ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Θεμελίωση της $(2+1)$-διάστατης Βαρύτητας ως Θεωρίας Βαθμίδας σε Μη Μεταθετικούς Χώρους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του **Στέφα Διονύσιου - Στυλιανού**

Επιβλέπων:

Γεώργιος Ζουπάνος

Αθήνα, Ιούλιος, 2021

Ευχαριστίες

Για αρχή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Γιώργο Ζουπάνο, τόσο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όσο και για την έμπρακτη στήριξή του στην προετοιμασία της εργασίας αυτής. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου απέναντι στο Γιώργο Μανωλάκο, ο οποίος βρισκόταν δίπλα μου σε κάθε βήμα της εκπόνησης της παρούσας, καθοδηγώντας και συμβουλεύοντας με. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα κοντινά μου πρόσωπα και φίλους, χωρίς την ψυχολογική υποστήριξη των οποίων, δεδομένης της ιδιαιτερότητας του περασμένου χρόνου, θα μου ήταν αδύνατο να ολοκληρώσω την εργασία αυτή.

Περίληψη

Η βαρυτική αλληλεπίδραση μπορεί να περιγραφεί με επιτυχία από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) του Einstein, σύμφωνα με την οποία η βαρύτητα θεωρείται σαν εγγενής γεωμετρική ιδιότητα του ίδιου του χώρου και του χρόνου. Πέρα όμως από τη ΓΘΣ, η βαρύτητα στις τρείς και στις τέσσερεις διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως θεωρία βαθμίδας, θεωρώντας ως πεδία βαθμίδας τα vielbein και spin connection του Φορμαρλισμού Πρώτης Τάξης της ΓΘΣ.

Στην τρισδιάστατη περίπτωση, η βαρύτητα προκύπτει άμεσα σαν θεωρία βαθμίδας τύπου Chern - Simons, με ομάδα βαθμίδας την $\mathrm{ISO}(2,1)$ στην περίπτωση απουσίας κοσμολογικής σταθεράς, ενώ για μη μηδενική κοσμολογική σταθερά οι αντίστοιχες ομάδες είναι η de Sitter $\mathrm{SO}(3,1)$ για θετική τιμή σταθεράς και η anti-de Sitter $\mathrm{SO}(2,2)$ για αρνητική. Από την άλλη, η τετραδιάστατη βαρύτητα δεν μπορεί να περιγραφεί ως θεωρία βαθμίδας με τόσο άμεσο τρόπο, μιας και δεν είναι δυνατόν να ανακτηθεί απευθείας η δράση που την περιγράφει από κάποια δράση τύπου Yang - Mills της ομάδας που περιγράφει τις συμμετρίες της, δηλαδή της ομάδας Poincaré. Προκειμένου να μπορέσει να περιγραφεί ως θεωρία βαθμίδας, λοιπόν, η τετραδιάστατη βαρύτητα θεωρείται ότι δίνεται από θεωρία βαθμίδας τύπου Yang - Mills στην ομάδα βαθμίδας $\mathrm{SO}(3,2)$, της οποίας η συμμετρία «σπάει» μέσω της εισαγωγής ενός βαθμωτού πεδίου στη θεωρία, καταλλήγοντας έτσι στην επιθυμητή δράση, συμπεριλαμβανομένης κοσμολογικής σταθεράς.

Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει ότι διάφορες θεωρίες της βαρύτητας μπορούν να κατασκευαστούν με έναν εναλλακτικό τρόπο, δηλαδή με τη χρήση θεωριών βαθμίδας. Ως συνέπεια, γεννάται ο ακόλουθος συλλογισμός: εφόσον η βαρύτητα μπορεί να περιγραφεί ως θεωρία βαθμίδας και εφόσον η κατασκευή θεωρίων βαθμίδας σε μη μεταθετικούς χώρους είναι καλώς ορισμένη, τότε ο συνδυασμός τους αναμένεται να παραγάγει κάποιο βαρυτικό μοντέλο σε κάποιον χώρο στον οποίο η μεταθετικότητα των συντεταγμένων παύει να ισχύει. Η σημασία του παραπάνω συλλογισμού ενισχύεται από την ανάγκη περιγραφής της βαρυτικής αλληλεπίδρασης σε καταστάσεις στις οποίες υφίσταται ελάχιστο μήκος. Η παρουσία ενός τέτοιου μήκους καταδεικνύει ότι οι μη μεταθετικοί χώροι, στους οποίους υπονοείται η διακριτοποίηση λόγω αποτυχίας μετάθεσης μεταξύ των συντεταγμένων, ίσως είναι καλοί υποψήφιοι ως χώροι υπόβαθρα πάνω στους οποίους μπορεί να κατασκευαστεί κάποια θεωρία πεδίου, συγκεκριμένα με τη μορφή θεωρίας βαθμίδας. Η παραπάνω επιχειρηματολογία αποτελεί και το βασικό κίνητρο και σκοπό για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, δηλαδή της μελέτης

βαρυτικού μοντέλου ως θεωρίας βαθμίδας σε κατάλληλο, τρισδιάστατο μη μεταθετικό χώρο.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στο Φορμαλισμό πρώτης τάξης της ΓΘΣ, σύμφωνα με τον οποίο κατασκευάζονται οι θεωρίες βαθμίδας που θα μελετηθούν. Ξεκινώντας από τη ΓΘΣ θεμελιώνεται ο Φορμαλισμός πρώτης τάξης από τον οποίο βρίσκεται η δράση Palatini. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η κατασκευή θεωριών βαθμίδας της τρισδιάστατης και τετραδιάστατης βαρύτητας σε συνήθεις χώρους, ακολουθώντας το φορμαλισμό πρώτης τάξης.

Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στου μη μεταθετικούς χώρους, η κατασκευή των οποίων εμπνέεται από την κβαντομηχανική, αναφέροντας την περίπτωση της ασαφούς σφαίρας. Η περίπτωση της ασαφούς σφαίρας εμφανίζει αρκετό ενδιαφέρον διότι αποτελεί τον πιο βασικό συναλλοίωτο μη μεταθετικό χώρο και, συγκεκριμένα για την περίπτωσή μας, αποτελεί τη βάση του μη μεταθετικού χώρου με τον οποίο δουλεύουμε, ο οποίος, κατ΄ επέκταση, καταλήγει επίσης να είναι συναλλοίωτος. Η παρουσία της ιδιότητας της συναλλοιωτότητας είναι απαραίτητη για τους σκοπούς μας διότι εξασφαλίζει την διατήρηση της συμμετρίας Lorentz, η οποία είναι απαραίτητη για την κατασκευή θεωριών πεδίου, πόσο μάλλον μιας βαρυτικής θεωρίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη μελέτη μας, η μη μεταθετικότητα εκφράζεται μέσω της αντιστοίχισης των συντεταγμένων σε πίνακες.

Επίσης μελετάται γενικότερα ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζονται θεωρίες βαθμίδας σε μη μεταθετικούς χώρους, ενώ τέλος παρουσιάζονται οι ασαφείς χώροι $\mathbb{R}^3_\lambda$ και $\mathbb{R}^{(2,1)}_\lambda$ επί των οποίων γίνεται η κατασκευή της θεωρίας βαθμίδας που περιγράφει την $(2+1)$-διάστατη βαρύτητα. Πιο συγκεκριμένα, οι χώροι αυτοί αποτελούν φυλλοποιήσεις των τρισδιάστατων Ευκλείδειου και Minkowski χώρων από ασαφείς σφαίρες και ασαφή υπερβολοειδή, αντίστοιχα. Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάται ο τρόπος με τον οποίο δομείται η μη μεταθετική $(2+1)$-διάστατη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας στους παραπάνω ασαφείς χώρους. Όπως είναι αναμενόμενο, η μη μεταθετικότητα επάγει κάποιες διαφοροποιήσεις συγκριτικά με τη συνηθισμένη περίπτωση. Η πιο βασική είναι ότι οι αντιμεταθέτες των γεννητόρων της ομάδας βαθμίδας καθίστανται απαραίτητοι και για τον λόγο αυτό είναι απαραίτητο κάποιος να προχωρήσει σε εξειδίκευση της αναπαράστασης της ομάδας και επέκτασης της αρχικής άλγεβρας σε κάποια μεγαλύτερη - αλλά πεπερασμένη. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι στο μεταθετικό όριο ανακτάται η θεωρίας της (μεταθετικής) τρισδιάστατης βαρύτητας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η Θεμελίωση Πρώτης τάξης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Στην ακόλουθη παράγραφο, θα επαναδιατυπωθεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, βασισμένη πλέον σε νέες διανυσματικές βάσεις, οι οποίες δεν θα εξαρτώνται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες (non - coordinate bases) και στα πεδία vierbein, τα οποία όπως θα δούμε θα μας επιτρέπουν να περνούμε από τις non - coordinate bases στις γνωστές coordinate bases επί των οποίων έχει θεμελιωθεί η Γενική Σχετικότητα [1].

1.1 Διανυσματικές Βάσεις και Πεδίο Vierbein

Στη συμβατική προσέγγιση της Γενικής Σχετικότητας, η οποία βασίζεται στις συντεταγμένες του χωροχρόνου, σε κάθε σημείο p ορίζεται ένας εφαπτομενικός χώρος T_p, η βάση του οποίου δίνεται από τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων στο p[1]:

$$\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}. \tag{1.1}$$

Κάθε 4-διάνυσμα $A \in T_p$ θα έχει προφανώς συνιστώσες

$$A = A^{\mu}\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} \tag{1.2}$$

Στο παραπάνω, ο δείκτης μ έχει επιλεγεί να γράφεται ως «εκθέτης», καθώς έτσι συμβολίζονται οι συνιστώσες ανταλλοίωτων διανυσμάτων, ή όπως για ευκολία καλούνται, διανύσματα.

[1] Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι ο εξής: Χρησιμοποιείται bold γραμματοσειρά για να συμβολιστούν τα διανύσματα βάσης, το hat για να υποδείξει πως είναι μοναδιαία και η παρένθεση γύρω από το δείκτη μ υποδηλώνει το μ-οστό διάνυσμα βάσης.

Επίσης, στο σημείο p, ορίζεται και ο συνεφαπτομενικός χώρος T_p η βάση του οποίου δίνεται από τα στοιχεία

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)} = \mathbf{dx}^{(\mu)} \tag{1.3}$$

τα οποία βρίσκονται στη διεύθυνση της βάθμωσης των συναρτήσεων των συντεταγμένων. Ο χώρος T_p^* αποτελεί δυϊκό (dual) χώρο του T_p και κάθε dual 4-διάνυσμα $A \in T_p$ θα αναλύεται στις συνιστώσες του

$$A = A_\mu \hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}. \tag{1.4}$$

Όμοια με προηγουμένως, εδώ ο δείκτης μ τοποθετείται «κάτω» για να υποδηλώσει συνιστώσες συναλλοίωτων διανυσμάτων - ή όπως καλούνται συχνότερα, 1-μορφές ή dual διανύσματα.

Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο με αυτόν που ορίστηκαν τα διανύσματα παραπάνω, ορίζονται οι τανυστές T τάξης $(\mu,\, \nu)$, οι οποίοι «ζουν» κι αυτοί επί του εφαπτομενικού και συνεφαπτομενικού χώρου, και αναλύονται πάνω στις βάσεις αυτών ως:

$$T = T^{\rho_1 \cdots \rho_\mu}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_\nu} \hat{\mathbf{e}}_{(\rho_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(\rho_\mu)} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{(\sigma_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{(\sigma_\nu)}. \tag{1.5}$$

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, λόγω της *αρχής της συναλλοιωτότητας*[2], και λόγω του γεωμετρικού χαρακτήρα της ως θεωρία, έχει θεμελιωθεί χρησιμοποιώντας τανυστές, κι αυτό επειδή οι τανυστές αποτελούν αναλλοίωτα αντικείμενα, τα οποία δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων το οποίο χρησιμοποιείται.

Η διάσταση του (1.1) θα δίνεται από τη συνθήκη πως η πρώτη παράγωγος κάθε συνάρτησης είναι πάντα εφαπτομένη στην συνάρτηση αυτή και άρα θα έχει διάσταση αντίστροφου μήκους, $\left[\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}\right] = \frac{1}{L}$. Επομένως το (1.3), το οποίο ζει στο συνεφαπτομενικό χώρο, σαν διαστατικό αντίστροφο του (1.1) θα έχει διαστάσεις μήκους, $\left[\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}\right] = L$. Επίσης, για το τανυστικό γινόμενο των παραπάνω διανυσμάτων βάσης ισχύει

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(\nu)} = \mathbb{I}^{\mu}{}_{\nu}, \tag{1.6}$$

όπου $\mathbb{I}$ ο ταυτοτικός πίνακας.

Δεδομένου πως μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε 4-διάνυσμα $A \in T_p$ σε οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση επί του T_p, μπορούμε να εισαγάγουμε ένα νέο σετ διανυσμάτων βάσης $\hat{\mathbf{e}}_{(a)}$ τα οποία θα είναι ανεξάρτητα από τις χωροχρονικές συντεταγμένες (tetrad basis), και τα οποία θα συμβολίζονται με λατινικούς δείκτες. Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των διανυσμάτων αυτών θα είναι

$$\left(\hat{\mathbf{e}}_{(a)}, \hat{\mathbf{e}}_{(b)}\right) = \eta_{ab}, \tag{1.7}$$

όπου $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ η μετρική Minkowski για επίπεδο χωρόχρονο, μιας και ο εφαπτομενικός χώρος T_p θεωρείται πάντα επίπεδος. Επομένως, μπορούμε πλέον να

[2] Οι νόμοι της φυσικής θα πρέπει να έχουν την ίδια μαθηματική μορφή σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

εκφράσουμε τη βάση (1.1) που εξαρτάται από τις συντεταγμένες - καθώς και όποιο διάνυσμα ανήκει στον T_p - συναρτήσει της tetrad basis $\hat{\mathbf{e}}_{(a)}$, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες, μέσω της σχέσης

$$\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}(x) = e_\mu{}^a(x)\hat{\mathbf{e}}_{(a)}, \tag{1.8}$$

όπου οι συνιστώσες $e_\mu{}^a(x)$ αποτελούν ένα 4×4, αντιστρέψιμο πίνακα, ο οποίος περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με τις συντεταγμένες. Ο συνολικός πίνακας του μετασχηματισμού $e_\mu{}^a(x)$ αποκαλείται *vierbein*[3], μιας και αποτελείται απο 4 «πόδια», ένα για κάθε τιμή του a.

Το αντίστροφο vierbein συμβολίζεται ως $e^\mu{}_a(x)$, και οι συνιστώσες του ικανοποιούν τη συνθήκη ορθοκανονικότητας με αυτές του vierbein:

$$e^\mu{}_a(x)e_\nu{}^a(x) = \delta^\mu_\nu, \quad e_\mu{}^a(x)e^\mu{}_b(x) = \delta^a_b. \tag{1.9}$$

Αντίστοιχα με πριν, το αντίστροφο vierbein παίζει το ρόλο του πίνακα μετασχηματισμού που μας επιτρέπει να εκφράσουμε την tetrad basis συναρτήσει των διανυσμάτων βάσης $\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}(x)$

$$\hat{\mathbf{e}}_{(a)} = e^\mu{}_a(x)\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}(x). \tag{1.10}$$

Τα εσωτερικά γινόμενα των vierbein και των αντιστρόφων vierbein μπορούν να βρεθούν, κάνοντας χρήση της μετρικής $g_{\mu\nu}$ ως

$$g_{\mu\nu}(x)e^\mu{}_a(x)e^\nu{}_b(x) = \eta_{ab} \tag{1.11}$$

και, με χρήση της (1.10),

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^a(x)e_\nu{}^b(x)\eta_{ab} \tag{1.12}$$

αντίστοιχα. Από την τελευταία σχέση μπορεί κανείς να συμπεράνει πως το vierbein αποτελεί «τετραγωνική ρίζα» της μετρικής.

Έχοντας ορίσει τη non - coordinate βάση $\hat{\mathbf{e}}_{(a)}$, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στον ορισμό της δυϊκής της βάσης, των non - coordinate 1-μορφών. Η βάση αυτή θα συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{e}}^{(a)}$, και πάλι με λατινικούς χαρακτήρες (αφού είναι κι αυτή ανεξάρτητη των συντεταγμένων), θα αποτελείται από 1-μορφές που ζουν στο συνεφαπτομενικό χώρο T_p^* και θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(b)} = \mathbb{I}^a{}_b. \tag{1.13}$$

Αντίστοιχα με τις (1.8) και (1.10), είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο vierbein και το vierbein προκειμένου να εκφράσουμε τις coordinate 1-μορφές συναρτήσει των non - coordinate 1-μορφών, και τούμπαλιν μέσω της

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}(x) = e^\mu{}_a(x)\hat{\mathbf{e}}^{(a)} \tag{1.14}$$

και της

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)} = e_\mu{}^a(x)\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}(x) \tag{1.15}$$

αντίστοιχα, όπου από την (1.3) $\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)} = \mathbf{dx}^{(\mu)}$.

[3] Στα γερμανικά vierbein σημαίνει τετράποδος

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να αναλύσουμε κάθε διάνυσμα τόσο στην coordinate όσο και στην non - coordinate βάση:

$$\mathbf{V} = V^{\mu}\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} = e^{\mu}{}_{a}V^{a}\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} \tag{1.16}$$

και

$$\mathbf{V} = V^{a}\hat{\mathbf{e}}_{(a)} = e_{\mu}{}^{a}V^{\mu}\hat{\mathbf{e}}_{(a)} \tag{1.17}$$

αντίστοιχα. Όπως είναι φανερό από τις παραπάνω, τα vierbeins (και τα αντίστροφα vierbeins) μας επιτρέπουν να αλλάζουμε μεταξύ ελληνικών (manifold) και λατινικών (Lorentz) δεικτών. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τανυστές με περισσότερους του ενός δείκτες όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho} = e_{a}{}^{\mu}T^{a\nu}{}_{\rho} = e_{a}{}^{\mu}e_{b}{}^{\nu}T^{ab}{}_{\rho} = e_{a}{}^{\mu}e_{b}{}^{\nu}e^{c}{}_{\rho}T^{ab}{}_{c}. \tag{1.18}$$

Τέλος, το «ανεβοκατέβασμα» των δεικτών των ίδιων των vierbeins γίνεται ως γνωστόν με τη χρήση του μετρικού τανυστή του manifold ($g_{\mu\nu}$) και της επίπεδης μετρικής Minkowski (η_{ab}), για ελληνικούς και λατινικούς δείκτες αντίστοιχα:

$$e_{a}{}^{\mu} = \eta_{ab}e^{b\mu} = \eta_{ab}g^{\mu\nu}e^{b}{}_{\nu}. \tag{1.19}$$

1.2 Συναλλοίωτη Παράγωγος και Συνδέσεις

1.2.1 Συναλλοίωτη Παράγωγος

Όπως είναι γνωστό, στον επίπεδο χωρόχρονο έχουμε τη δυνατότητα να μεταχειριζόμαστε αντικείμενα όπως τα διανύσματα, χωρίς να χρειάζεται να λαμβάνουμε υπόψιν συνεχώς πως αυτά δεν «ζουν» πάνω στο ίδιο το manifold, αλλά στο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο του manifold, καθώς τα εφαπτόμενα επίπεδα αυτά ταυτίζονται τόσο μεταξύ τους όσο και με το ίδιο το manifold, στην περίπτωση που το τελευταίο είναι επίπεδο. Λόγω αυτού, δεν αντιμετωπίζουμε κανένα πρόβλημα όταν προσπαθούμε να συγκρίνουμε ή να κάνουμε πράξεις (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, εσωτερικό γινόμενο) μεταξύ δύο διανυσμάτων τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του manifold. Αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή το να μεταφέρουμε ένα διάνυσμα από ένα σημείο του επίπεδου χωροχρόνου σε ένα άλλο, διατηρώντας τη διεύθυνση και το μέγεθός του σταθερά, είναι τετριμμένη υπόθεση. Η παραπάνω διαδικασία του να μεταφέρεται ένα διάνυσμα από ένα σημείο σε ένα άλλο ακολουθώντας κάποια διαδρομή, με την προϋπόθεση αυτό να διατηρείται σταθερό κατά τη μεταφορά του, ονομάζεται *παράλληλη μεταφορά*.

Η κατάσταση όμως στην περίπτωση που το manifold δεν είναι επίπεδο, αλλά καμπύλο, είναι εντελώς διαφορετική. Πιο συγκεκριμένα, η βασικότερη διαφορά είναι πως σε καμπύλους χώρους, η επίδραση που θα έχει η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος σε αυτό θα εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθείται μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, εάν λάβει κανείς υπόψιν πως οι εφαπτομενικοί χώροι επί των οποίων ζουν τα διανύσματα, είναι πλέον διαφορετικοί σε κάθε σημείο του manifold.

