8)$$

ενώ το Διώνυμο του Νεύτωνα δίνεται από τη σχέση:

$$[a \pm b]^m = \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} a^{m-k} (\pm b)^k \quad (1.9)$$

Στο όριο $q \rightarrow 1$ έχουμε:

$$[n]! \rightarrow n! \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \binom{m}{n} \quad (1.10)$$

όπου $n!$ και $\binom{m}{n}$ είναι το σύννηθες Παραγοντικό και οι Διωνυμικοί Συντελεστές.

Επιπλέον ορίζονται οι Παραμορφωμένοι Αριθμοί δύο μεταβλητών:

$$[x]_{p,q} = \frac{q^x - p^{-x}}{q - p^{-1}} \quad (1.11)$$

1.2 Παραμορφωμένες Στοιχειώδεις Συναρτήσεις q

Πέραν των παραμορφωμένων αριθμών q μπορούν να οριστούν και οι συναρτήσεις αυτών. Η εκθετική συνάρτηση q ορίζεται ως:

$$e_q(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]!} x^n, \quad (1.12)$$

ενώ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις q ορίζονται από την:

$$\sin_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]!}, \quad \cos_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]!} \quad (1.13)$$

Σημειώνεται ότι υπάρχουν και τα πολυώνυμα q , όπως τα *Hermite* πολυώνυμα q και τα *Laguerre* πολυώνυμα $q[2]$.

1.3 Αριθμοί Q

Ο ορισμός των αριθμών q που δόθηκε προηγουμένως δεν είναι ο μοναδικός. Από τις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα έχουν χρησιμοποιηθεί οι αριθμοί Q , με πλούσιο υλικό επί του θέματος [2,3]. Οι αριθμοί Q ορίστηκαν ως:

$$[x]_Q = \frac{Q^x - 1}{Q - 1} \quad (1.14)$$

όπου x μπορεί να είναι ένας αριθμός ή τελεστής και Q μια παράμετρος παραμόρφωσης με $Q \in \mathbb{R}$ και $Q \neq 0, 1$. Συχνά θα χρησιμοποιείται η αντικατάσταση $Q = e^T$, όπου $T \in \mathbb{R}$. Περαιτέρω, όταν το όριο $Q \rightarrow 1$ (ή ισοδύναμα $T \rightarrow 0$) οι αριθμοί Q θα γίνονται κανονικοί αριθμοί, π.χ. $[x]_Q \rightarrow x$.

Μερικά παραδείγματα αριθμών Q δίδονται παρακάτω:

$$[0]_Q = 0, \quad [1]_Q = 1, \quad [2]_Q = Q + 1, \quad [3]_Q = Q^2 + Q + 1. \quad (1.15)$$

Οι αριθμοί Q δεν παραμένουν αναλλοίωτοι υπό την αντικατάσταση $Q \rightarrow Q^{-1}$. Αποδεικνύεται πως:

$$[x]_Q = Q^{x-1} [x]_{1/Q} \quad (1.16)$$

Οι αριθμοί Q συνδέονται με τους αριθμούς q μέσω της σχέσης:

$$[x] = q^{1-x}[x]_Q, \quad \text{me} \quad Q = q^2 \quad (1.17)$$

Οι ορισμοί του παραγοντικό Q και των διωνυμικών συντελεστών Q παραμένουν:

$$[n]_Q! = [n]_Q [n-1]_Q \dots [1]_Q \quad (1.18)$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_Q = \frac{[m]_Q!}{[m-n]_Q! [n]_Q!} \quad (1.19)$$

Από τον ορισμό των αριθμών Q αποδεικνύεται ότι όταν $Q \rightarrow Q^{-1}$ τότε:

$$[n]_Q! = Q^{n(n-1)/2} [n]_{1/Q} \quad (1.20)$$

και

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_Q = Q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/Q} \quad (1.21)$$

Στην περίπτωση αυτή το παραγοντικό Q συνδέεται με το παραγοντικό q ως ακολούθως:

$$[n]! = q^{-n(n-1)/2} [n]_Q!, \quad \text{me} \quad Q = q^2 \quad (1.22)$$

1.4 Παραμορφωμένες Συναρτήσεις Q

Οι ορισμοί των παραμορφωμένων συναρτήσεων Q είναι οι αναμενόμενοι:

$$e_Q(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_Q!} x^n \quad (1.23)$$

καθώς ικανοποιείται η ιδιότητα:

$$e_Q(x)e_{1/Q}(-x) = 1 \quad (1.24)$$

(Σημειώνεται πως $e_Q(x)e_Q(-x) \neq 1$.)

Οι παραμορφωμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις Q ορίζονται ως:

$$\sin_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_Q!} \quad (1.25)$$

$$\cos_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_Q!}. \quad (1.26)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\sin_Q(x) = \frac{1}{2i} (e_Q(ix) - e_Q(-ix)) \quad (1.27)$$

$$\cos_Q(x) = \frac{1}{2} (e_Q(ix) + e_Q(-ix)). \quad (1.28)$$

Στη θέση της συνηθισμένης ταυτότητας $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, ισχύει η:

$$\sin_Q(x) \sin_{1/Q}(x) + \cos_Q(x) \cos_{1/Q}(x) = 1. \quad (1.29)$$

Τέλος, μπορούν να οριστούν τα παραμορφωμένα πολυώνυμα *Hermite* Q και *Laguerre* Q , όπως επίσης και οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις [2].

1.5 Ο Παραμορφωμένος Αρμονικός Ταλαντωτής q

Ο παραμορφωμένος αρμονικός ταλαντωτής q [5,6,7] ορίζεται συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής a^\dagger και a και που ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης:

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a \quad (1.30)$$

$$aa^\dagger - q^{\mp 1} a^\dagger a = q^{\pm N} \quad (1.31)$$

Επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες:

$$(a^\dagger)^\dagger = a, \quad N^\dagger = N \quad (1.32)$$

υπό την προϋπόθεση πως $q \in \mathbb{R}$ ή $q^l = 1$ (κυκλοτομικό σώμα). Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις μετάθεσης (1.30) είναι όμοιες με αυτές της Κβαντικής Μηχανικής, ενώ η (1.31) έχει διαφοροποιηθεί εξαιτίας της παραμέτρου q . Αν όμως $q \rightarrow 1$ είναι φανερό ότι η (1.31) γίνεται όμοια με τη σχέση μετάθεσης των μποζονικών τελεστών καταστροφής και δημιουργίας $[a, a^\dagger] = 1$. Άμεση συνέπεια της (1.31) είναι η :

$$a^\dagger a = [N], \quad aa^\dagger = [N + 1] \quad (1.33)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι ο τελεστής N δεν ισούται με $a^\dagger a$, ως συνήθως. Οι τελεστές a^\dagger και a λέγονται πλέον παραμορφωμένοι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας και καταστροφής q .

Τα διανύσματα βάσης του χώρου *Fock*, $|n\rangle$, κατασκευάζονται με την επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή δημιουργίας a^\dagger στη θεμελιώδη κατάσταση, $|0\rangle$, η οποία είναι στην ουσία ο κενός από σωματίδια χώρος. Ο τελεστής καταστροφής a ορίζεται από τη δράση του στο διάνυσμα του κενού χώρου. Συνεπώς:

$$a|0\rangle = 0, \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{[n]!}}|0\rangle. \quad (1.34)$$

Η δράση των τελεστών πάνω στη βάση αυτή είναι:

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle \quad (1.35)$$

Τονίζουμε ότι αυτές οι σχέσεις θυμίζουν πολύ τις συνήθεις μόνο που τώρα στα υπόριζα βρίσκονται οι αριθμοί q .

Η *Hamiltonian* του παραμορφωμένου αρμονικού ταλαντωτή q είναι:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (1.36)$$

Οι ιδιοτιμές της, στη βάση του χώρου *Fock*, είναι:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2}([n] + [n+1]) \quad (1.37)$$

Παρατηρούμε ότι αν $q \in \mathbb{R}$ τα ενεργειακά επίπεδα αυξάνονται πιο ραγδαία (εξαπλώνονται) από την περίπτωση του συνήθη Αρμονικού Ταλαντωτή, όπου τα ενεργειακά επίπεδα ισαπέχουν. Εν αντιθέσει, αν ο q είναι ένας παράγοντας φάσης τα ενεργειακά επίπεδα αυξάνονται λιγότερο ραγδαία (συμπιέζονται) σε σύγκριση με την περίπτωση του Αρμονικού Ταλαντωτή. Πιο συγκεκριμένα αν ο $q = e^\tau$ οι ιδιοτιμές τίθενται στη μορφή:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sinh\left(\tau\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\frac{\tau}{2}}, \quad (1.38)$$

ενώ αν $q = e^{i\tau}$:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sin\left(\tau\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\tau}{2}}. \quad (1.39)$$

Σε κάθε περίπτωση όταν $q \rightarrow 1$ ($\tau \rightarrow 0$) η συνηθισμένη έκφραση:

$$E(n) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.40)$$

συνεχίζει να ισχύει.

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη σχέση μετάθεσης:

$$[a, a^\dagger] = [N + 1] - [N]. \quad (1.41)$$

Αν ο q είναι παράγοντας φάσης, τότε η ανωτέρω σχέση γράφεται ως:

$$[a, a^\dagger] = \frac{\cos \frac{(2N+1)\tau}{2}}{\cos \frac{\tau}{2}}. \quad (1.42)$$

Είναι αξιοσημείωτο πως οι παραμορφωμένοι μποζονικοί τελεστές $q a^\dagger$ και a μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των συνηθισμένων Μποζονικών Τελεστών α και α^\dagger (με $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$) [8]

:

$$a = \sqrt{\frac{[N+1]}{N+1}} \alpha = \alpha \sqrt{\frac{[N]}{N}}, \quad a^\dagger = \alpha^\dagger \sqrt{\frac{[N+1]}{N+1}} = \sqrt{\frac{[N]}{N}} \alpha^\dagger. \quad (1.43)$$

Οι τετραγωνικές ρίζες στις ανωτέρω σχέσεις καλούνται q -*deforming functionals*.

Αν ο q είναι κυκλοτομικό σώμα, π.χ. $q = e^{2\pi i/k}$ ($k = 2, 3, \dots$), είναι σαφές ότι η βάση του χώρου *Fock* είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων, διάστασης k , αφού υπάρχουν μόνο τα διανύσματα $|0\rangle, \dots, |k-1\rangle$. Αυτή η περίπτωση μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα σύστημα μη στοιχειωδών σωματιδίων (*anyons*). Στα επόμενα θα υποθέτουμε πως ο q δεν είναι κυκλοτομικό σώμα.

Μια επιπλέον εκδοχή Παραμορφωμένου Αρμονικού Ταλαντωτή μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια των τελεστών b και b^\dagger . Οι τελεστές αυτοί υπακούουν στις σχέσεις [18]:

$$a = q^{1/2} b q^{-N/2}, \quad a^\dagger = q^{1/2} q^{-N/2} b^\dagger \quad (1.44)$$

Ακολουθούν οι σχέσεις μετάθεσης:

$$[N, b^\dagger] = b^\dagger, \quad [N, b] = -b \quad [b, b^\dagger] = Q^N \quad (1.45)$$

και η :

$$bb^\dagger - q^2 b^\dagger b = 1. \quad (1.46)$$

Αυτός ο τύπος Ταλαντωτή εισήχθει από τους *Arik* και *Coon* [4] και αργότερα χρησιμοποιήθηκε από τον *Kuryshkin* [9]. Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$b^\dagger b = [N]_Q, \quad bb^\dagger = [N + 1]_Q, \quad (1.47)$$

όπου $Q = q^2$ και οι Q -Αριθμοί είναι αυτοί που ορίστηκαν σε προηγούμενη παράγραφο. Η βάση ορίζεται από τη δράση:

$$b|0\rangle = 0, \quad |n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{[n]_Q!}}|0\rangle, \quad (1.48)$$

καθώς η δράση των τελεστών στα διανύσματα *Fock* είναι:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]_Q}|n+1\rangle \quad b|n\rangle = \sqrt{[n]_Q}|n-1\rangle. \quad (1.49)$$

Η *Hamiltonian* του συγκεκριμένου τύπου ταλαντωτή είναι:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(bb^\dagger + b^\dagger b), \quad (1.50)$$

με ιδιοτιμές:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2}([n]_Q + [n+1]_Q). \quad (1.51)$$

Παρατηρούμε πως αν $Q = e^T$, όπου $T > 0$ και πραγματικός αριθμός, οι φασματικές γραμμές εξαπλώνονται. Αντιθέτως, αν $Q = e^T$, όπου $T < 0$ και πραγματικός αριθμός, οι φασματικές γραμμές συμπιέζονται.