Άμεση απόρροια του παραπάνω είναι οι επιπλοκές που προκύπτουν όταν πάει κανείς να μελετήσει τη μερική παράγωγο ενός διανύσματος. Εάν υπολογίσουμε το πως μετασχηματίζεται η ποσότητα $\partial_\mu V^\nu$ κάτω από την αλλαγή συντεταγμένων $x^\mu \to x'^\mu$ θα πάρουμε το εξής (βλ. παράρτημα Α'):

$$\begin{aligned} \partial'_\mu V'^\nu &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}V^\rho\right) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}V^\rho\right) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}\partial_\sigma V^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}V^\rho . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Παρόλο που θα περιμέναμε η ποσότητα $\partial_\mu V^\nu$ να μετασχηματίζεται ως τανυστής τάξης (1, 1) σύμφωνα με τους νόμους μετασχηματισμού τανυστών που παρατίθενται στο παράρτημα Α', παρατηρούμε πως αυτό δεν συμβαίνει, λόγω του δεύτερου όρου στην παραπάνω εξίσωση, ο οποίος εν γένει δεν μηδενίζεται. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό μπορεί να γίνει κατανοητός εάν κάνει κανείς αναδρομή στο βασικό ορισμό της μερικής παραγώγισης:

$$\partial_\mu V^\nu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} = \lim_{\Delta x^\mu \to 0}\frac{V^\nu\left(x^\mu + \Delta x^\mu\right) - V^\nu\left(x^\mu\right)}{\Delta x^\mu}. \tag{1.21}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό πως κατά τη μερική παραγώγιση ενός διανύσματος, χρειάζεται να γίνει αφαίρεση μεταξύ δύο διανυσμάτων σε δύο διαφορετικά σημεία του manifold, και στη γενική περίπτωση όπου το manifold δεν είναι επίπεδο προκύπτει το θέμα της παράλληλης μεταφοράς που συζητήθηκε προηγουμένως.

Το γεγονός, λοιπόν, ότι η παραγώγιση ενός διανύσματος δεν μετασχηματίζεται ως τανυστής αποτελεί πρόβλημα καθώς, εάν η παράγωγος ενός διανύσματος δεν είναι τανυστής, τότε αυτή δεν είναι συναλλοίωτη. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα πρέπει τα «εργαλεία» που θα χρησιμοποιηθούν να είναι συναλλοίωτα, μιας και αρχή της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας αποτελεί η μη-ύπαρξη προτιμώμενων συστημάτων αναφοράς, υπό την έννοια πως όλα τα συστήματα αναφοράς είναι ισοδύναμα. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι το να αλλάξουμε τον ίδιο τον ορισμό της παραγώγου [2], και για το σκοπό αυτό θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν πως η νέα μας παράγωγος (∇) θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες [3]:

1. Γραμμικότητα: $\nabla\left(A+B\right) = \nabla A + \nabla B$
2. Κανόνας γινομένου Leibniz: $\nabla\left(A\otimes B\right) = \left(\nabla A\right)\otimes B + A\otimes\left(\nabla B\right)$
3. Να μετατίθεται με συστολές δεικτών: $\nabla_\mu\left(A^\rho{}_{\rho\nu}\right) = \left(\nabla A\right)_\mu{}^\rho{}_{\rho\nu}$
4. Να ταυτίζεται με τη μερική παράγωγο, όταν δρα σε βαθμωτά: $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

1.2.2 Το affine connection

Από τις παραπάνω απαιτήσεις, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η νέα παράγωγος θα δίνεται από τη μερική παράγωγο, συν μία διόρθωση η οποία θα προσδιορίζεται από ένα σετ πινάκων $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$, οι οποίοι είναι γνωστοί ως *συντελεστές σύνδεσης*, η αλλιώς *συνδέσεις*. Επομένως η δράση της νέας μας παραγώγου θα είναι:

- Για διανύσματα V^{μ}:
$$\partial_\mu V^\nu \to \nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} V^\rho \tag{1.22}$$

- Για 1-μορφές V_μ:
$$\partial_\mu V_\nu \to \nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} V_\rho, \tag{1.23}$$

- και γενικότερα για τανυστές $T^{\sigma\rho}{}_{\kappa\lambda}$:
$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\sigma\rho}{}_{\kappa\lambda} \to \nabla_\mu T^{\sigma\rho}{}_{\kappa\lambda} =& \partial_\mu T^{\sigma\rho}{}_{\kappa\lambda} \\ &+ \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} T^{\xi\rho}{}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\xi} T^{\sigma\xi}{}_{\kappa\lambda} \\ &- \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa} T^{\sigma\rho}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda} T^{\sigma\rho}{}_{\kappa\xi}\end{aligned} \tag{1.24}$$

Απαιτώντας, τώρα, η δράση της παραπάνω *συναλλοίωτης* παραγώγου επάνω σε ένα διάνυσμα [σχ. (1.22)] να μετασχηματίζεται σαν τανυστής τάξης (1, 1), μπορούμε να καθορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να μετασχηματίζονται οι συνδέσεις $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$. Επομένως απαιτώντας:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu. \tag{1.25}$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της παραπάνω παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} V^{\rho'} \\ &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu\right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu\right) + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} V^\rho \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} V^\rho.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Αναλύοντας αναλόγως και το δεξί μέλος παίρνουμε:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} V^\rho. \tag{1.27}$$

Εξισώνοντας τώρα τις (1.26) και (1.27), και απαλείφοντας τον πρώτο όρο που είναι ο ίδιος και στις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} V^\rho &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} V^\rho \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\rho \partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} V^\rho\end{aligned} \tag{1.28}$$

όπου αλλάξαμε το βωβό δείκτη $\nu \to \rho$ στον δεύτερο όρο. Τέλος, για να απομονώσουμε το connection στον τελευταίο όρο, πολλαπλασιάζουμε με $\dfrac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}}$ και απαλείφουμε τα V^ρ, καταλήγοντας στη σχέση

$$\Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \tag{1.29}$$

Όπως γίνεται φανερό από την (1.29), οι συνδέσεις $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$ δεν υπακούν στο νόμο μετασχηματισμού των τανυστών και ως εκ τούτου δεν μετασχηματίζονται σαν συνιστώσες κάποιου τανυστή. Αυτό βέβαια δεν αποτελεί πρόβλημα, καθώς η «δουλειά» των συνδέσεων είναι να προάγουν την συνήθη παράγωγο στη συναλλοίωτη μορφή της, κάτι που κάνουν πολύ καλά, ακυρώνοντας το μη-συναλλοίωτο κομμάτι της μερικής παραγώγου με το δικό τους.

Με μία προσεκτική ματιά, από τη μορφή της (1.29) μπορούμε να παρατηρήσουμε πως, παρόλο που οι ίδιες οι συνδέσεις δεν μετασχηματίζονται σαν συνιστώσες τανυστή, γεγονός που οφείλεται στον τελευταίο όρο της (1.29), εάν αλλάζαμε θέση στους δύο «κάτω» δείκτες σε μία σύνδεση και έπειτα υπολογίζαμε τη διαφορά $(\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu})$, τότε αυτή θα μετασχηματιζόταν σαν τανυστής τάξης (1, 2), μιας και ο τελευταίος, μη-συναλλοίωτος όρος απλοποιείται. Επομένως, για κάθε affine connection $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$ μπορούμε να ορίσουμε ένα τανυστή $T^{\nu}{}_{\mu\rho}$ ως εξής:

$$T^{\nu}{}_{\mu\rho} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} = 2\Gamma^{\nu}{}_{[\mu\rho]} \tag{1.30}$$

Τον παραπάνω τανυστή τον ονομάζουμε *τανυστή στρέψης* (***torsion***) και από τον ορισμό του γίνεται εμφανές το ότι είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή των «κάτω» δεικτών του. Στην ειδική περίπτωση που οι affine connections που έχουμε διαλέξει[4] είναι συμμετρικές ως προς την εναλλαγή των κάτω δεικτών τους, τότε λέμε ότι τα connections αυτά είναι *torsion-free*.

1.2.3 Ο Τανυστής Καμπυλότητας

Από όσα συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι προφανές πως στον επίπεδο χώρο θα ισχύει

$$[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}]\, V^{\rho} = 0, \tag{1.31}$$

κάτι το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του επίπεδου χώρου. Γενικότερα σε καμπύλο χώρο αυτή η διαφορά θα περιμέναμε να μην μηδενίζεται, και το αποτέλεσμά της να μας υποδεικνύει την ίδια την καμπυλότητα του χώρου. Πράγματι:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\, V^{\rho} = \nabla_{\mu}\left(\nabla_{\nu} V^{\rho}\right) - \nabla_{\nu}\left(\nabla_{\mu} V^{\rho}\right) \tag{1.32}$$

Για τον πρώτο όρο μετά την ισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu}\left(\nabla_{\nu} V^{\rho}\right) &= \partial_{\mu}\left(\nabla_{\nu} V^{\rho}\right) + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\left(\nabla_{\nu} V^{\lambda}\right) - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\left(\nabla_{\lambda} V^{\rho}\right) \\
&= \partial_{\mu}\left(\partial_{\nu} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} V^{\lambda}\right) + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\left(\partial_{\nu} V^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa} V^{\kappa}\right) \\
&\quad - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\left(\partial_{\lambda} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}\right) \\
&= \partial_{\mu}\partial_{\nu} V^{\rho} + \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\partial_{\nu} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa} V^{\kappa} \\
&\quad - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\partial_{\lambda} V^{\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Αντίστοιχα για τον δεύτερο όρο θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\nu}\left(\nabla_{\mu} V^{\rho}\right) &= \partial_{\nu}\partial_{\mu} V^{\rho} + \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\partial_{\mu} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa} V^{\kappa} \\
&\quad - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\partial_{\lambda} V^{\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

[4]Γενικά υπάρχουν άπειρα σετ connections τα οποία ικανοποιούν τις τέσσερεις συνθήκες για τη συναλλοίωτη παράγωγο από προηγουμένως.

Τελικά, αφαιρώντας τους μεταξύ τους παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu,\, \nabla_\nu]\, V^\rho = & \left(\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right) V^\lambda \\ & + \left(\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right)\left(\partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho{}_{\lambda\kappa} V^\kappa\right) \end{aligned} \tag{1.35}$$

και τελικά, με κατάλληλους χειρισμούς των δεικτών:

$$[\nabla_\nu,\, \nabla_\lambda]\, V^\rho = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} V^\mu - T^\lambda_{\nu\mu} \nabla_\mu V^\rho, \tag{1.36}$$

όπου έχουμε θεωρήσει

$$R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} + \Gamma^\rho{}_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}. \tag{1.37}$$

Ο $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$ αποτελεί τανυστή τάξης (1, 3), ονομάζεται τανυστής καμπυλότητας Riemann και, όπως υποδεικνύει και το όνομά του, εμπεριέχει την πληροφορία για την καμπυλότητα του manifold. Εξ' ορισμού ο τανυστής Riemann είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή του τελευταίου ζεύγους δεικτών του, και έχει αποκλειστική εξάρτηση από τα affine connections και τις πρώτες τους παραγώγους.