1.6 Ο Γενικευμένος Παραμορφωμένος Ταλαντωτής

Τα προηγούμενα χρόνια έχουν εισαχθεί και άλλοι τύποι παραμορφωμένων ταλαντωτών εκτός αυτών που ορίστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Όλοι αυτοί μπορούν να συνοψισθούν με ένα κοινό μαθηματικό πλαίσιο, αυτό του Γενικευμένου Παραμορφωμένου Ταλαντωτή [10,11] που

ορίζεται ως η άλγεβρα με γενήτορες τους $\{1, a, a^\dagger, N\}$ και συνάρτηση παραμόρφωσης μια $\Phi(x)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[a, N] = a, \quad [a^\dagger, N] = -a^\dagger, \quad a^\dagger a = \Phi(N) = [N], \quad aa^\dagger = \Phi(N+1) = [N+1], \quad (1.52)$$

όπου $\Phi(x)$ μια θετική και αναλυτική συνάρτηση με $\Phi(0) = 0$ και N ο τελεστής του αριθμού των σωματιδίων. Από την τελευταία εξίσωση καταλήγουμε στο ότι:

$$N = \Phi^{-1}(a^\dagger a) \quad (1.53)$$

Ικανοποιούνται επιπλέον οι σχέσεις μετάθεσης:

$$[a, a^\dagger] = [N+1] - [N], \quad \{a, a^\dagger\} = [N+1] + [N]. \quad (1.54)$$

Η συνάρτηση παραμόρφωσης είναι χαρακτηριστική του συστήματος των σωματιδίων και του δυναμικού στο οποίο κινούνται. Με άλλα λόγια είναι καθοριστική της *Hamiltonian* του συστήματος. Οι συναρτήσεις παραμόρφωσης για κάθε τύπο Παραμορφωμένου Ταλαντωτή δίνονται στον Πίνακα 1.1

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι Γενικευμένες Παραμορφωμένες Άλγεβρες διαθέτουν έναν χώρο *Fock*

$|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$ ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή N :

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (1.55)$$

αν η θεμελιώδης κατάσταση ικανοποιεί την $a|0\rangle = 0$. Αυτά τα ιδιοδιανύσματα δημιουργούνται ως εξής:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad (1.56)$$

όπου :

$$[n]! = \prod_{k=1}^n [k] = \prod_{k=1}^n \Phi(k). \quad (1.57)$$

Οι γεννήτορες a^\dagger και a είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αυτής της Άλγεβρας Παραμορφωμένου Ταλαντωτή:

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}a|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]}a|n+1\rangle. \quad (1.58)$$

Αυτά τα ιδιοδιανύσματα καθώς επίσης και τα ιδιοδιάνυσματα της *Hamiltonian*:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a), \quad (1.59)$$

ανταποκρίνονται στις ίδιες ιδιοτιμές:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2}(\Phi(n) + \Phi(n+1)) = \frac{\hbar\omega}{2}([n] + [n+1]). \quad (1.60)$$

Εξέχουσα σημασία για την εργασία αυτή έχει ο Παραφερμιονικός Ταλαντωτής τάξης ρ . Η τάξη αυτή ισούται με τον αριθμό των σωματιδίων που μπορούν να καταλάβουν την ίδια κατάσταση. Οι τύποι αυτών των ταλαντωτών έχουν μελετηθεί στις [12,13].

1.7 Γενικευμένοι Παραμορφωμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές

Έχει δειχθεί ότι κάθε Γενικευμένη Παραμορφωμένη Παραφερμιονική Άλγεβρα τάξης ρ μπορεί να γραφτεί όπως ένας Γενικευμένος Ταλαντωτής [14] με συνάρτηση παραμόρφωσης :

$$\Phi(x) = x(\rho + 1 - x)(\lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4 + \dots), \quad (1.61)$$

όπου $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ είναι πραγματικές σταθερές που ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4 + \dots > 0, \quad x \in \{1, 2, \dots, \rho\}. \quad (1.62)$$

Έστω μια $SU_\Phi(2)$ άλγεβρα με συνάρτηση παραμόρφωσης:

$$\Phi(J_0(J_0 + 1)) = AJ_0(J_0 + 1) + B(J_0(J_0 + 1))^2 + C(J_0(J_0 + 1))^3, \quad (1.63)$$

και η αντιστοιχία:

$$J_+ \rightarrow A^\dagger, \quad J_- \rightarrow A, \quad J_0 \rightarrow N, \quad (1.64)$$

1.7. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΙ ΠΑΡΑΦΕΡΜΙΟΝΙΚΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ 17

τότε αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα $SU_{\Phi}(2)$ είναι ισοδύναμη με τον Γενικευμένο Παραμορφωμένο Παραφερμιονικό Ταλαντωτή της μορφής:

$$\Phi(N) = N(\rho + 1 - N)$$

$$[-(\rho^2(\rho+1)C + \rho B) + (\rho^3 C + (\rho-1)B)N + ((\rho^2 - \rho + 1)C + B)N^2 + (\rho-2)CN^3 + CN^4], \quad (1.65)$$

αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$A + \rho(\rho + 1)B + \rho^2(\rho + 1)^2C = 0. \quad (1.66)$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αν $B > 0$ και $C > 0$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $C = 0$ αποδεικνύεται πως η $SU_{\Phi}(2)$ άλγεβρα με συνάρτηση παραμόρφωσης:

$$\Phi(J_0(J_0 + 1)) = AJ_0(J_0 + 1) + B(J_0(J_0 + 1))^2 \quad (1.67)$$

είναι ισοδύναμη με τον Γενικευμένο Παραμορφωμένο Παραφερμιονικό Ταλαντωτή με συνάρτηση παραμόρφωσης:

$$\Phi(N) = BN(\rho + 1 - N)(-\rho + (\rho - 1)N + N^2) \quad (1.68)$$

αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$A + \rho(\rho + 1)B = 0 \quad (1.69)$$

Η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται αν $B > 0$.

Με την εισαγωγή ανωτέρων δυνάμεων του $J_0(J_0 + 1)$ επιτυγχάνονται ανώτερες δυνάμεις του N στην εξίσωση (1.65) και ανώτερες δυνάμεις του $\rho(\rho + 1)$ στην (1.66).

Table 1.1: Συναρτήσεις Παραμόρφωσης ειδικών τύπων Ταλαντωτή

	$\Phi(x)$	Τύπος Ταλαντωτή
i	x	αρμονικός ταλαντωτής, μποζονική άλγεβρα
ii	$\frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$	παραμορφωμένος αρμονικός ταλαντωτής q
iii	$\frac{q^x - 1}{q - 1}$	Arik–Coon, Kuryshkin, ή παραμορφωμένος ταλαντωτής q
iv	$\frac{q^x - p^{-x}}{q - p^{-1}}$	αρμονικός ταλαντωτής 2 παραμέτρων
v	$x(\rho + 1 - x)$	παραφερμιονικός ταλαντωτής
vi	$\frac{\sinh(\tau x) \sinh(\tau(p+1-x))}{\sinh^2(\tau)}$	παραμορφωμένος παραφερμιονικός ταλαντωτής q
vii	$x \cos^2(\pi x/2) + (x + \rho - 1) \sin^2(\pi x/2)$	παραμποζονικός ταλαντωτής
viii	$\frac{\sinh(\tau x) \cosh(\tau(x+2N_0-1))}{\sinh(\tau) \cosh(\tau)} \cos^2(\pi x/2) + \frac{\sinh(\tau(x+2N_0-1)) \cosh(\tau x)}{\sinh(\tau) \cosh(\tau)} \sin^2(\pi x/2)$	παραμορφωμένος παραμποζονικός ταλαντωτής q
ix	$\sin^2 \pi x/2$	φερμιονική άλγεβρα
x	$q^{x-1} \sin^2 \pi x/2$	παραμορφωμένη φερμιονική άλγεβρα q
xi	$\frac{1 - (-q)^x}{1 + q}$	γενικευμένη παραμορφωμένη φερμιονική άλγεβρα q
xii	x^n	
xiii	$\frac{sn(\tau x)}{sn(\tau)}$	

Chapter 2

Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές σε Πυρηνικά και Μοριακά Συστήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετώνται κάποια πυρηνικά και μοριακά συστήματα που παρουσιάζουν συμπεριφορά Γενικευμένου Παραφερμιονικού Ταλαντωτή. Θαδειχθεί ότι στους πυρηνικούς φλοιούς η τάξη του παραφερμιονίου συνδέεται με το μέγεθος του φλοιού.

2.1 Ο Γενικευμένος Παραμορφωμένος Παραφερμιονικός Ταλαντωτής

Η συνάρτηση παραμόρφωσης της άλγεβρας του Γενικευμένου Παραμορφωμένου Παραφερμιονικού Ταλαντωτή είναι η σχέση (1.61) με $x = n$. Η *Hamiltonian* ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να είναι η μποζονικού τύπου *Hamiltonian* [1]:

$$H = \frac{1}{2}\{a, a^\dagger\} = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a), \quad (2.1)$$

με ιδιοτιμές:

$$E(n) = \frac{1}{2}(\Phi(N) + \Phi(N + 1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Εισάγοντας την (1.61) στην (2.2) προκύπτει ότι τα ενεργειακά επίπεδα είναι:

$$E(n) = (\lambda + \mu + \nu)\rho + ((2\lambda + 2\mu + 3\nu)\rho - \mu - \nu)N + ((2\mu + 3\nu)\rho - 2\lambda - \mu - 3\nu)N^2 + (2\nu\rho - 2\mu - 2\nu)N^3 - 2\nu N^4. \quad (2.3)$$

Η επιλογή της *Hamiltonian* όμως δεν είναι μονοσήμαντη, αφού τα παραφερμιόνια δεν έχουν ακριβή μποζονική ή φερμιονική συμπεριφορά. Γι' αυτό μια άλλη επιλογή είναι η φερμιονικού τύπου *Hamiltonian* [14]:

$$H = \frac{1}{2}[a^\dagger, a] = \frac{1}{2}(a^\dagger a - aa^\dagger), \quad (2.4)$$

με ιδιοτιμές:

$$E(n) = \frac{1}{2}(\Phi(N) - \Phi(N+1)), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Εκτελώντας εκ νέου τις πράξεις, το ενεργειακό φάσμα δίδεται από τη σχέση:

$$E(N) = -(\lambda + \mu + \nu)\rho - ((2\mu + 3\nu)\rho - 2\lambda - \mu - \nu)n - (3\nu\rho - 3\mu - 3\nu)n^2 + 4\nu n^3. \quad (2.6)$$

2.2 Το δυναμικό *Morse*

Το δυναμικό *Morse* έχει τη μορφή:

$$V(x) = e^{-2sx} - 2e^{-sx}, \quad (2.7)$$

Τα ενεργειακά επίπεδα που σχηματίζονται σε αυτό το δυναμικό έχουν βρεθεί να είναι:

$$E(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) - \sigma \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (2.8)$$

όπου s και σ κάποιες σταθερές.

Για να περιγράψει κάποιος τον ταλαντωτή *Morse* κάνοντας χρήση ενός *Fermi - like* ταλαντωτή, θα πρέπει να εξισώσει τις σταθερές των διαφόρων δυνάμεων του n στις εξισώσεις (2.6) και (2.8). Δεν χρειάζεται να εξισωθούν και οι σταθεροί όροι, αφού επηρεάζουν μόνο την ενεργειακή στάθμη. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτει:

$$\lambda = 1 - \frac{2}{3}(\rho + 1)\sigma, \quad \mu = -\frac{2}{3}\sigma, \quad \nu = 0, \quad (2.9)$$

το οποίο ισοδυναμεί με το αποτέλεσμα στην αναφορά [14].

Εναλλακτικά, τα ενεργειακά επίπεδα του ταλαντωτή *Morse* μπορούν να συγκριθούν με αυτά του *Bose - like* ταλαντωτή και να προκύψει ότι:

$$\lambda = \sigma, \quad \mu = \nu = 0, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} - 1. \quad (2.10)$$

Συγκρίνοντας τα δυο συμπεράσματα παρατηρούμε τα εξής:

1) Στη *Fermi – like Hamiltonian* οι σταθερές λ , μ , ν του Γενικευμένου Παραμορφωμένου Παραφερμιονικού Ταλαντωτή είναι συναρτήσεις των σ και ρ . Αυτό έχει ως επακόλουθο το ότι σε κάθε ταλαντωτή *Morse* αντιστοιχούν πολλές διαφορετικές *Fermi – like Hamiltonians* διαφορετικής τάξης.

2) Στη *Bose – like* περίπτωση προκύπτει μια επιπλέον εξίσωση. Εξαιτίας αυτής έπεται ότι οι σταθερές λ , μ , ν , του Γενικευμένου Παραμορφωμένου Παραφερμιονικού Ταλαντωτή τάξης ρ , εξαρτώνται μόνο από το σ . Δηλαδή σε κάθε ταλαντωτή *Morse* αντιστοιχεί μία *Bose – like Hamiltonian*.

2.3 Σύζευξη φερμιονίων στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό

Σύμφωνα με το μοντέλο των φλοιών, είναι δυνατόν να σχηματιστούν ζεύγη φερμιονίων, συνολικής στροφορμής $J = 0$. Τα ζεύγη αυτά δημιουργούνται από τους τελεστές δημιουργίας ζευγών:

$$S^+ = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{m>0} (-1)^{j+m} a_{jm}^+ a_{j-m}^+, \quad (2.11)$$

όπου a_{jm}^+ είναι οι φερμιονικοί τελεστές δημιουργίας, Ω το μέγεθος του φλοιού και $2\Omega = 2j+1$ είναι ο εκφυλισμός του φλοιού. Επιπλέον, μπορεί να δημιουργηθούν ζεύγη μη μηδενικής στροφορμής από τους τελεστές:

$$B_J^+ = \sum_{m>0} (-1)^{j+m} (jmj - m|J0) a_{jm}^+ a_{j-m}^+, \quad (2.12)$$

όπου $(jmj - m|J0)$ είναι οι συντελεστές *Clebsch – Gordan*.

Ο φερμιονικός τελεστής αριθμού σωματιδίων ορίζεται ως:

$$N_F = \sum_m a_{jm}^+ a_{jm} = \sum_{m>0} (a_{jm}^+ a_{jm} + a_{j-m}^+ a_{j-m}). \quad (2.13)$$

Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής του ζεύγους με στροφορμή $J = 0$ ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση μετάθεσης:

$$[S, S^+] = 1 - \frac{N_F}{\Omega}, \quad (2.14)$$

καθώς η *Hamiltonian* της αλληλεπίδρασης τους είναι:

$$H = -G\Omega S^+ S. \quad (2.15)$$

Η αρχαιότητα V_F ορίζεται ως το μέγεθος που ισούται με τον αριθμό των φερμιονίων που δεν έχουν συζευχθεί στην κατάσταση με συνολική στροφορμή $J = 0$. Αν υπάρχουν μόνο ζεύγη στροφορμής $J = 0$ ($V_F = 0$), οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι:

$$E(N_F, V_F = 0) = -G\Omega \left(\frac{N_F}{2} + \frac{N_F}{2\Omega} - \frac{N_F^2}{4\Omega} \right). \quad (2.16)$$

Ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση το ενεργειακό φάσμα είναι:

$$E(N_F, V_F) = -\frac{G}{4}(N_F - V_F)(2\Omega - N_F - V_F + 2). \quad (2.17)$$

Στην περίπτωση της μη μηδενικής αρχαιότητας, παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.17) μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$E(N_F, V_F) = G\Omega \left(\frac{V_F}{2} + \frac{V_F}{2\Omega} - \frac{V_F^2}{4\Omega} \right) - G\Omega \left(\frac{N_F}{2} + \frac{N_F}{2\Omega} - \frac{N_F^2}{4\Omega} \right), \quad (2.18)$$

Ας μελετήσουμε καλύτερα την περίπτωση που μόνο ζεύγη με $J = 0$ έχουν δημιουργηθεί. Εξισώνοντας τα ενεργειακά φάσματα των εξισώσεων (2.16) και (2.3) προκύπτει ότι:

$$\lambda = -\frac{1}{8}, \quad \rho = 2\Omega + 2 = 2j + 3. \quad (2.19)$$

Ως εκ τούτου, τα ζεύγη φερμιονίων στροφορμής $J = 0$ σε έναν πυρηνικό φλοιό μπορούν να θεωρηθούν παραφερμιόνια τάξης $\rho = 2j + 3$ που υπόκεινται σε μια *Bose-like Hamiltonian*. Εφόσον ο j είναι ημιακέραιος ο ρ είναι ακέραιος αριθμός.

Συλλογιζόμενοι τα ζεύγη μη μηδενικής στροφορμής και εξισώνοντας τις εξισώσεις (2.17) και (2.3) παίρνουμε:

$$\lambda = \frac{1}{8}, \quad \rho = 2\Omega + 2 = 2j + 3. \quad (2.20)$$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση η τάξη του παραφερμιονίου ρ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός ανάλογος του μεγέθους του φλοιού. Επιπλέον η αλληλεπίδραση των φερμιονίων του φλοιού, με στόχο τη δημιουργία ζευγών, μπορεί να περιγραφεί από μια *Bose-like Hamiltonian* ενός Γενικευμένου Παραμορφωμένου Παραφερμιονικού Ταλαντωτή.

2.4 Σύζευξη φερμιονίων διαφορετικής στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό

Σε αυτήν την παράγραφο ενδιαφερόμαστε μόνο για ζεύγη φερμιονίων εντός πυρηνικού φλοιού, συνολικής στροφορμής $J = 0$ και $J = 2$. Τα φερμιόνια καταλαμβάνουν τροχιακά με στροφορμή $j = k + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}$, όπου k είναι η ψεύδο-στροφορμή και είναι ακέραιος αριθμός. Το πλήθος των μονοσωματιδιακών καταστάσεων είναι $2\Omega = 4(2k + 1)$.

Ορίζονται οι τελεστές δημιουργίας ζεύγους συνολικής στροφορμής $J = 0$ και $J = 2$ αντίστοιχα:

$$S^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{j,m} (-1)^{j-m} a_{j,m}^\dagger a_{j,-m}^\dagger, \quad (2.21)$$

$$D_\mu^\dagger = \sum_{j,j'} (-1)^{j+k+\frac{3}{2}} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \left\{ \begin{matrix} j & j' & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & k \end{matrix} \right\} [a_j^\dagger a_{j'}^\dagger]_\mu^{(2)}, \quad (2.22)$$

όπου $a_{j,m}^\dagger$ είναι ο τελεστής δημιουργίας ενός φερμιονίου συνολικής στροφορμής j και προβολής m , $[a_j^\dagger a_{j'}^\dagger]_\mu^{(J)}$ είναι ο τελεστής δημιουργίας ζεύγους φερμιονίων συνολικής στροφορμής J και προβολής μ και το σύμβολο της καμπυλωμένης αγκύλης είναι αυτό του 6- j .

Επιπλέον ορίζονται οι τελεστές δημιουργίας ζεύγους τυχούσας στροφορμής:

$$P_\mu^{(l)} = \sum_{j,j'} (-1)^{l+j+k+\frac{3}{2}} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \left\{ \begin{matrix} j & j' & l \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & k \end{matrix} \right\} [a_j^\dagger \tilde{a}_{j'}]_\mu^{(l)}, \quad (2.23)$$

όπου $\tilde{a}_{j,m} = (-1)^{j+m} a_{j,-m}$.

Οι ανωτέρω τελεστές μαζί με τους αντίστοιχους τελεστές καταστροφής κλείνουν μια άλγεβρα $SO(8)$, η οποία περιέχει τρεις αλυσίδες υποαλγεβρών:

$$SO(8) \supset SO(7) \supset SO(5) \otimes U(1) \supset SO(3) \otimes U(1). \quad (2.24)$$

Η πιο γενική *Hamiltonian* για αυτήν την περίπτωση είναι:

$$H_7 = c_8 C_8 + c_7 C_7 + c_5 C_5 + c_3 C_3 + c_1 C_1, \quad (2.25)$$

όπου C_i είναι οι τελεστές *Casimir* των εμπλεκόμενων αλγεβρών και c_i ελεύθερες σταθερές.

Οι ιδιοτιμές της *Hamiltonian* είναι:

$$E_7(N, \Lambda, \tau, n_\Delta, J) = c_8 \frac{\Omega}{2} \left(\frac{\Omega}{2} + 6 \right) + c_7 \Lambda(\Lambda + 5) + c_5 \tau(\tau + 3) + c_3 J(J + 1) + c_1 \left(\frac{\Omega}{2} - N \right). \quad (2.26)$$

Ο κβαντικός αριθμός Λ λαμβάνει τιμές $\Lambda = 0, 1, \dots, \frac{\Omega}{2}$. Για δεδομένο Λ ο συνολικός αριθμός ζευγών παίρνει τιμές $N = \frac{\Omega}{2} - \Lambda, \frac{\Omega}{2} - \Lambda + 1, \dots, \frac{\Omega}{2} + \Lambda$. Ο κβαντικός αριθμός τ εκπροσωπεί τον αριθμό των ζευγών, φερμιονίων με $j = 2$, που δεν έχουν συζευχθεί σε συνολική στροφορμή $J = 0$, καθώς ο κβαντικός αριθμός n_Δ όλες τις τριπλέτες, φερμιονίων με $j = 2$, που δεν έχουν συζευχθεί σε συνολική στροφορμή $J = 0$.

Στη θεμελιώδη κατάσταση έχουμε $\tau = 0, n_\Delta = 0, J = 0$ και

$$\Lambda_0 = \frac{\Omega}{2} - N, \quad N \leq \frac{\Omega}{2}, \quad (2.27)$$

$$\Lambda_0 = N - \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \bar{N}, \quad N \geq \frac{\Omega}{2}, \quad (2.28)$$

όπου $\bar{N} = \Omega - N$ είναι ο συνολικός αριθμός ζευγών. Συνεπώς η αντίστοιχη ενέργεια είναι:

$$\begin{aligned} E_7^*(N, \Lambda, \tau, n_\Delta, J) &= E_7(N, \Lambda, \tau, n_\Delta, J) - E_7(N, \Lambda_0, \tau = 0, n_\Delta = 0, J = 0) \\ &= c_7(\Lambda - \Lambda_0)(\Lambda + \Lambda_0 + 5) + c_5 \tau(\tau + 3) + c_3 J(J + 1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων (2.27) και (2.28) η ενέργεια γίνεται:

$$\begin{aligned} E_7^*(N, \Lambda, \tau, n_\Delta, J) &= \\ c_7 \left(\Lambda - \frac{\Omega}{2} + N \right) \left(\Lambda + \frac{\Omega}{2} - N + 5 \right) + c_5 \tau(\tau + 3) + c_3 J(J + 1), \quad N \leq \frac{\Omega}{2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} E_7^*(N, \Lambda, \tau, n_\Delta, J) &= \\ c_7 \left(\Lambda - \frac{\Omega}{2} + \bar{N} \right) \left(\Lambda + \frac{\Omega}{2} - \bar{N} + 5 \right) + c_5 \tau(\tau + 3) + c_3 J(J + 1), \quad N \geq \frac{\Omega}{2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Τώρα θα εστιάσουμε στην περίπτωση όπου όλα τα ζευγάρια έχουν συνολική στροφορμή $J = 0$. Εξισώοντας ως συνήθως το φάσμα μας με αυτό του παραφερμιονικού ταλαντωτή (2.3) προκύπτει ότι:

$$\lambda = 1, \quad \rho = \Omega + 5 = 2(2k + 1) + 5. \quad (2.32)$$

Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε Λ , αφού αυτό απλοποιείται κατά τους υπολογισμούς.

Παρατηρούμε ότι τα φερμιόνια που έχουν συζευχθεί σε στροφορμή $J = 0$ συμπεριφέρονται ως παραφερμιόνια τάξης $\rho = 2(2k + 1) + 5$.

2.5 Σύζευξη φερμιονίων ίδιας στροφορμής j σε πυρηνικό φλοιό

Ο τελεστής δημιουργίας του ζεύγους φερμιονίων στροφορμής j ορίζεται ως:

$$A_M^{(J)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} (jmjm'|JM) a_{jm}^\dagger a_{jm'}^\dagger. \quad (2.33)$$

Επιπλέον ορίζεται ο πολυπολικός τελεστής:

$$B_M^{(J)} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{mm'} (jmj - m'|JM) (-1)^{j-m'} a_{jm}^\dagger a_{jm'}, \quad (2.34)$$

όπου a_{jm}^\dagger (a_{jm}) είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής και $(jmjm'|JM)$ είναι οι συντελεστές *Clebsch – Gordan*.

Όλοι οι ανωτέρω τελεστές κλείνουν μια άλγεβρα $SO(2(2j+1))$. Οι πολυπολικοί τελεστές κλείνουν μια άλγεβρα $U(2j+1)$. Επομένως παρουσιάζεται η αλυσίδα $SO(4\Omega) \supset U(2\Omega)$.

Η *Hamiltonian* αυτού του συστήματος μπορεί να εκπροσωπηθεί από έναν δεύτερης τάξης τελεστή *Casimir*. Οι ιδιοτιμές του τελεστή *Casimir* σε αυτές τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις είναι [15,16]:

$$C_2 = N(2\Omega - N + 1). \quad (2.35)$$

Εξισώνοντας την ανωτέρω εξίσωση με την ενέργεια του παραφερμιονικού ταλαντωτή προκύπτει ότι:

$$\lambda = 1, \quad \rho = 2\Omega + 1. \quad (2.36)$$

Συνεπώς και τα ζεύγη φερμιονίων σε πυρηνικό φλοιό στροφορμής j είναι παραφερμιόνια τάξης $\rho = 2\Omega + 1 = 2j + 2$.

Είναι γνωστό ότι όταν ο μεταθέτης των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας είναι ίσος με τη μονάδα τότε τα σωματίδια που καταστρέφουν ή δημιουργούν είναι μποζόνια. Εάν το πλήθος των διαθέσιμων καταστάσεων Ω είναι πολύ μεγαλύτερο του αριθμού των φερμιονίων N_F τα παραφερμιόνια συμπεριφέρονται μποζονικά. Αυτό το συμπέρασμα γίνεται φανερό από τη σχέση:

$$[S, S^+] = 1 - \frac{N_F}{\Omega} \approx 1, \quad \Omega \gg N_F \quad (2.37)$$

Σε κάθε ένα από τα παραπάνω παραδείγματα η τάξη του παραφερμιονίου είναι ανάλογη του μεγέθους του φλοιού. Συνεπώς όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του φλοιού τόσο μεγαλύτερη είναι η τάξη του παραφερμιονίου και τόσο πιο μποζονικά συμπεριφέρεται το αέριο.

Chapter 3

Γενικευμένοι Παραφερμιονικοί Ταλαντωτές σε Υπερολοκληρώσιμα Συστήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή των Γενικευμένων Παραφερμιονικών Ταλαντωτών σε Υπερολοκληρώσιμα Συστήματα και σε άλλα προβλήματα Μαθηματικής Φυσικής.

3.1 Ισοτροπικός Αρμονικός Ταλαντωτής σε δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο

Ο *Higgs* μελέτησε το πρόβλημα του ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή σε δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο με σταθερή καμπυλότητα λ . Η *Hamiltonian* ορίστηκε ως [17]:

$$H = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2 + \lambda L^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (3.1)$$

όπου L η στροφορμή και:

$$\pi_x = p_x + \frac{\lambda}{2}(x(xp_x + yp_y) + (xp_x + yp_y)x) \quad (3.2)$$

$$\pi_y = p_y + \frac{\lambda}{2}(y(x(xp_x + yp_y) + (xp_x + yp_y)y) \quad (3.3)$$

Η συνάρτηση παραμόρφωσης για το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να τεθεί στη μορφή [18]:

$$\Phi(N) = 4N(\rho + 1 - N) \left(\lambda(\rho + 1 - N) + \sqrt{\omega^2 + \lambda^2/4} \right) \left(\lambda N + \sqrt{\omega^2 + \lambda^2/4} \right). \quad (3.4)$$

Το ενεργειακό φάσμα, όπως προκύπτει κάνοντας χρήση της θεωρίας των παραφερμιονίων είναι:

$$E_p = \sqrt{\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}(\rho + 1)} + \frac{\lambda}{2}(\rho + 1)^2. \quad (3.5)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με αυτό που βρήκε ο *Higgs*.

3.2 Το πρόβλημα του *Kepler* σε ένα δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο

Η *Hamiltonian* του προβλήματος είναι [17]:

$$H = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2 + \lambda L^2) - \frac{\mu}{r}, \quad (3.6)$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Η συνάρτηση παραμόρφωσης της άλγεβρας του προβλήματος του *Kepler* σε έναν δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο με σταθερή καμπυλότητα λ μπορεί να τεθεί στη μορφή [18]:

$$\Phi(N) = N(\rho + 1 - N) \left(\frac{4\mu^2}{(\rho + 1)^2} + \lambda \frac{(\rho + 1 - 2N)^2}{4} \right), \quad (3.7)$$

Το ενεργειακό φάσμα όπως προκύπτει κάνοντας χρήση της συνάρτησης παραμόρφωσης είναι:

$$E_p = -\frac{2\mu^2}{(\rho + 1)^2} + \lambda \frac{\rho(\rho + 2)}{8}. \quad (3.8)$$

3.3 Το δυναμικό *Fokas – Langerstrom*

Ένα εκ των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων περιγράφεται από τη *Hamiltonian* [19]:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{18}. \quad (3.9)$$

Το σύστημα αυτό δεν είναι παρά ένας ανισοτροπικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων 3:1.