1.2.4 Τανυστής και Βαθμωτό Ricci και Δράση Einstein - Hilbert

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση που και η afine connection ικανοποιεί την torsionless condition - είναι δηλαδή συμμετρική υπό την εναλλαγή των κάτω δεικτών της - τότε η μοναδική έκφραση για το affine connection είναι η

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\sigma\mu}\right), \tag{1.38}$$

όπου στην περίπτωση αυτή η affine connecion είναι γνωστή και ως *σύμβολα Christoffel*. Τα σύμβολα Christoffel είναι η affine connection η οποία είναι αυτή που χρησιμοποιείται στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Θεωρώντας τώρα πως τα affine connections έχουν την παραπάνω μορφή (σύμβολα Christoffel) και δεδομένης της μορφής του τανυστή καμπυλότητας Riemann [σχ.(1.37)], καθώς και τις συμμετρίες του, αποδεικνύεται πως η μόνη ανεξάρτητη συστολή του τανυστή Riemann είναι ο *τανυστής Ricci*, ο οποίος ορίζεται ως

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}\,. \tag{1.39}$$

Όπως αναφέρεται και παραπάνω, οποιαδήποτε άλλη συστολή του τανυστή Riemann είτε κάνει μηδέν, είτε συσχετίζεται με αυτή που δίνει τον τανυστή Ricci[3]. Ο τελευταίος, δεδομένου του Christoffel connection είναι εξ' ορισμού συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δεικτών του ως απόρροια των συμμετριών του τανυστή Riemann, δηλαδή

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}\,. \tag{1.40}$$

Τέλος, παίρνοντας το ίχνος του τανυστή Ricci, οδηγούμαστε στο

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu\,, \tag{1.41}$$

το οποίο ονομάζεται *βαθμωτό Ricci*.

Δεδομένων όσων έχουν συζητηθεί στην παραπάνω παράγραφο, ο Hilbert πρότεινε σαν την απλούστερη μορφή της κατάλληλης δράσης η οποία θα είχε βαθμωτή Λαγκραντζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}$ συναρτήσει της μετρικής $g_{\mu\nu}$, και που θα περιέγραφε την βαρυτική αλληλεπίδραση εν κενώ, την παρακάτω

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \,, \tag{1.42}$$

όπου G είναι η βαρυτική σταθερά, $g = \det(g_{\mu\nu})$ και R το βαθμωτό Ricci. Ελαχιστοποιώντας τη μεταβολή της παραπάνω δράσης ($\delta S = 0$) ως προς τη μετρική, οδηγούμαστε στις περίφημες *πεδιακές εξισώσεις Einstein* εν κενώ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.43}$$

οι οποίες περιγράφουν ένα μέρος του χωροχρόνου, χωρίς κοσμολογική σταθερά, στο οποίο απουσιάζει τόσο η ύλη όσο και η ενέργεια.

1.2.5 Το spin connection

Η μελέτη που κάναμε έως τώρα περιορίστηκε σε τανυστές οι οποίοι είχαν μόνο ελληνικούς δείκτες (coordinate basis), και βάση αυτών ορίσαμε τη σύνδεση $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$, η οποία ονομάζεται σύνδεση συνάφειας (affine connection) και της οποίας η αναλυτική μορφή θα βρεθεί παρακάτω. Στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με ποσότητες εκπεφρασμένες σε non-coordinate βάση, τότε η affine connection την οποία χρησιμοποιούσαμε για να ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο, θα αντικατασταθεί από το non-coordinate ανάλογο της, το spin connection $\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}$. Το όνομα της προκύπτει καθώς αυτή είναι ο παράγοντας που διορθώνει τη συναλλοίωτη παράγωγο στην περίπτωση των σπινόρων. Αντίστοιχα με το affine connection, το spin connection θα δίνει διορθώσεις στη συναλλοίωτη παράγωγο για κάθε λατινικό δείκτη:

$$\nabla_{\mu} T^{a}{}_{b} = \partial_{\mu} T^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c} T^{c}{}_{b} - \omega_{\mu}{}^{c}{}_{b} T^{a}{}_{c} \tag{1.44}$$

Γενικότερα, σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα σχετικά με τη συναλλοίωτη παράγωγο, η δράση της πάνω σε κάποιο τανυστή ο οποίος κουβαλάει και λατινικούς και ελληνικούς δείκτες, θα έχει διωρθώσεις με το affine connection για κάθε ελληνικό δείκτη και διορθώσεις με το spin connection για κάθε λατινικό:

$$\nabla_{\mu} T^{\nu a} = \partial_{\mu} T^{\nu a} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} T^{\rho a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c} T^{\nu c} \tag{1.45}$$

1.2.6 Το tetrad postulate

Είναι δυνατόν πλέον να βρεθεί μία σχέση μεταξύ των affine και spin συνδέσεων, και για να γίνει αυτό αρκεί να εκφράσουμε τη συναλοίωτη παράγωγο ενός διανύσματος τόσο στη coordinate όσο και στη non-coordinate βάση. Στην coordinate basis έχουμε:

$$\nabla V = \nabla_{\mu} V^{\nu} dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu} = \left(\partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} V^{\rho}\right) dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}, \tag{1.46}$$

ενώ στη non-coordinate:

$$\nabla V = \nabla_\mu V^a dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)} = \left(\partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b\right) dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)}. \tag{1.47}$$

Κάνοντας χρήση των vierbeins μπορούμε να μετατρέψουμε την παραπάνω έκφραση σε όρους της coordinate basis, και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu V^a dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)} &= \left(\partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b\right) dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)} \\ &= \left[\partial_\mu \left(e_\nu{}^a V^\nu\right) + \omega_\mu{}^a{}_b e_\rho{}^b V^\rho\right] dx^\mu \otimes \left(e^\sigma{}_a \partial_\sigma\right) \\ &= e^\sigma{}_a \left(e_\nu{}^a \partial_\mu V^\nu + V^\nu \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\rho{}^b V^\rho\right) dx^\mu \otimes \partial_\sigma\end{aligned} \tag{1.48}$$

και αφού από την (1.9) $e^\sigma{}_a e_\nu{}^a = \delta^\sigma_\nu$ θα έχουμε

$$\nabla_\mu V^a dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)} = \left(\partial_\mu V^\sigma + e^\sigma{}_a \partial_\mu e_\nu{}^a V^\nu + e^\sigma{}_a \omega_\mu{}^a{}_b e_\rho{}^b V^\rho\right) dx^\mu \otimes \partial_\sigma. \tag{1.49}$$

Εάν μετονομάσουμε τους βωβούς δείκτες $\sigma \to \nu$ και στον δεύτερο όρο της παραπάνω $\nu \to \rho$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu V^a dx^\mu \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)} &= \left(\partial_\mu V^\nu + e^\nu{}_a \partial_\mu e_\rho{}^a V^\rho + e^\nu{}_a \omega_\mu{}^a{}_b e_\rho{}^b V^\rho\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu \\ &= \left[\partial_\mu V^\nu + \left(e^\nu{}_a \partial_\mu e_\rho{}^a + e^\nu{}_a \omega_\mu{}^a{}_b e_\rho{}^b\right) V^\rho\right] dx^\mu \otimes \partial_\nu.\end{aligned} \tag{1.50}$$

Συγκρίνοντας τώρα τη (1.46) με την (1.50) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} = e^\nu{}_a \partial_\mu e_\rho{}^a + e^\nu{}_a e_\rho{}^b \omega_\mu{}^a{}_b \tag{1.51}$$

ή ισοδύναμα:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e_\nu{}^a e^\rho{}_b \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} - e^\rho{}_b \partial_\mu e_\rho{}^a, \tag{1.52}$$

και πολλαπλασιάζοντας με το vierbein $e_\lambda{}^b$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b &= e_\lambda{}^b e_\nu{}^a e^\rho{}_b \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} - e_\lambda{}^b e^\rho{}_b \partial_\mu e_\rho{}^a \\ &= e_\nu{}^a \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} - \partial_\mu e_\lambda{}^a.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Αλλάζοντας τώρα τη σειρά των όρων, παρατηρούμε πως καταλήγουμε στην έκφραση της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$\begin{aligned}\partial_\mu e_\lambda{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\lambda{}^b - \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} e_\nu{}^a = 0 \\ \Rightarrow \nabla_\mu e_\lambda{}^a = 0.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *tetrad postulate* (αξίωμα της τετράδας), και μας δείχνει πως η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου vierbein κάνει εκ ταυτότητας μηδέν, ή με άλλα λόγια πως το πεδίο vierbein είναι αναλλοίωτο κατά την παράλληλη μεταφορά του. Το tetrad postulate, με τη σειρά του, μας οδηγεί σε μία ακόμα σχέση σχετικά με την παράλληλη μεταφορά της ίδιας της μετρικής του manifold:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu g_{\nu\rho} &\overset{(1.12)}{=} \nabla_\mu \left(e_\nu{}^a e_\rho{}^b \eta_{ab}\right) \\ &\overset{(1.54)}{=} \cancelto{0}{\left(\nabla_\mu e_\nu{}^a\right)} e_\rho{}^b \eta_{ab} + e_\nu{}^a \cancelto{0}{\left(\nabla_\mu e_\rho{}^b\right)} \eta_{ab} + e_\nu{}^a e_\rho{}^b \cancelto{0}{\left(\nabla_\mu \eta_{ab}\right)} \\ &= \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_\mu{}^c{}_a \eta_{cb} - \omega_\mu{}^c{}_b \eta_{ac} \\ &= -\omega_{\mu ba} - \omega_{\mu ab}\end{aligned} \tag{1.55}$$

όπου εάν θεωρήσουμε πως τα spin connection είναι αντισυμμετρικά ως προς την εναλλαγή μεταξύ των λατινικών δεικτών τους, τότε οδηγούμαστε στην

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0. \tag{1.56}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται metric compatibility και αποτελεί τη συνθήκη πως η μετρική είναι αναλλοίωτη κατά την παράλληλη μεταφορά της. Επίσης, προφανώς το metric compatibility συνεπάγεται την παραπάνω αντισυμμετρικότητα των spin connections και αντίστροφα.

1.2.7 Ο τανυστής torsion και καμπυλότητας ως 2-μορφές

Η διαδικασία που έχουμε ακολουθήσει μέχρι στιγμής, ορίζοντας τις διάφορες ποσότητες που απαντώνται στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, μας παρέχει εκτός άλλων μία νέα οπτική, μέσω της οποίας μπορούμε πλέον να μελετήσουμε εν γένει τους τανυστές: μπορούμε πλέον να τους θεωρήσουμε σαν διαφορικές μορφές οι οποίες όμως, για κάθε τιμή των «κάτω» ελληνικών δεικτών θα είναι τανυστές. Για παράδειγμα μία οντότητα όπως το $A_\mu{}^a$ την οποία θα τη χαρακτηρίζαμε έως τώρα τανυστή τάξης (1, 1), μπορούμε πλέον να τη φανταστούμε σαν μία 1-μορφή, η οποία όμως για κάθε τιμή του «κάτω» δείκτη της θα είναι διάνυσμα, ή συνεπέστερα, θα λαμβάνει τιμές από ένα διανυσματικό χώρο V. Στη τετριμμένη περίπτωση της συνήθους 1-μορφής, αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν μία 1-μορφή ή οποία για κάθε τιμή του «κάτω» δείκτη της θα λαμβάνει τιμές από το $\mathbb{R}$. Επομένως, οποιοσδήποτε τανυστής ο οποίος διαθέτει κάποιο πλήθος ελληνικών «κάτω» δεικτών που είναι αντισυμμετρικοί ως προς την εναλλαγή τους, μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαφορική μορφή, η οποία όμως θα λαμβάνει τανυστικές τιμές.

Σε αυτό το σημείο, και αφού ήδη διαπραγματευόμαστε με διαφορικές μορφές, είναι σκόπιμο να θεωρήσουμε και την *εξωτερική παράγωγό*. Η εξωτερική παράγωγος ενός αντικειμένου A^a, για παράδειγμα, ορίζεται ως:

$$\left(dA^a\right)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a. \tag{1.57}$$

Ο τανυστής torsion ως 2-μορφή

Έχοντας πει τα παραπάνω, η εξαγωγή της διαφορικής μορφής του τανυστή torsion μπορεί να βρεθεί με συνεπή τρόπο μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου των vierbeins. Από το tetrad postulate [σχ. (1.54)] έχουμε:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[\mu} e_{\nu]}{}^a &= \nabla_\mu e_\nu{}^a - \nabla_\nu e_\mu{}^a = 0 \\
\Rightarrow \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e_\lambda{}^a &- \partial_\nu e_\mu{}^a - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} e_\lambda{}^a = 0 \\
\overset{(1.30)}{\Rightarrow} e_\lambda{}^a T^\lambda{}_{\nu\mu} + \partial_\mu e_\nu{}^a &- \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b = 0 \\
\Rightarrow T^a{}_{\nu\mu} + \left(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a\right) &+ \left(\omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Το πεδίο vierbein και το spin connection μπορούν να γραφούν πλέον, ως 1-μορφές, με τον εξής τρόπο:

$$e^a = e_\mu{}^a dx^\mu, \tag{1.59}$$

και
$$\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b dx^\mu \tag{1.60}$$
αντίστοιχα. Επιπλέον, θεωρούμε και το εξωτερικό γινόμενο (wedge product) μεταξύ δύο 1-μορφών, A και B, ως

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - B_\mu A_\nu. \tag{1.61}$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (1.59), (1.60) και (1.61), μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία ισότητα της (1.58) ως

$$(T^a)_{\mu\nu} = (de^a)_{\mu\nu} + \left(\omega^a{}_b \wedge e^b\right)_{\mu\nu} \tag{1.62}$$

και παραλείποντας τους ελληνικούς δείκτες, οδηγούμαστε στην έκφραση του τανυστή torsion ως 2-μορφή:
$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b. \tag{1.63}$$

Ο τανυστής καμπυλότητας ως 2-μορφή

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην εξαγωγή της σχέσης που δίνει τον τανυστή καμπυλότητας σαν 2-μορφή ακολουθώντας ακριβώς την ίδια λογική που ακολουθήθηκε στην παράγραφο 1.2.3. Ξεκινούμε και πάλι θεωρώντας τη δράση του μεταθέτη $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ της συναλλοίωτης παραγώγου, μόνο που αυτή τη φορά όχι πάνω σε διάνυσμα, αλλά πάνω στο vierbein:
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \, e_\rho{}^d \overset{(1.54)}{=} 0, \tag{1.64}$$
από την οποία σχέση, μετά από απλοποιήσεις, και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή καμπυλότητας Riemann [σχ. (1.37)] οδηγούμαστε στην

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b \,, \tag{1.65}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχ. (1.59), (1.60), καθώς και την

$$(d\omega^a{}_b)_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b \,, \tag{1.66}$$

οδηγούμαστε στην
$$(R^a{}_b)_{\mu\nu} = (d\omega^a{}_b)_{\mu\nu} + (\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b)_{\mu\nu} \ , \tag{1.67}$$
από όπου παραλείποντας τους ελληνικούς δείκτες οδηγούμαστε στην τελική έκφραση του τανυστή καμπυλότητας ως 2-μορφή:

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \,. \tag{1.68}$$

Όπως γίνεται φανερό από την προηγούμενη σχέση, η 2-μορφή της καμπυλότητας προκύπτει, κατά αναλογία με τον τανυστή καμπυλότητας Riemann, αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή των δεικτών της.

Οι σχέσεις (1.63) και (1.68) ονομάζονται εξισώσεις δομής Cartan (Cartan structure equations), και εκφράζουν τους τελεστές tosrion και καμπυλότητας ως 2-μορφές.

1.3 Η δράση Palatini

Προκειμένου να ορισθεί μία νέα δράση, η οποία θα είναι σύμφωνη με τον φορμαλισμό τον οποίο έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα, θεωρούμε την ακόλουθη έκφραση

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{2}\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} \,, \tag{1.69}$$

όπου ϵ_{abcd} είναι το σύμβολο Levi - Civita στις 4 διαστάσεις. Για την παραπάνω έκφραση στη συνέχεια θα αποδειχθεί, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των διαφορικών μορφών, πως είναι ισοδύναμη με τη δράση Einstein - Hilbert που παρατίθεται στη σχ. (1.42).

Κάνοντας χρήση του τελεστή star (χάρτης δυϊκότητας Hodge)[5] για τις 1-μορφές e^a, e^b, οδηγούμαστε στη σχέση

$$\begin{aligned} *\left(e^a \wedge e^b\right) &= \frac{1}{(d-2)!}\epsilon^{ab}{}_{cd}\, e^c \wedge e^d \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}\, e^c \wedge e^d \,, \end{aligned} \tag{1.70}$$

σύμφωνα με την οποία η σχέση (1.69) γράφεται

$$\mathcal{S} = \int R^{ab} \wedge *\left(e_a \wedge e_b\right) \,. \tag{1.71}$$

Γράφοντας τώρα την 2-μορφή καμπυλότητας ως

$$\begin{aligned} R^{ab} &= \frac{1}{2}\left(R^{ab}\right)_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} e^c{}_\mu e^d{}_\nu \left(R^{ab}\right)_{cd} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &\overset{(1.15)}{=} \frac{1}{2}\left(R^{ab}\right)_{cd} e^c \wedge e^d \,, \end{aligned} \tag{1.72}$$

και αντικαθιστώντας στην (1.71), έχουμε:

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{2}\left(R^{ab}\right)_{cd} e^c \wedge e^d \wedge *\left(e_a \wedge e_b\right) \,, \tag{1.73}$$

όπου ο όρος $e^c \wedge e^d \wedge *\left(e_a \wedge e_b\right)$ ορίζει το εσωτερικό γινόμενο $\left\langle e^c \wedge e^d \,, e_a \wedge e_b \right\rangle$ μεταξύ του $e^c \wedge e^d$ και του $e_a \wedge e_b$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{2}\left(R^{ab}\right)_{cd} \left\langle e^c \wedge e^d \,, e_a \wedge e_b \right\rangle \epsilon \,, \tag{1.74}$$

όπου ϵ είναι η μορφή όγκου (volume form), η οποία ισούται με $\sqrt{-g}d^4x$, και τελικά οδηγούμαστε στη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \frac{1}{2}\left(R^{ab}\right)_{cd} 2\left(\delta^c_a\delta^d_b - \delta^c_b\delta^d_a\right) \epsilon \\ &= \int \left(R^{ab}\right)_{ab} \epsilon = \int d^4x\sqrt{-g}R. \end{aligned} \tag{1.75}$$

[5] βλ. Παράρτημα Β΄

Έγινε φανερό, λοιπόν, το πως ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.69) φτάσαμε στο ολοκλήρωμα της σχέσης (1.42), που περιγράφει την δράση Einstein - Hilbert. Τέλος, καταλήγουμε στην ολοκληρωμένη έκφραση της δράσης πολλαπλασιάζοντας το ολοκλήρωμα (1.69) με τη σταθερά που περιέχεται στη δράση Einstein - Hilbert, παίρνοντας έτσι την

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} \,. \tag{1.76}$$

Η τελευταία δράση ονομάζεται δράση Palatini ή αλλιώς φορμαλισμός πρώτης τάξης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, αφού περιέχει όρους του vierbein και του spin connection καθώς και μέχρι την παραγώγους πρώτης τάξης αυτού. Σε αντίθεση με αυτή, η δράση Einstein - Hilbert (1.42), ονομάζεται και φορμαλισμός δεύτερης τάξης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, αφού περιέχει όρους της μετρικής, καθώς και όρους δεύτερης τάξης ως προς αυτή (βαθμωτό Ricci). Παρά την διαφορά αυτή όμως, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω, οι δύο δράσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, καθώς, εκτός του ότι με κατάλληλους χειρισμούς μπορούμε να περάσουμε από την έκφραση της μίας στην άλλη, ελαχιστοποιώντας τη δράση Palatini ως προς το spin connection οδηγούμαστε στη σχέση

$$D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a = 0, \tag{1.77}$$

όπου D η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς το spin connection. Η παραπάνω σχέση δίνει την πληροφορία πως το spin connection ω που ικανοποιεί το metric compatibility είναι επίσης torsion free. Ελαχιστοποιώντας, τώρα, την (1.76) ως προς το vierbein οδηγούμαστε στη σχέση

$$e^\nu{}_a = R_{\mu\nu}{}^a{}_b = 0, \tag{1.78}$$

σύμφωνα με την οποία μηδενίζεται ο τανυστής Ricci, σχέση απολύτως ισοδύναμη με τις εξισώσεις κίνησης (1.43), στις οποίες μας οδηγεί και η δράση Einstein - Hilbert.

Η δράση Palatini είναι πολύ χρήσιμη, μιας και η «γλώσσα» στην οποία είναι γραμμένη, μας επιτρέπει να συζεύξουμε φερμιόνια στη βαρυτική θεωρία, τα οποία εκφράζονται μέσω σπινόρων. Επίσης, ο φορμαλισμός πρώτης τάξης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας παίζει καθοριστικό ρόλο στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, αφού αυτός επιστρατεύεται προκειμένου να δομηθεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ως Θεωρία Βαθμίδας.