Μια συνάρτηση παραμόρφωσης που μπορεί να το περιγράψει είναι:

$$\Phi(N) = 16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{2}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{4}{3} - N \right). \quad (3.10)$$

Οι ιδιοτιμές της *Hamiltonian* που προκύπτουν κάνοντας χρήση της ανωτέρω συνάρτησης παραμόρφωσης είναι [18]:

$$E_p = \rho + 1 \quad (3.11)$$

Μια άλλη συνάρτηση παραμόρφωσης ικανή να περιγράψει σωστά τις ιδιοτιμές και ταυτόχρονα να ικανοποιεί τη συνθήκη (1.62) είναι η:

$$\Phi(N) = 16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{2}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{1}{3} - N \right) \quad (3.12)$$

Οι σχετικές ιδιοτιμές είναι:

$$E_p = \rho + 2/3 \quad (3.13)$$

Μια τρίτη εκδοχή συνάρτησης παραμόρφωσης είναι η:

$$\Phi(N) = 16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{5}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{4}{3} - N \right), \quad (3.14)$$

με ενεργειακό φάσμα:

$$E_p = \rho + 4/3 \quad (3.15)$$

3.4 Το δυναμικό Smorodinsky – Winternitz

Η *Hamiltonian* για αυτό το δυναμικό είναι [20]:

$$H = \frac{1}{2}(\rho_x^2 + \rho_y^2) + k(x^2 + y^2) + \frac{c}{x^2} \quad (3.16)$$

Αν $c \geq -1/8$ η συνάρτηση παραμόρφωσης για αυτήν την άλγεβρα είναι [18]:

$$\Phi(N) = 1024k^2N(\rho + 1 - N) \left(N + \frac{1}{2} \right) \left(\rho + 1 + \frac{\sqrt{1+8c}}{2} - N \right). \quad (3.17)$$

και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι :

$$E_p = \sqrt{8k} \left(\rho + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{1+8c}}{4} \right), \quad \rho = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Αν $-1/8 \leq c \leq 3/8$ η συνάρτηση παραμόρφωσης είναι:

$$\Phi(N) = 1024k^2N(\rho + 1 - N) \left(N + \frac{1}{2} \right) \left(\rho + 1 - \frac{\sqrt{1+8c}}{2} - N \right). \quad (3.19)$$

με ιδιοτιμές:

$$E_p = \sqrt{8k} \left(\rho + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{1+8c}}{4} \right), \quad \rho = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

3.5 Το δυναμικό *Holt*

Η *Hamiltonian* αυτού του προβλήματος είναι η [21]:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (x^2 + 4y^2) + \frac{\delta}{x^2}. \quad (3.21)$$

Το πρόβλημα αυτό είναι μια γενίκευση του ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων

2:1. Η ισοδύναμη άλγεβρα έχει συνάρτηση παραμόρφωσης [18]:

$$\Phi(N) = 2^{23/2} N(\rho + 1 - N) \left(\rho + 1 + \frac{\sqrt{1+8\delta}}{2} - N \right), \quad (3.22)$$

όπου $(1 + 8\delta) \geq 0$

Το ενεργειακό φάσμα προκύπτει ίσο με:

$$E_p = \sqrt{8} \left(\rho + 1 - \frac{\sqrt{1+8\delta}}{4} \right). \quad (3.23)$$

Η συνθήκη (1.62) ικανοποιείται σε αυτήν την περίπτωση.

Οι σχέσεις μετάθεσης των τελεστών του παραμορφωμένου ταλαντωτή είναι:

$$[N, A^\dagger] = A^\dagger, \quad [N, A] = -A, \quad (3.24)$$

$$[A, A^\dagger] = 2^{23/2} \left(3N^2 - N \left(4\rho + 1 \pm \sqrt{1+8\delta} \right) + \rho^2 \pm \frac{1}{2}\rho\sqrt{1+8\delta} \right). \quad (3.25)$$

Παρατηρούμε πως είναι όμοιες με τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας $W_3^{(2)}$ αν γίνουν οι αντιστοιχίσεις [22,23,24]:

$$F = \sigma A^\dagger, \quad E = \rho A, \quad C = f(p), \quad H = -2N + k(p), \quad (3.26)$$

όπου:

$$\rho\sigma = 2^{-19/2}/3, \quad k(p) = \frac{1}{3} \left(4p + 1 \pm \sqrt{1+8\delta} \right), \quad (3.27)$$

$$f(\rho) = \frac{2}{9} \left(14\rho^2 + 4\rho \pm (7\rho + 1)\sqrt{1+8\delta} + 1 + 4\delta \right). \quad (3.28)$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το δυναμικό *Holt* κατέχει μια $W_3^{(2)}$ συμμετρία.

3.6 Δυο ταυτοτικά σωματίδια σε δυο διαστάσεις

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα δυο ταυτοτικών σωματιδίων σε δυο διαστάσεις. Ως γνωστόν ένα τέτοιο σύστημα πρέπει να μένει ανεπηρέαστο από την εναλλαγή των δυο αυτών σωματιδίων. Έστω ότι ο δείκτης 1 σημαίνει το σωματίδιο 1 και ο δείκτης 2 το σωματίδιο 2. Μια αλλαγή μεταβλητών είναι η ακόλουθη [25]:

$$u = (x_1)^2 + (x_2)^2, \quad v = (x_1)^2 - (x_2)^2, \quad w = 2x_1x_2, \quad (3.29)$$

$$U = (p_1)^2 + (p_2)^2, \quad V = (p_1)^2 - (p_2)^2, \quad W = 2p_1p_2, \quad (3.30)$$

$$C_1 = \frac{1}{4}(x_1p_1 + p_1x_1), \quad C_2 = \frac{1}{4}(x_2p_2 + p_2x_2), \quad M = x_1p_2 + x_2p_1, \quad (3.31)$$

Οι μεταβλητές αυτές κλείνουν μια άλγεβρα $SP(4, R)$. Μια αναπαράσταση της άλγεβρας αυτής μπορεί να δημιουργηθεί [9,26] χρησιμοποιώντας μια αυθαίρετη σταθερά η και τρεις μήτρες Q, R, S που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης:

$$[S, Q] = -2iR, \quad [S, R] = 2iQ, \quad [Q, R] = -8iS(\eta - 2S^2). \quad (3.32)$$

Οι ακριβείς εκφράσεις των γεννητόρων της $SP(4, R)$ συναρτήσει των η, Q, R, S δίνονται στην αναφορά [25].

Ορίζουμε τους τελεστές:

$$X = Q - iR, \quad Y = Q + iR, \quad S_0 = \frac{S}{2}. \quad (3.33)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης:

$$[S_0, X] = X, \quad [S_0, Y] = -Y, \quad [X, Y] = 32S_0(\eta - 8(S_0)^2), \quad (3.34)$$

οι οποίες είναι μια παραμορφωμένη εκδοχή της $SU(2)$.

Χρησιμοποιώντας παρόμοια διαδικασία με αυτήν των προηγούμενων προβλημάτων θέτουμε τη συνάρτηση παραμόρφωσης στη μορφή:

$$\Phi(N) = N(\rho + 1 - N)64(\rho + (1 - \rho)N - N^2), \quad (3.35)$$

υπό την προϋπόθεση πως:

$$\eta = 4\rho(\rho + 1) \quad (3.36)$$

Παρόλα αυτά η συνθήκη (1.62) παραβιάζεται σε αυτήν την περίπτωση.

3.7 Η κλειστή άλγεβρα \bar{W}_0

Οι σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας αυτής είναι

$$[U_0, L_0^\pm] = \pm L_0^\pm, \quad (3.37)$$

$$[L_0^+, L_0^-] = (-k(k-1) - 2(k+1)h)U_0 + 2(U_0)^3. \quad (3.38)$$

Η άλγεβρα αυτή ισοδυναμεί με την παραμορφωμένη άλγεβρα που έχει συνάρτηση παραμόρφωσης:

$$\Phi(N) = N(\rho + 1 - N)\frac{1}{2}(-\rho + (\rho - 1)N + N^2), \quad (3.39)$$

συνοδευόμενη από τη συνθήκη $k(k-1) + 2(k+1)h = \rho(\rho+1)$. Η σχέση (1.62) ικανοποιείται χωρίς άλλους περιορισμούς.

3.8 Η κλειστή άλγεβρα $W_3^{(2)}$

Η κλειστή άλγεβρα $W_3^{(2)}$ [22,23,24] χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H^2 + C, \quad (3.40)$$

$$[C, E] = [C, F] = [C, H] = 0. \quad (3.41)$$

Ορίζοντας ως $\tilde{H} = H/2$ οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν να τεθούν στη μορφή:

$$[\tilde{H}, E] = E, \quad [\tilde{H}, F] = -F, \quad [E, F] = 4\tilde{H}^2 + C, \quad (3.42)$$

$$[C, E] = [C, F] = [C, \tilde{H}] = 0. \quad (3.43)$$

Αυτή η άλγεβρα είναι ισοδύναμη με έναν παραφερμιονικό ταλαντωτή με συνάρτηση παραμόρφωσης:

$$\Phi(N) = \frac{2}{3}N(\rho + 1 - N)(2\rho - 1 + 2N), \quad (3.44)$$

που συνοδεύεται από τη συνθήκη:

$$C = -\frac{2}{3}\rho(2\rho + 1) \quad (3.45)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η συνθήκη (1.62) ικανοποιείται.

3.9 Η τετραγωνική άλγεβρα Hahn $QH(3)$

Για την άλγεβρα αυτή ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης [27]:

$$[K_1, K_2] = K_3 \quad (3.46)$$

$$[K_2, K_3] = A_2K_2^2 + C_1K_1 + DK_2 + G_1 \quad (3.47)$$

$$[K_3, K_1] = A_2(K_1K_2 + K_2K_1) + C_2K_2 + DK_1 + G_2. \quad (3.48)$$

Αν ισχύει η συνθήκη:

$$\rho(\rho + 1)A_2^2 + 2A_2G_1 + C_2 = 0, \quad (3.49)$$

Η συνάρτηση παραμόρφωσης της άλγεβρας αυτής είναι:

$$\Phi(N) = N(\rho + 1 - N)A_2^2(\rho + (1 - \rho)N - N^2). \quad (3.50)$$

Η συνθήκη (1.62) παραβιάζεται και πάλι.

Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου συνοψίζονται στον πίνακα (3.1)

Table 3.1: Συναρτήσεις παραμόρφωσης παραμορφωμένων ταλαντωτών.

	$\Phi(N)$	Reference
i	N	αρμονικός ταλαντωτής
ii	$\frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} = [N]_q$	παραμορφωμένος αρμονικός ταλαντωτής q
iii	$N(\rho + 1 - N)$	παραφερμιονικός ταλαντωτής
iv	$[N]_q[\rho + 1 - N]_q$	παραμορφωμένος παραφερμιονικός ταλαντωτής q
v	$N(\rho + 1 - N)(\lambda + \mu N + \nu N^2 + \rho N^3 + \sigma N^4 + \dots)$	γενικευμένος παραμορφωμένος παραφερμιονικός ταλαντωτής
vi	$N(\rho + 1 - N)[-(\rho^2(\rho + 1)C + \rho B) + (\rho^3 C + (\rho - 1)B)N + ((\rho^2 - \rho + 1)C + B)N^2 + (\rho - 2)CN^3 + CN^4]$	άλγεβρα $SU_\Phi(2)$ 3 όρων
vii	$BN(\rho + 1 - N)(-\rho + (\rho - 1)N + N^2)$	άλγεβρα $SU_\Phi(2)$ 2 όρων
viii	$N(\rho + 1 - N)\frac{1}{2}(-\rho + (\rho - 1)N + N^2)$	κλειστή άλγεβρα $W \bar{W}_0$
ix	$4N(\rho + 1 - N) \left(\lambda(\rho + 1 - N) + \sqrt{\omega^2 + \lambda^2/4} \right)$	ισοτροπικός ταλαντωτής σε 2 διαστάσεις
	$\left(\lambda N + \sqrt{\omega^2 + \lambda^2/4} \right)$	καμπυλωμένος χώρος
x	$N(\rho + 1 - N) \left(\frac{4\mu^2}{(\rho+1)^2} + \lambda \frac{(\rho+1-2N)^2}{4} \right)$	πρόβλημα <i>Kepler</i> σε δισδιάστατο καμπυλωμένο χώρο
xi	$16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{2}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{4}{3} - N \right)$ or $16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{2}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{1}{3} - N \right)$ or $16N(\rho + 1 - N) \left(\rho + \frac{5}{3} - N \right) \left(\rho + \frac{4}{3} - N \right)$	δυναμικό Fokas-Lagerstrom
xii	$1024k^2 N(\rho + 1 - N) \left(N + \frac{1}{2} \right) \left(\rho + 1 \pm \frac{\sqrt{1+8c}}{2} - N \right)$	δυναμικό Smorodinsky-Winternitz
xiii	$\frac{2}{3}N(\rho + 1 - N)(2\rho - 1 + 2N)$	κλειστή άλγεβρα $W W_3^{(2)}$
xiv	$2^{23/2}N(\rho + 1 - N) \left(\rho + 1 \pm \frac{\sqrt{1+8\delta}}{2} - N \right)$	δυναμικό Holt

Chapter 4

Συμπυκνώματα *Bose Einstein* (*BECs*)

Τα συμπυκνώματα *Bose – Einstein* είναι σωματίδια που δημιουργούνται στο εργαστήριο από μια συλλογή ατόμων. Για να δημιουργηθεί ένα *BEC* πρέπει η συλλογή των ατόμων να ψυχθεί σε θερμοκρασία πλησίον του απολύτου μηδενός και να περιοριστεί σε μια μικρή περιοχή του χώρου. Η πολύ χαμηλή θερμοκρασία συνεπάγεται και την ακινητοποίηση των ατόμων, στα πλαίσια της Απαγορευτικής Αρχής του *Pauli*. Η ελαχιστοποίηση όμως της ορμής τους έχει ως συνέπεια τη μεγιστοποίηση της διασποράς τους στο χώρο. Κατά αυτόν τον τρόπο τα άτομα εξαναγκάζονται να καταλάβουν την ίδια περιοχή του χώρου. Το αποτέλεσμα αυτής της συνένωσης ατόμων είναι η δημιουργία των συμπυκνωμάτων *Bose – Einstein*. Στο σχήμα (4.1) φαίνεται η πυκνότητα πιθανότητας του κάθε σωματιδίου κατά τη μείωση της θερμοκρασίας.