Κεφάλαιο 2

Η Τρισδιάστατη και Τετραδιάστατη Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας

Η γενική ιδέα πίσω από την προσπάθεια να διατυπωθεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ως θεωρία βαθμίδας, είναι η θεώρηση του vielbein[1] $e_\mu{}^a$ και του spin connection $\omega_\mu{}^a{}_b$ ως ένα πεδίο βαθμίδας (gauge field) της ομάδας $ISO\,(d-1,\,1)$. Το spin connection θα παίζει το ρόλο του πεδίου βαθμίδας υπεύθυνο για τις στροφές και τις προώσεις (μετασχηματισμούς Lorentz), ενώ το vielbein το ρόλο του πεδίου βαθμίδας για τις μετατοπίσεις (translations), και ακολουθώντας το συλλογισμό αυτό, η Γενική Σχετικότητα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως θεωρία βαθμίδας της ομάδας $ISO\,(d-1,\,1)$.

Στην παράγραφο αυτή θα συζητηθεί το πώς είναι δυνατόν, με κατάλληλες θεωρήσεις, να φανεί η αναλογία μεταξύ της Γενικής Σχετικότητας όπως έχει διατυπωθεί στην προηγούμενη παράγραφο (με χρήση του vielbein και του spin connection) και κατάλληλων θεωριών βαθμίδας. Όπως θα γίνει φανερό παρακάτω, η τετραδιάστατη βαρύτητα αποτελεί πιο περίπλοκη περίπτωση σε σχέση με το τρισδιάστατο ανάλογό της, του οποίου η δράση προκύπτει ευθέως ανάλογη με δράση θεωρίας βαθμίδας.

2.1 Η Τρισδιάστατη Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας

Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη της σχέσης της τρισδιάστατης βαρύτητας με κάποια θεωρία βαθμίδας. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μελέτη αυτή, θα πρέπει να «επιστρατευτεί» το τρισδιάστατο ανάλογο του φορμαλισμού vierbein που αναπτύχθηκε

[1] Το vielbein στα γερμανικά σημαίνει «πολύποδος» και αποτελεί γενίκευση του vierbein σε n διαστάσεις.

στην προηγούμενη παράγραφο, ή με άλλα λόγια ο φορμαλισμός dreibein[2].

Στην τρισδιάστατη περίπτωση και σύμφωνα με το φορμαλισμό dreibein [4, 5], το spin connection επαναορίζεται ως

$$\omega_\mu{}^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{\mu bc}, \tag{2.1}$$

σύμφωνα με το οποίο προκύπτουν και οι ανάλογες εκφράσεις των τανυστών στρέψης (1.63) και καμπυλότητας (1.68) ως 2-μορφές, στις 3 διαστάσεις ως

$$T_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}e_{\nu c} - \partial_\nu e_\mu{}^a + \epsilon^{abc}e_{\mu b}\omega_{\nu c} \tag{2.2}$$

και

$$R_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu\omega_\nu{}^a - \partial_\nu\omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}\omega_{\nu c} \tag{2.3}$$

αντίστοιχα. Δεδομένων των παραπάνω, η δράση Einstein - Hilbert απουσία ύλης - ενέργειας και κοσμολογικής σταθεράς γράφεται ως

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G}\int \epsilon^{\mu\nu\lambda}e_\mu{}^a\left(\partial_\nu\omega_{\lambda a} - \partial_\lambda\omega_{\nu a} + \epsilon_{abc}\omega_\nu{}^b\omega_\lambda{}^c\right). \tag{2.4}$$

Αντίστοιχα με την τετραδιάστατη περίπτωση [σχ. (1.71)], η ελαχιστοποίηση της δράσης (2.4) ως προς το spin connection οδηγεί και πάλι στο torsionless condition:

$$D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}e_{\nu c} - \partial_\nu e_\mu{}^a - \epsilon^{abc}\omega_{\nu b}e_{\mu c} = T_{\mu\nu}{}^a = 0, \tag{2.5}$$

όπου D η συναλλοίωτη παράγωγος μόνο ως προς το spin connection, η δράση της οποίας πάνω στο dreibein δίνεται προφανώς από την εξής σχέση:

$$D_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}e_{\nu c}. \tag{2.6}$$

Ομοίως, η ελαχιστοποίηση της (2.4) ως προς το dreibein, οδηγεί στη σχέση

$$\partial_\nu\omega_{\lambda a} - \partial_\lambda\omega_{\nu a} + \epsilon_{abc}\omega_\nu{}^b\omega_\lambda{}^c = R_{\nu\lambda a} = 0, \tag{2.7}$$

η οποία όπως σχολιάστηκε και παραπάνω, είναι ισοδύναμη με τις πεδιακές εξισώσεις Einstein εν κενώ και απουσία κοσμολογικής σταθεράς.

Παρατηρούμε τώρα, πως εάν ερμηνεύσουμε τα dreibein και spin connection ως ένα ενιαίο πεδίο βαθμίδας A, τότε η δράση παίρνει τη μορφή $AdA + A^3$, η οποία είναι η γενική μορφή μίας Chern-Simons 3-μορφής στην τρισδιάστατη περίπτωση. Παρά το ότι η παραπάνω παρατήρηση παραπέμπει προς το συσχετισμό της τρισδιάστατης βαρύτητας με μία θεωρία βαθμίδας Chern-Simons, πρωτού προχωρήσουμε θα πρέπει να προσδιοριστεί μία κατάλληλη ομάδα βαθμίδας, εντός της οποίας θα ορίζεται μία δράση που θα έχει τη μορφή συναρτησιοειδούς Chern-Simons, και η οποία μάλιστα θα συμπίπτει με την τρισδιάστατη δράση Einstein-Hilbert (2.4). Με άλλα λόγια, θα πρέπει να αποδειχθεί πως εντός της κατάλληλης ομάδας βαθμίδας, υπάρχει μία αναλλοίωτη και μη-εκφυλισμένη μετρική.

[2]Σε αναλογία με προηγουμένως, dreibein στα γερμανικά σημαίνει «τρίποδος» και προφανώς αποτελεί ειδική περίπτωση του vielbein στις τρεις διαστάσεις.

Είναι φυσικό κανείς να στραφεί αρχικά στη γενική περίπτωση των ομάδων ISO$(d-1,1)$ ως υποψήφιες ομάδες βαθμίδας[3]. Στις ομάδες αυτές οι γεννήτορες Lorentz (προώσεις και στροφές) είναι οι J^{ab}, ενώ οι γεννήτορες των μετατοπίσεων είναι οι P^a, όπου τα a, b παίρνουν τιμές από 1 έως d. Μία Lorentz αναλλοίωτη έκφραση ως προς τους παραπάνω γεννήτορες θα πρέπει να έχει τη γενική μορφή $W = xJ_{ab}J^{ab} + yP_aP^a$, με x, y σταθερές, όμως υπό την απαίτηση το W να μετατίθεται με το P^b, προκύπτει πως $x = 0$. Επομένως γίνεται προφανές πως δεν γίνεται να ορισθεί μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή, και άρα Chern-Simons 3-μορφή για την ISO$(d-1,1)$ στην γενική περίπτωση των d διαστάσεων.

Από την άλλη μεριά, συγκεκριμένα στις 3 διαστάσεις, οι γεννήτορες Lorentz J^{ab} στην ομάδα ISO(2,1), οι οποίοι γράφονται με δύο δείκτες, μπορούν να αντικατασταθούν από την έκφραση $J^c = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{ab}$, και άρα να χρειάζονται μόνον ένα δείκτη σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση των d διαστάσεων. Δεδομένης της παραπάνω παρατήρησης, στην ειδική αυτή περίπτωση μία Lorentz αναλλοίωτη, διγραμμική έκφραση θα μπορεί να γραφεί και ως $W = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{ab}P_c = J^aP_a$. Πιο συγκεκριμένα, για $d = 3$ υπάρχει μια τετραγωνική και μη-εκφυλισμένη μορφή (μετρική) η οποία γράφεται ως:

$$\begin{aligned} tr\,(J_a, P_b) &= \delta_{ab} \\ tr\,(J_a, J_b) = tr\,(P_a, P_b) &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

όπου οι γεννήτορες $J^c = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{ab}$ μαζί με τους γεννήτορες των μετατοπίσεων P^a αποτελούν τους 6 γεννήτορες της ομάδας ISO(2,1). Επίσης, οι σχέσεις μετάθεσης της ISO(2,1) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= \epsilon_{abc}J^c \\ [J_a, P_b] &= \epsilon_{abc}P^c \\ [P_a, P_b] &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Προχωρώντας λοιπόν στη θεμελίωση μίας θεωρίας βαθμίδας στην ISO(2,1), το πεδίο βαθμίδας θα είναι μία 1-μορφή η οποία θα παίρνει τιμές από την ISO(2,1), θα αναπτύσσεται πάνω στου γεννήτορές της συναρτήσει και των dreibein και spin connection ως:

$$A_\mu(x) = e_\mu{}^a(x)P_a + \omega_\mu{}^a(x)J_a. \tag{2.10}$$

Όπως είναι προφανές από την παραπάνω έκφραση, το dreibein σχετίζεται με τις μετατοπίσεις, ενώ το spin connection με τις στροφές και τις προώσεις. Επίσης, μία απειροστή παράμετρος βαθμίδας $\xi = \xi(x)$, θα αναλύεται επί των γεννητόρων της ISO(2,1) ως:

$$\xi(x) = \rho^a(x)P_a + \tau^a(x)J_a \tag{2.11}$$

όπου $\rho^a(x), \tau^a(x)$ απειροστές παράμετροι. Σύμφωνα με την παράμετρο ξ, η μεταβολή του A_μ κάτω από μετασχηματισμό βαθμίδας θα πρέπει να είναι

$$\delta A_\mu = -\tilde{D}_\mu\xi, \tag{2.12}$$

[3]Αφού οι ομάδες ISO$(d-1,1)$ περιγράφουν τς συμμετρίες χωροχρόνων Minkowski διάστασης d.