4.1 Πειραματικές Τεχνικές Δημιουργίας *BEC*

Μέχρι σήμερα έχουν ήδη πραγματοποιηθεί αρκετά πειράματα προς τη δημιουργία *BECs*. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούν οι πειραματικοί, παρόλο που δεν είναι πανομοιότυπες, έχουν κάποια κοινά γνωρίσματα:

- α) για την ψύξη του αερίου χρησιμοποιούνται αντίθετα κατευθυνόμενες δέσμες *LASER* ή η μέθοδος της ψύξης με εξάτμιση σε μαγνητική παγίδα,
- β) για το περιορισμό του αερίου σε μια μικρή περιοχή του χώρου χρησιμοποιούνται μαγνητο-οπτικές παγίδες.

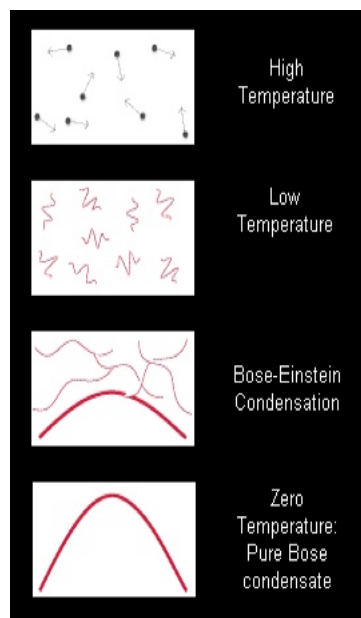


Figure 4.1: Πυκνότητα πιθανότητας των ατόμων με τη μείωση της θερμοκρασίας

Επιπλέον μέσω ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου μπορεί να ρυθμιστεί το είδος της αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων (ελκτική ή απωστική). Το μήκος σκέδασης του κάθε ατόμου συμβολίζεται με a_0 . Αν τα άτομα αλληλεπιδρούν ελκτικά τότε $a_0 < 0$, ενώ αν απωθούνται $a_0 > 0$. Παραπάνω παρατίθεται η μεταβολή του μήκους σκέδασης συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου [28].

4.1.1 Ψύξη με δέσμες *LASER*

Αν ένα άτομο βομβαρδιστεί με μια δέσμη *LASER* ορισμένης συχνότητας, θα απορροφά συνεχώς και θα επανεκπέμπει φωτόνια. Καθώς το άτομο απορροφά φωτόνια, θα δέχεται ένα καταιγισμό από ωθήσεις στην κατεύθυνση διάδοσης του φωτός. Οι ωθήσεις αυτές προστίθενται για να δώσουν μια «σκεδάζουσα δύναμη» που είναι ανάλογη προς την ορμή κάθε φωτονίου και προς τον αριθμό των φωτονίων που σκεδάζει το άτομο στη μονάδα του χρόνου. Φυσικά για κάθε φωτόνιο που απορροφά το άτομο, πρέπει να εκπέμπει και ένα. Αλλά επειδή τα εκπεμπόμενα φωτόνια δεν έχουν προτιμητέα κατεύθυνση, η αλλαγή της ορμής εξαιτίας των εκπεμπόμενων φωτονίων είναι κατά μέσο όρο μηδέν. Η απορρόφηση και η εκπομπή έχουν ως καθαρό αποτέλεσμα την ώθηση του ατόμου προς την κατεύθυνση διάδοσης του φωτός.

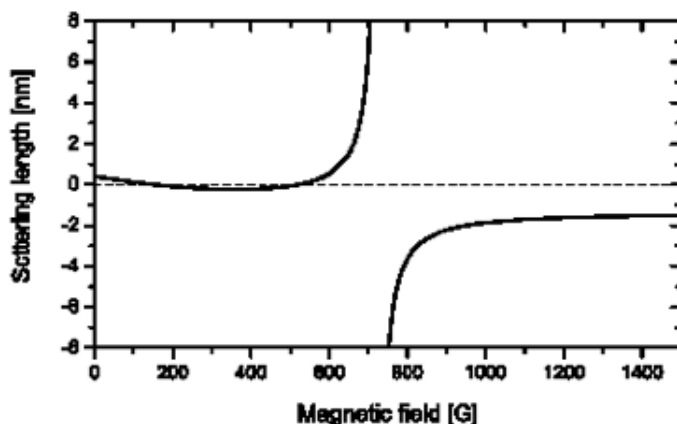


Figure 4.2: Μεταβολή του μήκους σκέδασης των ατόμων συναρτήσει του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου

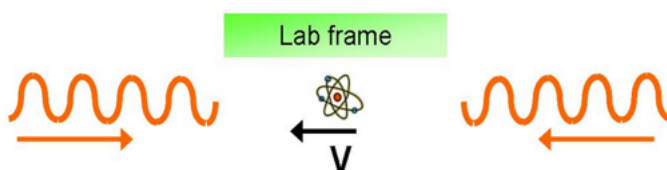


Figure 4.3: Κρούση δύο αντίθετα κατευθυνόμενων δεσμών *LASER* με κινούμενο άτομο, στο σύστημα του εργαστηρίου

Βομβαρδίζοντας λοιπόν το σωματίδιο με δυο δέσμες *LASER*, αντίθετων κατευθύνσεων, με ενέργεια ελαφρώς μικρότερη από αυτή που μπορεί να απορροφήσει το σωματίδιο επιτυγχάνουμε τα εξής: Αν το άτομο κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μιας δέσμης φωτός, το φως, από το σύστημα αναφοράς του ατόμου έχει αυξημένη συχνότητα (Φαινόμενο *Doppler*). Το φως φθάνει λοιπόν ως προς το άτομο στην απαιτούμενη συχνότητα για να απορροφηθεί από το άτομο. Το φως το οποίο απορροφάται από το άτομο ασκεί σε αυτό μια σχεδάζουσα δύναμη που επιβραδύνει το άτομο. Αν το άτομο κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με μια δέσμη *LASER*, τότε έχει ακόμα μικρότερη πιθανότητα να απορροφήσει φωτόνιο, αφού λόγω Φαινομένου *Doppler*, η συχνότητα των φωτονίων αυτών θα είναι ακόμα μικρότερη. Το αποτέλεσμα είναι η επιβράδυνση, δηλαδή η ψύξη του ατόμου.

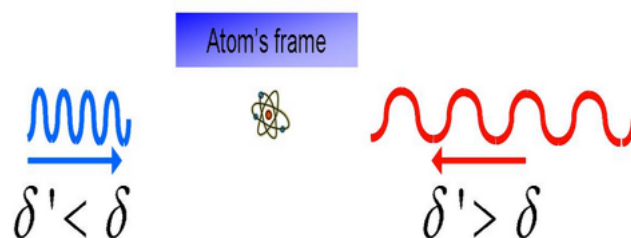


Figure 4.4: Κρούση δύο αντίθετα κατευθυνόμενων δεσμών *LASER* με κινούμενο άτομο, στο ιδιοσύστημα του ατόμου

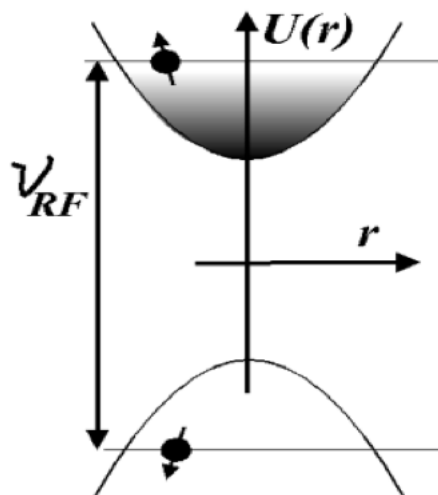


Figure 4.5: Τα άτομα με υψηλή ενέργεια διαφεύγουν του δυναμικού της μαγνητικής παγίδας και μόνο τα ψυχρά άτομα διαμένουν

4.1.2 Ψύξη αερίου μέσω εξάτμισης σε μαγνητική παγίδα

Ένα μαγνητικό πεδίο αλληλεπιδρά με τη μαγνητική διπολική ροπή των ατόμων. Έτσι λοιπόν είναι δυνατόν τα άτομα να τοποθετηθούν εντός ενός μαγνητικού δυναμικού το οποίο εμφανίζει κάποιο ελάχιστο και λειτουργεί ως παγίδα. Η ψύξη με εξάτμιση είναι μια τεχνική όπου τα θερμότερα άτομα επιτρέπεται να φύγουν από την παγίδα κι έτσι τα εναπομείναντα είναι πιο ψυχρά. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να μειώνουμε το ύψος των τοιχωμάτων του δυναμικού παγίδευσης αργά και σταδιακά ώστε να επιτύχουμε όχι μόνο την ψύξη των ατόμων αλλά και το μέγιστο δυνατό αριθμό ατόμων που παρέμειναν τελικά στην παγίδα.

4.1.3 Παγίδευση με δέσμες *LASER* (οπτική παγίδα)

Η παγίδευση ενός ατόμου μέσα σε οπτική παγίδα βασίζεται σε μια δύναμη που καλείται *Δύναμη Βαθμίδας*. Όταν ένα άτομο βρίσκεται εντός ενός ηλεκτρικού πεδίου τότε μετατρέπεται σε ένα ηλεκτρικό δίπολο, ηλεκτρικής διπολικής ροπής ανάλογης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\vec{p} = a_e \vec{E}, \quad (4.1)$$

όπου a_e το ηλεκτρονικό πολώσιμο. Το ηλεκτρικό πεδίο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρικό δίπολο με ενέργεια:

$$U = -\frac{1}{2} \langle \vec{p} \cdot \vec{E} \rangle, \quad (4.2)$$

η οποία συνοδεύεται από μια δύναμη βαθμίδας:

$$F = \frac{a_e}{2} \nabla \langle E^2 \rangle. \quad (4.3)$$

Λόγω της αρχής της ελάχιστης ενέργειας τα δίπολα αυτά θα τείνουν να κινηθούν προς σημεία όπου η ενέργεια αλληλεπιδράσεως θα ελαχιστοποιείται. Ειδικότερα, επειδή το φως αποτελείται από ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που ταλαντώνονται γρήγορα, μια εστιασμένη δέσμη *LASER* μπορεί να παράγει ένα εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο με ένα τοπικό μέγιστο. Το άτομο-δίπολο έτσι θα έλκεται προς το τοπικό μέγιστο του πεδίου.

4.2 Το πείραμα στο *Rice University*

Ένας αριθμός ατόμων ${}^7\text{Li}$ ψύχθηκαν με εξάτμιση σε ένα μαγνητικό δυναμικό σε θερμοκρασία πλησίον των μηδέν βαθμών *Kelvin* [28]. Κατά τη διάρκεια της ψύξης κάποια άτομα δραπετεύσαν της παγίδας και μόνο ένας αριθμός N_{tot} ψυχρών ατόμων παρέμειναν. Με χρήση ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου τα εναπομείναντα άτομα ρυθμίστηκαν ώστε να αλληλεπιδρούν ελκτικά. Έπειτα μεταφέρθηκαν σε μια μαγνητο-οπτική παγίδα με συνέπεια την ακινητοποίησή τους, στα πλαίσια της Αρχής της Αβεβαιότητας του *Heisenberg*.

Στο εν λόγω πείραμα δημιουργήθηκαν τέσσερα *BECs*, που το καθένα από αυτά αποτελείτο από N άτομα Λιθίου. Κάθε *BEC* βρισκόταν υπό την επήρεια δυο τύπων δυναμικού:

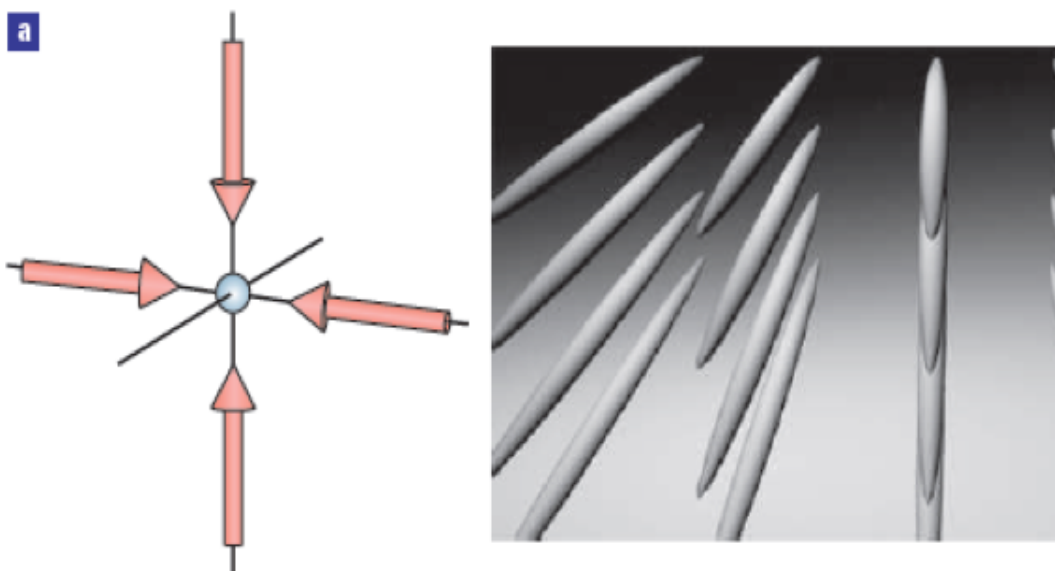


Figure 4.6: Αντίθετα κατευθυνόμενες δέσμες *LASER* σχηματίζουν μια οπτική παγίδα κυλινδρικής συμμετρίας. Οι περιοχές στις οποίες επιτρέπεται να κινηθούν τα άτομα έχουν το σχήμα πούρου (*cigar – shape – potential*)

α) Το δυναμικό της μαγνητο-οπτικής παγίδας:

$$V_{ext}(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

β) Το δυναμικό του μέσου πεδίου όλων των ατόμων Λιθίου.