όπου $\tilde{D}_\mu$ η συναλλοίωτη παράγωγος, της οποίας η έκφραση θα είναι εξ΄ ορισμού

$$\tilde{D}_\mu \xi = \partial_\mu \xi + [A_\mu, \xi] . \tag{2.13}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εκφράσεις (2.10) και (2.11) στην έκφραση της μεταβολής του πεδίου βαθμίδας (2.12) και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις μετάθεσης (2.9), οδηγούμαστε στις εκφράσεις για τη μεταβολή των πεδίων dreibein και spin connection:

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^a &= -\partial_\mu \rho^a - \epsilon^{abc} e_{\mu b} \tau_c - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \rho_c, \\ \delta \omega_\mu{}^a &= -\partial_\mu \tau^a - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Είναι δυνατόν πλέον, υπολογίζοντας, κατά τα γνωστά, το μεταθέτη της συναλλοίωτης παραγώγου να βρούμε την έκφραση του τανυστή δύναμης πεδίου[4] (σε πλήρη αναλογία με τον τανυστή καμπυλότητας):

$$R_{\mu\nu} = \left[\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu\right] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] , \tag{2.15}$$

όπου αντικαθιστώντας την έκφραση του πεδίου βαθμίδας A_μ (2.10), ο παραπάνω τανυστής θα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = &\left[\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} e_{\nu c} - \omega_{\nu b} e_{\mu c}\right)\right] P_a \\ &+ \left(\partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \omega_{\nu c}\right) J_a. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ο τανυστής αυτός θα παίρνει τιμές από την ISO(2,1), και επομένως θα αναπτύσσεται επί των γεννητόρων της ως

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^a(x) P_a + R_{\mu\nu}{}^a(x) J_a \tag{2.17}$$

και συγκρίνοντας την παραπάνω με την σχέση (2.16), οδηγούμαστε στη μορφή των $T_{\mu\nu}{}^a$ και $R_{\mu\nu}{}^a$:

$$T_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} e_{\nu c} - \omega_{\nu b} e_{\mu c}\right) \tag{2.18}$$

$$R_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \omega_{\nu c}, \tag{2.19}$$

από όπου γίνεται φανερό πως οι τανυστές αυτοί ταυτίζονται με τις 2-μορφές στρέψης (2.2) και καμπυλότητας (2.3) στις 3 διαστάσεις αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τα πραπάνω λοιπόν, ακολουθεί η εύρεση της κατάλληλης δράσης. Δεδομένων των όσων συζητήθηκαν σε αυτήν την παράγραφο, η ζητούμενη δράση θα δίνεται από μια 3-μορφή Chern-Simons και επομένως θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_M tr \left(A \wedge dA + A \wedge A \wedge A\right) \\ &= \int_M tr A_\mu \left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu + [A_\nu, A_\lambda]\right) \epsilon^{\mu\nu\lambda} \end{aligned} \tag{2.20}$$

[4]Field strength tensor.

και αντικαθιστώντας την έκφραση του A_μ (2.10), κατόπιν της δράσης του ίχνους στους γεννήτορες της ISO(1,2), η παραπάνω δράση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int_M \epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\mu{}^a \big[&\left(\partial_\nu \omega_{\lambda a} - \partial_\lambda \omega_{\nu a} + \epsilon_{abc} \omega_\nu{}^b \omega_\lambda{}^c\right) \\ &+ \left(\partial_\nu e_{\lambda a} - \partial_\lambda e_{\nu a} + \epsilon_{abc}\left(\omega_\nu{}^b e^c_\lambda + \omega_\lambda{}^c e^b_\nu\right)\right)\big] \,.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Στην παραπάνω έκφραση ο πρώτος όρος ταυτίζεται με την 2-μορφή καμπυλότητας (2.3), ενώ ο δεύτερος όρος με τη 2-μορφή στρέψης (2.2). Προκειμένου η τελική δράση να είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς Lorentz της ομάδας ISO(1,2), στο σημείο αυτό πρέπει να απαιτηθεί η συνθήκη μηδενικής στρέψης, σύμφωνα με την οποία ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και η παραπάνω δράση παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{S} = \int_M \epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\mu{}^a \left(\partial_\nu \omega_{\lambda a} - \partial_\lambda \omega_{\nu a} + \epsilon_{abc} \omega_\nu{}^b \omega_\lambda{}^c\right) . \tag{2.22}$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφερθεί πως η παραπάνω δράση, δεδομένης της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για τη εξαγωγή της, θα είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής (2.14).

Η δράση (2.22) προφανώς ταυτίζεται με την (2.4), ενώ η ελαχιστοποίησή της ως προς το πεδίο e οδηγεί στη σχέση $R_{\nu\lambda a} = 0$ η οποία δεν είναι άλλη από την εξίσωση κίνησης (2.7), που προκύπτει από τη δράση (2.4), ή αλλιώς οι πεδιακές εξισώσεις Einstein εν κενώ και απουσία κοσμολογικής σταθεράς. Αντίστοιχα, ελαχιστοποίηση ως προς το ω, θα επιστρέψει τη συνθήκη μηδενικής στρέψης, η οποία απαιτήθηκε κατά την εξαγωγή της δράσης (2.22). Επομένως, στο σημείο αυτό θα μπορούσε κανείς να πει πως ουσιαστικά η $(2+1)$-διάστατη βαρύτητα μπορεί να ερμηνευθεί ως μια θεωρία βαθμίδας Chern-Simons.

Όμως, με μια πιο προσεκτική ματιά, απομένει ακόμα ένα ζήτημα να συζητηθεί προτού η παραπάνω μελέτη θεωρηθεί ολοκληρωμένη: οι νόμοι μετασχηματισμών (2.14) δεν συμπίπτουν με τους συνήθεις μετασχηματισμούς της 3-διάστατης βαρύτητας. Παρόλο που ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος των σχέσεων (2.14) δεν αποτελεί πρόβλημα, μιας και αμέσως γίνεται αντιληπτό πως πρόκειται για τοπικό μετασχηματισμό Lorentz, καθώς η παράμετρος τ έχει συσχετισθεί με το γεννήτορα Lorentz J, οι υπόλοιποι όροι δεν μπορούν να αναγνωρισθούν με μία πρώτη ματιά. Όπως θα φανεί παρακάτω, όμως, είναι δυνατόν να συσχετισθούν οι όροι αυτοί με διαφορομορφισμούς, οι οποίοι είναι ουσιαστικά ισοδύναμοι με μετασχηματισμούς συντεταγμένων και επομένως δεν θα αποτελούν πρόβλημα στη θεωρία.

Αρχικά θεωρούνται οι μετασχηματισμοί των πεδίων dreibein και spin connection κάτω από διαφορομορφισμό που παράγεται από ένα διανυσματικό πεδίο υ^ν. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, οι οποίοι συμβολίζονται ως $\tilde{\delta} e_\mu{}^a$ και $\tilde{\delta} \omega_\mu{}^a$, θα δίνονται από τη παράγωγο Lie στη διεύθυνση του $-\upsilon^\nu$ και θα έχουν την έκφραση:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} e_\mu{}^a &= \mathcal{L}_{-\upsilon} e_\mu{}^a = -\upsilon^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a - e_\nu{}^a \partial_\mu \upsilon^\nu = -\upsilon^\nu\left(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a\right) - \partial_\mu\left(e_\nu{}^a \upsilon^\nu\right) \\ \tilde{\delta} \omega_\mu{}^a &= \mathcal{L}_{-\upsilon} \omega_\mu{}^a = -\upsilon^\nu \partial_\nu \omega_\mu{}^a - \omega_\nu{}^a \partial_\mu \upsilon^\nu = -\upsilon^\nu\left(\partial_\nu \omega_\mu{}^a - \partial_\mu \omega_\nu{}^a\right) - \partial_\mu\left(\omega_\nu{}^a \upsilon^\nu\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

Εάν τώρα θεωρηθεί $\rho^a = e_\nu{}^a \upsilon^\nu$ και $\tau^a = \omega_\nu{}^a \upsilon^\nu$, και υπολογισθεί η διαφορά μεταξύ των (2.23) και (2.14), έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} e_\mu{}^a - \delta e_\mu{}^a =& - \upsilon^\nu \left(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a\right) - \partial_\mu \left(e_\nu{}^a \upsilon^\nu\right) \\ &+ \partial_\mu \left(e_\nu{}^a \upsilon^\nu\right) + \epsilon^{abc} e_{\mu b} \omega_{\nu c} \upsilon^\nu + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} e_{\nu c} \upsilon^\nu \\ =& - \upsilon^\nu \left(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a + \epsilon^{abc} \omega_{\nu b} e_{\mu c} - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} e_{\nu c}\right) \\ =& - \upsilon^\nu \left(D_\nu e_\mu{}^a - D_\mu e_\nu{}^a\right),\end{aligned} \tag{2.24}$$

όπου D η συναλλοίωτη παράγωγος (2.6), ως προς το spin connection. Προφανώς, η παραπάνω διαφορά μηδενίζεται από τη συνθήκη μηδενικής στρέψης, η οποία προκύπτει μεν σαν εξίσωση κίνησης (2.5) από την ελαχιστοποίηση της δράσης (2.4), έχει απαιτηθεί δε κατά την εξαγωγή της δράσης (2.22).
Θεωρώντας και πάλι $\tau^a = \omega_\nu{}^a \upsilon^\nu$, και υπολογίζοντας τη διαφορά μεταξύ $\tilde{\delta}\omega_\mu{}^a$ και $\delta\omega_\mu{}^a$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} \omega_\mu{}^a - \delta \omega_\mu{}^a =& - \upsilon^\nu \left(\partial_\nu \omega_\mu{}^a - \partial_\mu \omega_\nu{}^a\right) - \partial_\mu \left(\omega_\nu{}^a \upsilon^\nu\right) \\ &+ \partial_\mu \left(\omega_\nu{}^a \upsilon^\nu\right) + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \omega_{\nu c} \upsilon^\nu \\ =& \upsilon^\nu \left(\partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \omega_{\nu c}\right) \\ =& \upsilon^\nu R_{\mu\nu}{}^a,\end{aligned} \tag{2.25}$$

όπου αντίστοιχα με την προηγούμενη διαφορά, έτσι κι αυτή μηδενίζεται όταν το $R_{\mu\nu}{}^a = 0$, συνθήκη η οποία προκύπτει ως εξίσωση κίνησης από τη δράση (2.4) και η οποία ταυτίζεται με τις πεδιακές εξισώσεις (2.7).
Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν γίνεται φανερό το πώς οι νόμοι μετασχηματισμών (2.14) ταυτίζονται με μετασχηματισμούς βαθμίδας on-shell, δηλαδή στην περίπτωση που ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη δράση (2.22) της θεωρίας. Ως εκ τούτου επιβεβαιώνεται το ότι η $(2+1)$-διάστατη βαρύτητα είναι ισοδύναμη με μία θεωρία βαθμίδας Chern-Simons, ενώ η κατάλληλη ομάδα επί της οποίας μπορεί να θεμελιωθεί είναι, πράγματι, η $\mathrm{ISO}(2,1)$.