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.5)$$

Τα άτομα ${}^7\text{Li}$ και τα συμπυκνώματά τους αναμενόταν να έχουν μποζονική συμπεριφορά διότι αποτελούνται από άρτιο αριθμό φερμιονίων [29].

Πιο αναλυτικά η πειραματική διαδικασία ήταν η εξής: Το δυναμικό της μαγνητο-οπτικής παγίδας ήταν ένας ανισοτροπικός ταλαντωτής κυλινδρικής συμμετρίας. Η ακτινική συχνότητα ταλάντωσης ήταν $\omega_r = 800\text{Hz}$ και η αξονική $\omega_z = 70\text{Hz}$. Το αποτέλεσμα ήταν κίνηση των ατόμων σε μια διάσταση (*cigar – shape – potential*). Τα άτομα ${}^7\text{Li}$ χαρακτηρίζονται από μια συνολική ηλεκτρονική στροφορμή F και την προβολή της στον άξονα z , m_F . Τα άτομα που βρίσκονται σε κατάσταση $(F, m_F) = (2, 2)$ είναι μαγνητικά παγιδεύσιμα, ενώ αυτά με $(F, m_F) = (1, 1)$

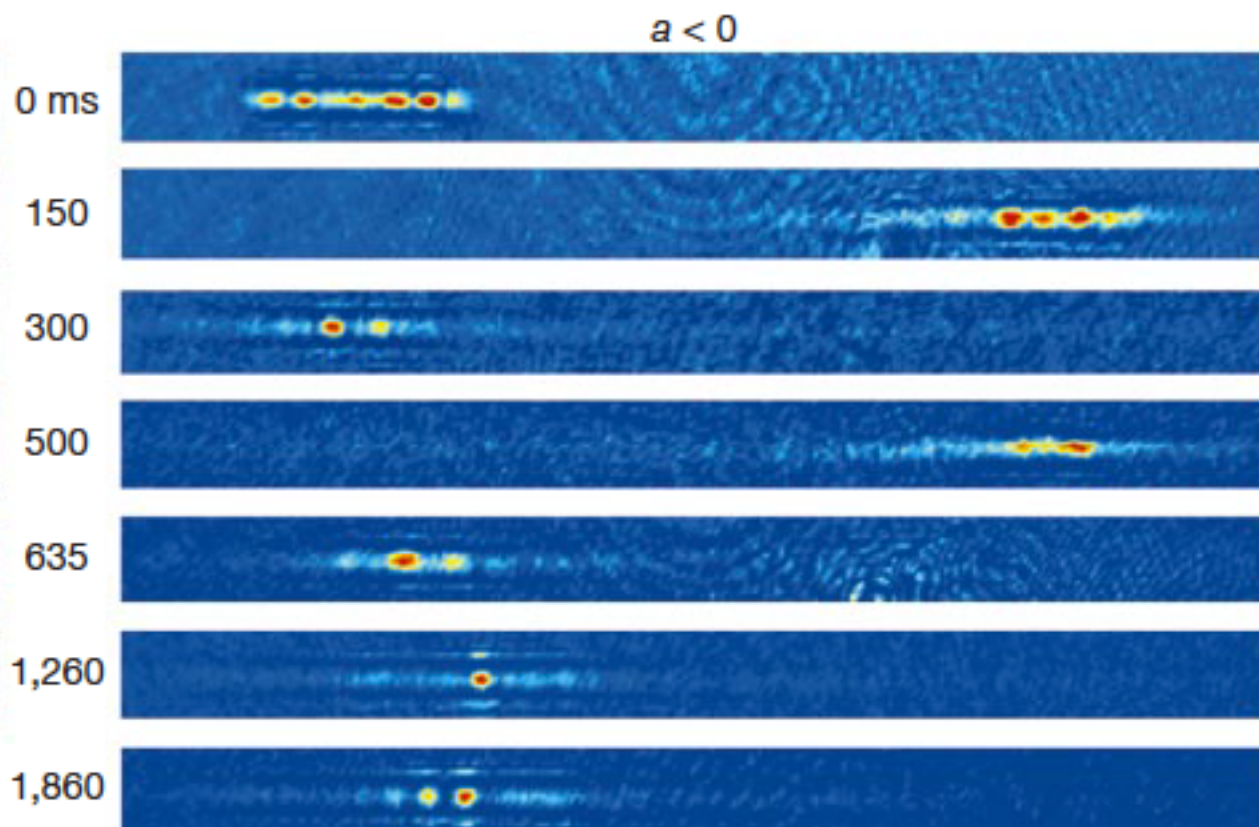


Figure 4.7: Τα άτομα ${}^7\text{Li}$ με μήκος σκέδασης $a_0 \approx -3a_B$ σχημάτισαν τέσσερα *BECs*. Οι φωτογραφίες δείχνουν τα συμπυκνώματα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (0-1,860 msec). Μεταξύ των *BECs* υπάρχει απόσταση που υποδηλώνει φερμιονική συμπεριφορά [28].

δεν παγιδεύονται μαγνητικά. Για το λόγο αυτό ρυθμίζεται το 98% των ατόμων να είναι στην κατάσταση (2,2). Έπειτα από την ψύξη και την παγίδευση ρυθμίζεται το πλάτος σκέδασης των ατόμων στα $a_0 \approx -3a_B$, όπου a_B η ακτίνα του *Bohr*. Το αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία τεσσάρων *BECs*, μέγιστου αριθμού ατόμων το καθένα $N \approx 5000$.

Μεταξύ των δημιουργηθέντων *BECs* παρατηρήθηκε απόσταση που υποδηλώνει πως αυτά μεταξύ τους απωθούνται. Αυτό σήμαινε ότι όταν ανά δυο συγκρούονται, δεν διέρχεται το ένα μέσα από το άλλο, όπως θα έκαναν για παράδειγμα δυο φωτόνια (μποζόνια) χαμηλής ενέργειας. Αντιθέτως, η κρούση τους θυμίζει την σκέδαση δυο ταυτοτικών φερμιονίων (π.χ. ηλεκτρόνια), όπως φαίνεται στο σχήμα (4.8).

Η συμπεριφορά αυτή είναι παρόμοια με αυτήν ταυτοτικών φερμιονίων. Τα άτομα ${}^7\text{Li}$ και

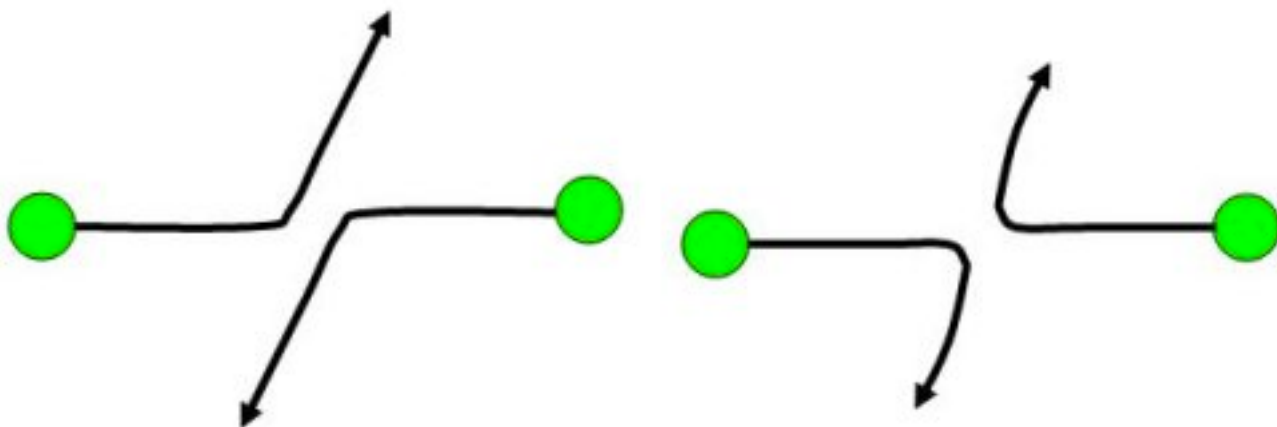


Figure 4.8: Σενάρια σκέδασης δύο ηλεκτρονίων

τα συμπυκνώματά τους αναμενόταν να έχουν μποζονική συμπεριφορά διότι αποτελούνται από άρτιο αριθμό φερμιονίων [29]. Γνωρίζουμε πως φερμιόνια ή μποζόνια μπορούν να είναι μόνο τα στοιχειώδη σωματίδια. Οι συνενώσεις αυτών δεν είναι ούτε φερμιόνια μήτε μποζόνια, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις προσεγγίζουν τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων. Αν αντιστοιχίσουμε τα φερμιόνια στο χρώμα “ μαύρο ” και τα μποζόνια στο “ λευκό ”, τότε τα μη στοιχειώδη σωματίδια θα αντιστοιχούν σε αποχρώσεις του “ γκρι ”, από “ ανοιχτό γκρι ” για αυτά που έχουν μποζονική συμπεριφορά έως σκούρο για όσα λειτουργούν φερμιονικά.

Αυτό μπορεί να μεταφραστεί στη γλώσσα των παραφερμιονίων: Παραφερμιόνιο καλείται οποιοδήποτε σωματίο, στοιχειώδες ή μη, το οποίο χαρακτηρίζεται από μια παράμετρο τάξης ρ . Η τιμή αυτής της παραμέτρου μας δίνει πληροφορία για την συμπεριφορά του. Πιο συγκεκριμένα, αν :

- α) $\rho = 1$ τότε το σωματίδιο είναι φερμιόνιο
- β) $\rho \rightarrow \infty$ το σωματίδιο είναι μποζόνιο
- ς) $\rho \rightarrow 1$ το σωματίο έχει φερμιονική συμπεριφορά
- δ) $\rho \gg 1$ το σωματίο έχει μποζονική συμπεριφορά.

4.3 Παραγωγή της εξίσωσης Gross – Pitaevskii

Σύμφωνα με την Θεωρία Πολλών Σωμάτων η *Hamiltonian* N αλληλεπιδρώντων μποζονίων είναι:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

όπου $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ και $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ είναι οι μποζονικοί τελεστές πεδίου που καταστρέφουν και δημιουργούν ένα άτομο-μποζόνιο στη θέση \mathbf{r} .

Οι τελεστές πεδίου μπορεί να εκφραστούν ως [30]:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_p \Psi_p(\mathbf{r}) \hat{a}_p = \sum_p \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{ipx/\hbar} \hat{a}_p \quad (4.7)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα εκθετικά είναι μια ορθογώνια βάση συναρτήσεων, οι \hat{a}_p λειτουργούν ως συντελεστές και η $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης αφού ν είναι ο όγκος. Οι συντελεστές είναι οι τελεστές καταστροφής του χώρου *Fock*. Η δράση του τελεστή καταστροφής σε ένα διάνυσμα του χώρου *Fock* καταστρέφει ένα άτομο από τη κατάσταση p :

$$\hat{a}_p |n_0, n_1, \dots, n_p, \dots\rangle = \sqrt{n_p} |n_0, n_1, \dots, n_p - 1, \dots\rangle \quad (4.8)$$

Συνεπώς ο τελεστής δημιουργίας δημιουργεί ένα άτομο στην κατάσταση p :

$$\hat{a}_p^\dagger |n_0, n_1, \dots, n_p, \dots\rangle = \sqrt{n_p + 1} |n_0, n_1, \dots, n_p + 1, \dots\rangle \quad (4.9)$$

Οι μεταθέτες των τελεστών αυτών είναι:

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{pl} \quad (4.10)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_l] = 0 \quad (4.11)$$

$$[\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_l^\dagger] = 0 \quad (4.12)$$

Οι μεταθέτες των μποζονικών τελεστών πεδίου είναι [33]:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.13)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0 \quad (4.14)$$

Τα συμπυκνώματα δημιουργούνται όταν σχεδόν κάθε άτομο καταλάβει τη θεμελιώδη κατάσταση και την ίδια περιοχή του χώρου. Συνεπώς ο αριθμός των ατόμων της θεμελιώδης κατάστασης είναι $n_0 = N_0 \gg 1$, καθώς το όριο $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_0}{N}$ παραμένει πεπερασμένο [31]. Αφού $N_0 \gg 1$ ισχύει ότι $N_0 \pm 1 \approx N_0 \implies \sqrt{N_0 \pm 1} \approx \sqrt{N_0}$. Τώρα ας χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που ορίζουν τη δράση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής για τη θεμελιώδη κατάσταση, $p = 0$, η οποία καταλαμβάνεται από την πλειονότητα των ατόμων $N_0 \gg 1$. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι συντελεστές λειτουργούν ως απλές σταθερές: $a_0 \approx a^\dagger \approx \sqrt{N_0}$ και $a_0 a_0^\dagger \approx N_0$ [30]. Αυτό συνεπάγεται πως στην περίπτωση ομογενούς αερίου μποζονίων ο πεδιακός τελεστής εκφράζεται ως [31]:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi_{p=0} \hat{a}_{p=0} + \sum_{p>0} \Psi_p(\mathbf{r}) \hat{a}_p = \sqrt{\frac{N_0}{\nu}} + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

Αν το αέριο δεν είναι ομογενές, τότε:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) \quad (4.16)$$

όπου $\Phi(\mathbf{r}, t)$ είναι ο τελεστής πεδίου, που μετατράπηκε σε μια απλή συνάρτηση, για τα μποζόνια της θεμελιώδους κατάστασης και $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ είναι ο τελεστής πεδίου των μποζονίων των διεγερμένων καταστάσεων. Η συνάρτηση $\Phi(\mathbf{r}, t)$ είναι στην ουσία η κυματοσυνάρτηση του *BEC*. Η πυκνότητα πιθανότητας του προβλήματος, $|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{dN_0}{d\nu}$, εκπροσωπεί τη συγκέντρωση των ατόμων γύρω από τη θέση \mathbf{r} . Ο αυστηρός ορισμός της κυματοσυνάρτησης είναι : $\Phi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Όσον αφορά στον επόμενο όρο, $\hat{\Psi}'(\mathbf{r})$, ο *Bogoliubov* θεώρησε ότι μπορεί να θεωρηθεί ως μια μικρή διαταραχή στο σύστημα, εφόσον τα περισσότερα άτομα βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση.

4.3.1 Το δυναμικό του μέσου πεδίου και η σταθερά ζεύξης

Το δυναμικό του μέσου πεδίου είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των ατόμων. Ο απλούστερος τρόπος περιγραφής της είναι να θεωρήσουμε πως μόνο δυο άτομα σχεδιάζονται τη φορά. Αυτός ο τρόπος σκέδασης αντιστοιχεί σε ένα δυναμικό μικρής εμβέλειας:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.17)$$

όπου η σταθερά ζεύξης, g , είναι αρνητική για ελκτικές αλληλεπιδράσεις και θετική για απωστικές.

Το δυναμικό αυτό είναι κατάλληλο να περιγράψει αραιά αέρια μποζονίων, γιατί σε άλλη περίπτωση λαμβάνουν χώρα και σχεδάσεις τριών ατόμων. Η εξίσωση GP περιγράφει μόνο τα αραιά αέρια μποζονίων. Πώς όμως είναι δυνατόν το συμπύκνωμά μας είναι είναι αραιό αφού τα άτομα καταλαμβάνουν την ίδια περιοχή του χώρου; Κι όμως τα $BECs$ μπορούν να θεωρηθούν αραιά αέρια διότι το μήκος σκέδασης των ατόμων είναι αρκετά μικρότερο του διαθέσιμου χώρου κίνησης των ατόμων, $r \gg a_0$. Δεν έχει σημασία το πόσο πυκνή είναι η ύλη, αλλά το πόσο έντονα αλληλεπιδρούν τα άτομα μεταξύ τους. Χάρη στην πολύ χαμηλή θερμοκρασία τα άτομα σχεδιάζονται όσο το δυνατόν λιγότερο.

Η σταθερά ζεύξης είναι στην ουσία ο μετασχηματισμός *Fourier* του δυναμικού της αλληλεπίδρασης:

$$V(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tilde{\mathbf{r}})e^{-i\frac{\mathbf{p}\tilde{\mathbf{r}}}{\hbar}} d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} g\delta(\tilde{\mathbf{r}})e^{-i\frac{\mathbf{p}\tilde{\mathbf{r}}}{\hbar}} d\tilde{\mathbf{r}} = g = constant \quad (4.18)$$

όπου $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$.

Μπορούμε να συνδέσουμε την g με το μήκος σκέδασης a_0 . Η Θεωρία Αναπαράστασεων σε μερικά κύματα της Θεωρίας Σχεδάσεων υποθέτει πως το ένα άτομο είναι ο ακινητοποιημένος στόχος και το άλλο είναι το βλήμα που κατευθύνεται ως προς το πρώτο. Μετά τη σκέδαση, το βλήμα απέρχεται ως σφαιρικό κύμα με κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi_{sph}(\tilde{\mathbf{r}}, t) = \frac{f(\theta, \phi)}{\tilde{r}} e^{i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}} e^{-i\omega t} \quad (4.19)$$

Η συνάρτηση $f(\theta, \phi)$ είναι το μήκος σκέδασης. Με χρήση θεωρίας διαταραχών πρώτης τάξης αποδεικνύεται ότι [32]:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}} V(\tilde{\mathbf{r}}) d^3\tilde{r} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} g, \quad (4.20)$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα των ατόμων, μάζας m το καθένα. Θέτοντας ότι [30] $a_0 = \pm |f(\theta, \phi)|$ λαμβάνουμε:

$$a_0 = \frac{mg}{4\pi\hbar^2} \Rightarrow g = \frac{4\pi a_0 \hbar^2}{m} \quad (4.21)$$

Αν η σταθερά ζεύξης έχει αρκετά μικρή τιμή τότε το αέριο μπορεί να χαρακτηριστεί αραιό.

4.3.2 Ανάλυση του Μποζονικού Πεδιακού Τελεστή σε s κύματα

Η τάξη μεγέθους της Κινητικής Ενέργειας του κάθε ατόμου είναι $\frac{p^2}{2m} \sim k_B T$. Συνεπώς η ορμή τους είναι $p \sim \sqrt{2mk_B T}$. Από τη Θεωρία Σκεδάσεων προκύπτει ότι μόνο τα άτομα που ικανοποιούν την παρακάτω ανίσωση μπορεί να σκεδασθούν [32]:

$$\sqrt{l(l+1)\hbar^2} < pr_0. \quad (4.22)$$

Αν $\sqrt{l(l+1)\hbar^2} \simeq l\hbar$, τότε η στροφορμή είναι:

$$l < \frac{pr_0}{\hbar} \simeq \frac{r_0}{\hbar} \sqrt{2mk_B T}. \quad (4.23)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η θερμοκρασία είναι $T \ll 1$, συμπεραίνουμε πως μόνο τα άτομα στροφορμής $l \ll 1$ συμμετέχουν στις σκεδάσεις. Είναι λοιπόν αναγκαίο να επιλέξουμε μόνο αυτά με στροφορμή $l = 0$ (s - waves). Τα άτομα αυτά βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση με $p > 0$.

Θα αναλύσουμε τις καταστάσεις με $p > 0$ σε s - waves που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις [31]:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t} + \Psi_k e^{i(\mathbf{kr} - (\mu + \omega)t)/\hbar} + \Psi_{-k} e^{-i(\mathbf{kr} - (\mu - \omega)t)/\hbar}, \quad (4.24)$$

όπου μ είναι το χημικό δυναμικό της αλληλεπίδρασης και $\Psi_{\pm k}$ τα πλάτη των κυμάτων. Οι συχνότητες $\mu + \omega$ και $\mu - \omega$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε η ενέργεια του συστήματος να είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

4.3.3 Η εξίσωση Heisenberg

Σε αυτήν την παράγραφο θα παράγουμε την εξίσωση Gross – Pitaevskii (GP). Θα αρχίσουμε με την εξίσωση Heisenberg που περιγράφει ένα κβαντικό αέριο σύμφωνα με τη Θεωρία Πολλών Σωμάτων.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}]. \quad (4.25)$$

Υπολογισμός:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] &= [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \int (\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V_{ext}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})] = \\ &= \int ([\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2) \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V_{ext}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r})]) d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \\ &= \int (\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2) \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})] (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r})) + \\ &\quad \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), V_{ext} \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})] V_{ext} \hat{\Psi}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} + \\ &= \frac{1}{2} \int (\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ &= \int ((\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2) [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2] \hat{\Psi}(\mathbf{r})) + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})] (-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r})) \\ &\quad + \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) (V_{ext}(\mathbf{r}) [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), V_{ext}(\mathbf{r})] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)) + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})] V_{ext}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') (\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})] + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})] V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})) \\ &\quad + [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (4.26)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους μεταθέτες των Μποζονικών Πεδιακών Τελεστών και των εξισώσεων:

$$[\hat{\Psi}, V_{ext}] = [\hat{\Psi}, V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = [\hat{\Psi}, -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2] = [\hat{\Psi}, \hat{\Psi}] = [\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger] = 0, \quad (4.27)$$

$$\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (4.28)$$

$$\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t), \quad (4.29)$$

ώστε να προκύψει ότι:

$$[\hat{\Psi}, \hat{H}] = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'\right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (4.30)$$

Τέλος ενώνουμε τα αποτελέσματα των εξισώσεων (4.30) και (4.25) για να προκύψει η GP :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (4.31)$$

Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τη θεμελιώδη κατάσταση, η GP γίνεται:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2\right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (4.32)$$

4.4 Η ενέργεια ενός BEC σε κυλινδρική παγίδα

Το δυναμικό της κυλινδρικής παγίδας είναι:

$$V_{ext} = \frac{1}{2} m \omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2. \quad (4.33)$$

Συνεπώς η *Hamiltonian* που περιγράφει το συμπύκνωμα είναι:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (4.34)$$

Θα θέσουμε $\Lambda = \left(\frac{\omega_z}{\omega_r}\right)^2$, όπου Λ είναι η σταθερά ανισοτροπίας του κυλινδρικού ταλαντωτή.

Η εξίσωση ιδιοτιμών της *Hamiltonian* είναι:

$$\hat{H}\Phi(\mathbf{r}) = E\Phi(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

Αυτή είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση που δεν μπορεί να επιλυθεί ακριβώς. Πρέπει λοιπόν να την απλουστεύσουμε ώστε να βρεθεί μια ποσεγγιστική λύση. Θα υποθέσουμε ότι ο μη γραμμικός όρος $g|\Phi(\mathbf{r})|^2$ επιδρά μόνο στη διεύθυνση z [34], αφού ο διαθέσιμος χώρος μέσα στην παγίδα είναι αρκετά μεγαλύτερος κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου. Στη συνέχεια θα χωρίσουμε την κυματοσυνάρτηση σε δυο μέρη:

$$\Phi(\mathbf{r}) = P(r)U(z) \quad (4.36)$$

Αντικαθιστώντας την στην GP προκύπτουν δυο διαφορικές εξισώσεις:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\perp}^2 P(r) + \frac{1}{2}mr^2 P(r) = c_1 P(r) \quad (4.37)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U''(z) + \frac{1}{2}m\Lambda z^2 U(z) + g|U(z)|^2 = c_2 U(z), \quad (4.38)$$

όπου c_1, c_2 κάποιες σταθερές. Η πρώτη διαφορική που προέκυψε δεν είναι παρά η εξίσωση του Schrödinger για τον μονοδιάστατο απλό αρμονικό ταλαντωτή. Άρα η λύση της μας είναι γνωστή.

Για να λύσουμε τη δεύτερη διαφορική εξίσωση θα υποθέσουμε ότι το δυναμικό κατά μήκος του z άξονα είναι αργά μεταβαλλόμενο και άρα σταθερό $\frac{1}{2}m\Lambda z^2 \simeq constant = 0$. Η διαφορική μας εξίσωση απλοποιείται στη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U''(z) + g|U(z)|^2 = c_2 U(z) \quad (4.39)$$

Η αντίστοιχη χρονοεξαρτημένη εξίσωση είναι:

$$i\hbar\frac{\partial U(z,t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} - g|U(z)|^2 U(z) = 0. \quad (4.40)$$

Η λύση αυτής θα πρέπει να ικανοποιεί αφ' ενός την διαφορική αφ' ετέρου τις συνοριακές συνθήκες όταν $z \rightarrow \pm\infty$. Μια λύση που ικανοποιεί τις απαιτήσεις αυτές είναι [34]:

$$U(z,t) = A \operatorname{sech}[\eta(z-vt)] e^{i(kz-\omega t)}, \quad (4.41)$$

όπου ω είναι μια συχνότητα, τα $\eta, k, |A|^2$ έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης με την πυκνότητα πιθανότητας:

$$|U(z,t)|^2 = \frac{dN}{dz}. \quad (4.42)$$

Περαιτέρω είναι γνωστό από τη Φυσική Στερεάς Κατάστασης ότι όταν ένα οδεύον κυματοπακέτο είναι περιορισμένο σε μήκος L , τότε ο κυματάριθμος k παίρνει τιμές :

$$k = l\frac{\pi}{L}, \quad l = 0, 1, 2, 3... \quad (4.43)$$

Η ανωτέρω συνθήκη λέγεται και συνθήκη των σταθερών άκρων. Μέσα στην οπτική παγίδα το πιθανότερο είναι το $k = 0$, αφού τα άτομα είναι σχεδόν ακινητοποιημένα.

4.4.1 Υπολογισμός του αριθμού των ατόμων

Ο αριθμός των ατόμων του συμπυκνώματος δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |U(z, t)|^2 dz \quad (4.44)$$

Θα μας χρειαστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dz}{\cosh^n(az)} = \frac{\sinh(az)}{a(n-1)\cosh^{n-1}(az)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dz}{\cosh^{n-2}(az)}, \forall n \neq 1. \quad (4.45)$$

Επομένως:

$$N = |A|^2 \int \operatorname{sech}^2[\eta(z-vt)] dz = |A|^2 \frac{\sinh[\eta(z-vt)]}{\eta \cosh[\eta(z-vt)]} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2|A|^2}{\eta}. \quad (4.46)$$

4.4.2 Υπολογισμός της ενέργειας

Σύμφωνα με την Κλασική Θεωρία ένα σύστημα καλείται Χαμιλτονιανό μόνο εαν υπάρχει συνάρτηση \tilde{H} [37]:

$$\tilde{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(U, U^*, t) dz, \quad (4.47)$$

τέτοια ώστε [36]:

$$\frac{\delta \tilde{H}}{\delta U^*} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{\partial h}{\partial (\frac{\partial^n U^*}{\partial z^n})} \right) = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (4.48)$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι μια από τις εξισώσεις του *Hamilton* για τις συζυγείς μεταβλητές $q = U$ και $p = U^*$ (γενικευμένη θέση και ορμή). Η συνάρτηση $h(U, U^*, t)$ ονομάζεται *συναρτησοειδές της ενέργειας*.

Η ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση [34]:

$$E = -i\hbar \tilde{H}. \quad (4.49)$$

Θυμίζουμε ότι η ποσότητα $\frac{\partial U}{\partial t}$ δίνεται από τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση *GP*. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.49), (4.47), και (4.40) μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι η ενέργεια του συμπυκνώματος είναι:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\hbar^2}{m} \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|^2 + g|U|^4 \right) dz. \quad (4.50)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.42) και τα ολοκληρώματα:

$$\int \tanh^n(az) \operatorname{sech}^2(az) dz = \frac{\tanh^{n+1}(az)}{(n+1)a} \quad (4.51)$$

$$\int \operatorname{sech}^n(az) dz = \frac{\operatorname{sech}^{n-2}(az) \tanh(az)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2}(az) dz, \quad (4.52)$$

προκύπτει ότι:

$$E = \frac{\hbar^2}{m} |A|^2 \left(\frac{k^2}{\eta} + \frac{\eta}{3} \right) + \frac{2g}{3\eta} |A|^4. \quad (4.53)$$

Επιλύοντας την (4.46) προκύπτει ότι:

$$\frac{|A|^2}{\eta} = \frac{N}{2}. \quad (4.54)$$

Με μια αντικατάσταση της (4.54) στην (4.53) έχουμε τη σχέση $E \equiv E(N)$:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k^2 + \frac{\eta^2}{3} \right) N + \frac{g\eta}{6} N^2. \quad (4.55)$$

Για να κατανοήσουμε αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να κάνουμε μια αναδρομή στη δεύτερη κβάντωση. Η όλη ιδέα της δεύτερης κβάντωσης προέκυψε από το πρόβλημα του ενός σωματιδίου σε απλό αρμονικό ταλαντωτή. Σε αυτό το πρόβλημα τα ενεργειακά επίπεδα είναι ισαπέχοντα με ενεργειακό χάσμα $\hbar\omega$. Όταν το σωματίδιο είναι διεγερμένο στην N -οστή στάθμη του ταλαντωτή φέρει ενέργεια $N\hbar\omega$. Αυτό το σωματίδιο έχει ενέργεια όση θα είχαν N σωματίδια ενέργειας $\hbar\omega$ το καθένα. Στη γλώσσα της δεύτερης κβάντωσης το N -οστό ενεργειακό επίπεδο κατασκευάζεται από N το πλήθος σωματίδια ενέργειας $\hbar\omega$ το καθένα. Φυσικά τα σωματίδια πρέπει να είναι μποζόνια για να μπορεί άπειρο πλήθος τέτοιων σωματιδίων να καταλάβει την ίδια κβαντική κατάσταση. Σε ένα υπέρψυχρο αέριο όλα τα άτομα τείνουν να καταλάβουν τη θεμελιώδη κατάσταση. Αν λοιπόν τα άτομα ήταν μποζόνια θα έπρεπε η ενέργειά τους να είναι της μορφής:

$$E = uN, \quad (4.56)$$

όπου u θα ήταν η ενέργεια του ενός ατόμου. Δηλαδή η $E \equiv E(N)$ θα ήταν μια γραμμική σχέση.

Όμως η (4.55) δείχνει πως η $E \equiv E(N)$ είναι μια μη γραμμική σχέση. Αυτό συμβαίνει γιατί τα άτομα δεν είναι μποζόνια, αλλά προσεγγίζουν τη μποζονική συμπεριφορά. Έτσι λοιπόν

πεπερασμένο πλήθος ατόμων μπορεί να καταλάβει την ίδια κβαντική κατάσταση και για αυτό η σχέση προκύπτει μη γραμμική:

$$E = uN + vN^2, \quad (4.57)$$

όπου $u = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 + \frac{\eta^2}{3})$ και $v = \frac{g\eta}{6}$.

4.5 Η παράμετρος τάξης του παραφερμιονίου

Για την περιγραφή των BECs κρίνεται καταλληλότερη η Hamiltonian μποζονικού τύπου . Η ενέργεια που προκύπτει από τη χρήση αυτής έχει βρεθεί στην ισότητα (2.3). Προκειμένου να υπολογιστούν οι σταθερές λ, ρ, μ, ν θα εξισώσουμε τους συντελεστές των εξισώσεων (4.55) και (2.3):

$$-\frac{\hbar\omega}{2}2\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}(-2\mu) = 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}(-2\lambda) = \frac{g\eta}{6} \Rightarrow \lambda = -\frac{g\eta}{6\hbar\omega} \quad (4.60)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}2\rho\lambda = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 + \frac{\eta^2}{3}) \Rightarrow \rho = -\frac{3\hbar^2}{gm\eta}(k^2 + \frac{\eta^2}{3}) \Rightarrow \rho = \frac{3\hbar^2}{|g|m\eta}(k^2 + \frac{\eta^2}{3}) \quad (4.61)$$

Εξ ορισμού η παράμετρος τάξης πρέπει να είναι αριθμός ακέραιος και μεγαλύτερος της μονάδας.

Έπεται επομένως ο περιορισμός:

$$0 \leq |g| \leq \frac{3\hbar^2}{\eta m}(k^2 + \frac{\eta^2}{3}), \quad (4.62)$$

όπου $\frac{3\hbar^2}{\eta m}(k^2 + \frac{\eta^2}{3}) = g_{max}$. Θυμίζουμε ότι αν το μήκος σκέδασης των ατόμων είναι έχει μεγάλη τιμή το αέριο παύει να είναι αραιό. Επιπλέον, η σταθερά ζεύξης είναι ανάλογη του μήκους σκέδασης. Είναι λοιπόν αναμενόμενο το μοντέλο να μην περιγράφει το αέριο των ατόμων αν η σταθερά ζεύξης ξεπεράσει κάποια τιμή g_c . Η τιμή αυτή ενδεχομένως να μπορεί να βρεθεί πειραματικά. Αναμένεται $g_c \leq g_{max}$. Αν η παράμετρος τάξης προκύψει αρνητική τότε θα πρέπει να δοκιμάσουμε άλλη Hamiltonian ή άλλη συνάρτηση παραμόρφωσης. Ενδέχεται πάντως η μέθοδος που προτείνουμε να μην ενδείκνυται για κάποια προβλήματα.

Πίσω από την παράμετρο τάξης κρύβονται κι άλλες πληροφορίες. Έχουμε ήδη υποψιαστεί πως η απόκλιση από τη μποζονική συμπεριφορά φαίνεται από την μη γραμμικότητα της σχέσης $E \equiv E(N)$. Ας δοκιμάσουμε λοιπόν να φτιάξουμε το λόγο:

$$\frac{\text{bosonic} - \text{behavior}}{\text{fermionic} - \text{behavior}} = \left| \frac{u}{v} \right| = \left| \frac{3\hbar^2}{-g\eta m} \left(k^2 + \frac{\eta^2}{3} \right) \right| = \rho. \quad (4.63)$$

Είναι πλέον φανερό ότι ισχύει ο ισχυρισμός

Η απόκλιση από την ιδανική μποζονική συμπεριφορά, στους $T \approx 0K$, αποτυπώνεται στη μη γραμμικότητα της σχέσης που συνδέει την ενέργεια με τον αριθμό των ατόμων του συμπυκνώματος.

4.5.1 Το αέριο *Tonks Girardeau*

Το είδος αυτού του αερίου είχε προταθεί προ σαράντα ετών αλλά πραγματοποιήθηκε μόνο αφού τελειοποιήθηκαν οι πειραματικές τεχνικές ψύξης και παγίδευσης αερίων. Ένα τέτοιο αέριο αποτελείται από μποζονικά σωματίδια που έχουν περιοριστεί σε μια διάσταση. Όταν το αέριο αυτό εισέλθει στην περιοχή *Tonks – Girardeau* τα σωματίδια αρχίζουν και απωθούνται. Αυτό δεν διαφέρει από το πείραμα που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Περισσότερες λεπτομέρειες για την δημιουργία ενός τέτοιου αερίου δίνονται στην αναφορά [37]. Σε αυτήν περιγράφεται η διαδικασία για τη δημιουργία ενός τέτοιου αερίου. Η ποσότητα που χρησιμοποίησαν για να κρίνουν αν το αέριο τους έχει εισέλθει στην περιοχή *Tonks – Girardeau* είναι ο λόγος:

$$\gamma = \frac{I}{K}, \quad (4.64)$$

όπου I η ενέργεια αλληλεπίδρασης των ατόμων και K η κινητική τους ερνέργεια.

Όσον αφορά στις τιμές του λόγου αυτού ισχύουν τα ακόλουθα:

- α) Αν $\gamma \ll 1$ το αέριο δεν έχει εισέλθει στην περιοχή *Tonks – Girardeau* (μποζονικό αέριο)
- β) Αν $\gamma \gg 1$ το αέριο έχει εισέλθει στην περιοχή *Tonks – Girardeau* και τα άτομα ευρισκόμενα σε μια διάσταση απωθούνται (φερμιονικό αέριο)
- γ) Αν $\gamma \approx 1$ το αέριο βρίσκεται μεταξύ των δυο προηγούμενων καταστάσεων.

Στην [37] αναφέρεται ότι για ομογενές αέριο ισχύει:

$$\gamma = \frac{mg}{n\hbar^2}, \quad (4.65)$$

όπου n η συγκέντρωση των ατόμων.

Στο σημείο αυτό θα συγκρίνουμε τα μεγέθη των (4.65) και (4.63). Σε μια τόσο χαμηλή θερμοκρασία είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι ο κυματάριθμος του οδεύοντος κύματος της (4.41) είναι $k = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η παράμετρος τάξης της σχέσης (4.61) γίνεται:

$$\rho = \frac{\eta\hbar^2}{m|g|} \quad (4.66)$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το η , που μέχρι πρότινος δεν είχε φυσική σημασία, έχει μονάδες μέτρησης συγκέντρωσης. Κάνοντας λοιπόν την αντιστοιχία $\eta \rightarrow n$ προκύπτει πολύ σωστά ότι:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \quad (4.67)$$

Η τάξη του παραφερμιονίου λοιπόν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για το εάν ένα αέριο είναι τύπου *Tonks – Girardeau* ή όχι.

Chapter 5

Συμπεράσματα

Κάνοντας χρήση της θεωρίας των Γενικευμένων Παραφερμιονικών Ταλαντωτών μπορούμε να μελετήσουμε συστήματα αέριων, πυρηνικά ή μοριακά συστήματα αλλά και δυσεπίλυτα προβλήματα. Η θεωρία εφαρμόστηκε επιτυχημένα στα συμπυκνώματα *Bose – Einstein* και κατάφερε να ορίσει ένα μέγεθος, την τάξη του παραφερμιονίου, που δείχνει το πόσο μποζονικά ή φερμιονικά συμπεριφέρεται το αέριο αυτό.

Η τάξη του παραφερμιονίου συμπίπτει με το λόγο του συντελεστή του γραμμικού όρου της ενέργειας προς τον συντελεστή του μη γραμμικού όρου. Άρα όσο περισσότερο αποκλίνει από τη γραμμική συμπεριφορά η σχέση της ενέργειας με τον αριθμό των σωμάτων τόσο πιο φερμιονικά συμπεριφέρεται το αέριο.

Τέλος η παράμετρος τάξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για το κατά πόσο ένα αέριο έχει εισέλθει στην περιοχή *Tonks – Girardeau*.

Αναφορές

- [1]. D. Bonatsos and C. Daskaloyannis, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **43** (1999) 537-618.
- [2]. H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications* (Ellis Horwood, Chichester, 1983).
- [3]. G. E. Andrews, *Regional Conference Series in Mathematics* **66** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1986). *q-Series: Their Development and Applications in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*.
- [4]. M. Arik and D. D. Coon, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 524.
- [5]. L. C. Biedenharn, *J. Phys. A* **22** (1989) L873.
- [6]. A. J. Macfarlane, *J. Phys. A* **22** (1989) 4581.
- [7]. C. P. Sun and H. C. Fu, *J. Phys. A* **22** (1989) L983.
- [8]. P. P. Kulish and E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A* **23** (1990) L415.
- [9]. V. V. Kuryshkin, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **5** (1980) 111.
- [10]. C. Daskaloyannis, *J. Phys. A* **24** (1991) L789.
- [11]. C. Daskaloyannis and K. Ypsilantis, *J. Phys. A* **25** (1992) 4157.
- [12]. R. Floreanini and L. Vinet, *J. Phys. A* **23** (1990) L1019.
- [13]. K. Odaka, T. Kishi and S. Kamefuchi, *J. Phys. A* **24** (1991) L591.
- [14]. C. Quesne, *Phys. Lett. A* **193** (1994) 245.
- [15]. A. M. Perelomov and V. S. Popov, *Yad. Fiz.* **3**, 924 (1966) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **3**, 676 (1966)].
- [16]. A. Klein and E. R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 375 (1991).
- [17]. P. W. Higgs, *J. Phys. A* **12**, 309 (1979).
- [18]. D. Bonatsos, C. Daskaloyannis and K. Kokkotas, *Phys. Rev. A* **50**, 3700 (1994).
- [19]. A. S. Fokas and P. A. Lagerstrom, *J. Math. Anal. Appl.* **74**, 325 (1980).
- [20]. P. Winternitz, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhlir and I. Fris, *Yad. Fiz.* **4**, 625 (1966) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **4**, 444 (1966)].

- [21]. C. R. Holt, *J. Math. Phys.* **23**, 1037 (1982).
- [22]. T. Tjin, *Phys. Lett. B* **292**, 60 (1992).
- [23]. J. de Boer and T. Tjin, *Commun. Math. Phys.* **158**, 485 (1993).
- [24]. T. Tjin, Ph.D. thesis, U. Amsterdam (1993).
- [25]. J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Int. J. Mod. Phys. A* **8**, 3649 (1993).
- [26]. S. Jing, *J. Phys. A* **31** (1991) 6347.
- [27]. Ya. I. Granovskii, I. M. Lutzenko and A. S. Zhedanov, *Ann. Phys.* **217**, 1 (1992).
- [28]. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A.G. Truscott, R. G. Hulet, *Nature* Vol.417 (2002).
- [29]. R.Feynmann, *The Feynmann Lectures on Physics* Vol.3 Ch. 4.
- [30]. F.Dalfovo,S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Reviews of Modern Physics* Vol. 71 No. 3, (1999).
- [31]. Yoshihisa Yamamoto, Lesson Notes for the class "Bose-Einstein Condensation and Lasers" (2010),ch. 4, Stadford University.
- [32]. Δ.Μπονάτσος, Κβαντομηχανική ΙΙ, Κεφ. 7 , Ε.Μ.Π.
- [33]. R.Greiner, Springer "Field Quantization", Ch.3, (1996)
- [34]. Δ. Ι. Φραντζεσκάκης, Τάξη και Χάος στα Μη γραμμικά Δυναμικά Συστήματα, Τόμος 6ος σελ. 167, Τ.Μπούντης και Σ.Πνευματικός, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα (2000)
- [35]. Goldstein Poole and Safko, *Classical Mechanics* 3rd edition, ch. 2.7
- [36]. Δ. Ι. Φραντζεσκάκης, Τάξη και Χάος στα Μη γραμμικά Δυναμικά Συστήματα, Τόμος 6ος, Παράρτημα Α, Τ.Μπούντης και Σ.Πνευματικός, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα (2000)
- [37]. B.Paredes and A. Widera and V. Murg and O. Mandel and S. Fölling and I. Cirac and G. V. Shlyapnikov and T. W. Hänsch and I. Bloch, *Nature* VOL. 429 (2004)