2.1.1 Η περίπτωση της μη μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς

Η μελέτη που έχει προηγηθεί αναφέρεται εξ' ολοκλήρου στην ειδική περίπτωση όπου η κοσμολογική σταθερά είναι μηδενική. Στην εξής παράγραφο, για λόγους πληρότητας, θα μελετηθεί εν συντομία η γενικότερη περίπτωση όπου συμπεριλαμβάνεται στη θεωρία μη μηδενική κοσμολογική σταθερά. Η γενικευμένη δράση, που θα συμπεριλαμβάνει πλέον και τη κοσμολογική σταθερά, θα είναι πανομοιότυπη με τη δράση (2.22) της προηγούμενης ειδικότερης περίπτωσης, εκτός από την προσθήκη ενός όρου εντός του ολοκληρώματος, θα έχει δε την έκφραση [4]:

$$\mathcal{S} = \int_M \epsilon^{\mu\nu\kappa} e_\mu{}^a \left(\partial_\nu \omega_{\kappa a} - \partial_\kappa \omega_{\nu a} + \epsilon_{abc} \omega_\nu{}^b \omega_\kappa{}^c + \frac{1}{3} \lambda \epsilon_{abc} e_\nu{}^b e_\kappa{}^c\right). \tag{2.26}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την παραπάνω δράση γίνεται φανερό πως ο χωρόχρονος πλέον δεν είναι επίπεδος, αλλά έχει καμπυλότητα ανάλογη της σταθεράς λ. Επομένως δεν αποτελεί μέρος του χωροχρόνου Minkowski, αλλά ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς, θα είναι είτε τρισδιάστατος de Sitter (για $\lambda > 0$) είτε τρισδιάστατος anti-de Sitter (για $\lambda < 0$). Οι χώροι αυτοί δεν θα έχουν ομάδα συμμετριών την $\mathrm{ISO}(2,1)$, αλλά τις $\mathrm{SO}(3,1)$ και $\mathrm{SO}(2,2)$, αντίστοιχα. Με την ίδια λογική, λοιπόν, με την οποία η τρισδιάστατη βαρύτητα συσχετίστηκε με θεωρία βαθμίδας στην $\mathrm{ISO}(2,1)$, οι δύο παραπάνω ομάδες είναι οι προφανείς επιλογές για ομάδες βαθμίδας στην περίπτωση που η κοσμολογική σταθερά είναι μη μηδενική.

Αρχικά οι σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων (2.9) παίρνουν πλέον την πιο γενική μορφή

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= \epsilon_{abc} J^c \\ [J_a, P_b] &= \epsilon_{abc} P^c \\ [P_a, P_b] &= \lambda \epsilon_{abc} J^c. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Με ακριβώς όμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η μεταβολή των πεδίων dreibein και spin connection (2.14) θα γράφεται πλέον ως

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^a &= -\partial_\mu \rho^a - \epsilon^{abc} e_{\mu b} \tau_c - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \rho_c, \\ \delta \omega_\mu{}^a &= -\partial_\mu \tau^a - \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c - \lambda \epsilon^{abc} e_{\mu b} \rho_c, \end{aligned} \tag{2.28}$$

και σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς αυτούς, καθώς και τις γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης (2.27), ο τανυστής (2.16) θα αντικατασταθεί από τον

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = &\left[\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} e_{\nu c} - \omega_{\nu b} e_{\mu c}\right)\right] P_a \\ &+ \left[\partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} \omega_{\nu c} + \lambda e_{\mu b} e_{\nu c}\right)\right] J_a, \end{aligned} \tag{2.29}$$

από τον οποίο θα προκύπτουν οι εκφράσεις για τις 2-μορφές στρέψης και καμπυλότητας

$$T_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} e_{\nu c} - \omega_{\nu b} e_{\mu c}\right) \tag{2.30}$$

$$R_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^{abc} \left(\omega_{\mu b} \omega_{\nu c} + \lambda e_{\mu b} e_{\nu c}\right) \tag{2.31}$$

αντίστοιχα.

Τέλος, οι εξισώσεις κίνησης που θα προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της δράσης (2.26) ως προς τα e και ω θα οδηγούν στο μηδενισμό του τανυστή (2.29): ο μηδενισμός του πρώτου μέρους θα είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη μηδενικής στρέψης, ενώ ο μηδενισμός του δεύτερου θα είναι ισοδύναμος με τις πεδιακές εξισώσεις Einstein εν κενώ, παρουσία όμως κοσμολογικής σταθεράς.

2.2 Η Τετραδιάστατη Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας

Ξεκινώντας, όπως και στην τρισδιάστατη περίπτωση, προκειμένου να κατασκευαστεί θεωρία βαθμίδας της τετραδιάστατης βαρύτητας, θα πρέπει να «επιστρατευτεί» ο φορμαλισμός vierbein ο οποίος αναπτύχθηκε στην παράγραφο 1.1. Όπως δείχθηκε και προηγουμένως, σύμφωνα με το φορμαλισμό αυτό, η δράση η οποία περιγράφει την τετραδιάστατη βαρύτητα Einstein είναι η δράση Palatini (1.76). Εάν κανείς θεωρήσει τα πεδία vierbein και spin connection ως πεδία βαθμίδας A, όπως στην διαδικασία που ακολουθήθηκε στην τρισδιάστατη περίπτωση, φαίνεται πως η γενική μορφή της δράσης Palatini θα είναι $A \wedge A \wedge (dA + A^2)$ και τέτοιου είδους δράση δεν μπορεί να προκύψει από κάποια θεωρία βαθμίδας με άμεσο τρόπο. Επομένως, είναι αδύνατο να ακολουθήσει κανείς ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε στην τρισδιάστατη περίπτωση, για την κατασκευή θεωρίας βαθμίδας της τετραδιάστατης βαρύτητας, μιας και πλέον η δράση δεν έχει γενική μορφή που μπορεί να προκύψει αμέσως από κάποια θεωρία βαθμίδας[5]. Παρόλα αυτά, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, είναι δυνατόν να ανακτηθεί η δράση Einstein-Hilbert μέσω θεωρίας βαθμίδας, με όχι προφανή τρόπο, ξεκινώντας από μια δράση τύπου Yang-Mills.

Σχετικά με τις υποψήφιες ομάδες επί των οποίων θα μπορούσε να κατασκευαστεί κατάλληλη θεωρία βαθμίδας που να περιγράφει την βαρύτητα Einstein, ειδικά για την περίπτωση μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς, η πρώτη ομάδα στην οποία θα στρεφόταν κανείς είναι η $\mathrm{ISO}(3,1)$ ή αλλιώς η ομάδα Poincaré, η οποία είναι η ομάδα συμμετρίας στη σωματιδιακή φυσική που περιέχει μετασχηματισμούς Lorentz καθώς και μετατοπίσεις. Αυτή είναι και η ομάδα που θα χρησιμοποιηθεί αρχικά ως ομάδα βαθμίδας.

Η ομάδα Poincaré αποτελείται από 10 γεννήτορες: έξι για τους μετασχηματισμούς Lorentz M_{ab} και τέσσερις για τις μετατοπίσεις P_a. Οι γεννήτορες αυτοί υπακούν στις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης της $\mathrm{ISO}(3,1)$

$$\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= \eta_{ac} M_{db} - \eta_{bc} M_{da} - \eta_{ad} M_{cb} + \eta_{bd} M_{ca} \\
[P_a, M_{bc}] &= \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b \\
[P_a, P_b] &= 0,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

όπου και πάλι $\eta_{ab} = diag(-1,1,1,1)$ η μετρική Minkowski και $a,b,c,d = 1,\ldots,4$. Το πεδίο βαθμίδας και στην περίπτωση αυτή θα είναι μια 1-μορφή η οποία θα παίρνει τιμές από την $\mathrm{ISO}(3,1)$ και επομένως θα αναπτύσσεται πάνω στους γεννήτορες της ομάδας αυτής συναρτήσει των vierbein και spin connection ως:

$$A_\mu(x) = e_\mu{}^a(x) P_a + \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab}(x) M_{ab}, \tag{2.33}$$

όπου το πεδίο e επισυνάπτεται στις μετατοπίσεις ενώ το ω στους μετασχηματισμούς Lorentz. Μια απειροστή παράμετρος βαθμίδας $\xi = \xi(x)$ θα αναπτύσσεται επίσης επί των γεννητόρων της $\mathrm{ISO}(3,1)$ ως

$$\xi(x) = \rho^a(x) P_a + \tau^{ab}(x) M_{ab} \tag{2.34}$$

με $\rho^a(x)$, $\tau^{ab}(x)$ απειροστές παραμέτρους. Αντίστοιχα με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προυγούμενη παράγραφο, η μεταβολή του πεδίου βαθμίδας A_μ υπό μετασχηματισμό βαθμίδας, σύμφωνα με την απειροστή παράμετρο ξ, θα είναι:

$$\delta A_\mu(x) = A_\mu(x + \xi(x)) - A_\mu(x) = -\tilde{D}_\mu \xi, \tag{2.35}$$

[5] Σε αντίθεση με προηγουμένως, οπού η δράση είχε εξαρχής τη γενική μορφή μιας Chern-Simons 3-μορφής.

όπου εξ' ορισμού

$$\tilde{D}_\mu \xi = \partial_\mu \xi + [A_\mu, \xi] \tag{2.36}$$

η συναλλοίωτη παράγωγος βαθμίδας. Τώρα, κατά τα γνωστά, αντικαθιστώντας τις σχ. (2.33) και (2.34) στην σχ. (2.35) και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις μετάθεσης (2.32), οδηγείται κανείς στις εκφράσεις που θα παίρνουν οι μεταβολές των πεδίων vierbein και spin connection υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας [6]:

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^a &= -\partial_\mu \rho^a - \omega_\mu{}^{ab} \rho_b + e_\mu{}^b \tau^a{}_b \\ \delta \omega_\mu{}^{ab} &= -\partial_\mu \tau^{ab} - \omega_\mu{}^{ac} \tau^b{}_c - \omega_\mu{}^{bc} \tau^a{}_c. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Δεδομένων των παραπάνω, μέσω του μεταθέτη της συναλλοίωτης παραγώγου υπολογίζεται η έκφραση του field strength tensor

$$F_{\mu\nu} = \left[\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu\right] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{2.38}$$

όπου αν αντικατασταθεί η έκφραση του πεδίου βαθμίδας A_μ (2.33) η παραπάνω γράφεται ως:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a - \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} + \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b}\right) P_a \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\mu{}^{ac} \omega_{\nu c}{}^b + \omega_\nu{}^{ac} \omega_{\mu c}{}^b\right) M_{ab}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Αφού όμως ο τανυστής αυτός θα παίρνει τιμές από την ISO$(3,1)$, θα αναπτύσσεται επί των γεννητόρων της ως

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^a P_a + \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab} M_{ab}, \tag{2.40}$$

και συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μεταξύ τους, δίνεται η μορφή των torsion 2-form και curvature 2-form

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^a &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b} \\ R_{\mu\nu}{}^{ab} &= \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac} \omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ac} \omega_{\mu c}{}^b, \end{aligned} \tag{2.41}$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε λοιπόν, πως οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται τις (1.58) και (1.65) που προέκυψαν στο φορμαλισμό vierbein σε προηγούμενη παράγραφο.

Μέχρι το σημείο αυτό έχει μελετηθεί το κινηματικό κομμάτι της θεωρίας (μεταβολές πεδίων) και φαίνεται πως η διαδικασία κατασκευής της θεωρίας βαθμίδας εξελίσσεται ομαλά. Προχωρώντας όμως στην εύρεση της κατάλληλης δράσης για τη θεωρία, γίνεται φανερό πως, όπως σχολιάστηκε και στην παράγραφο 2.1, είναι αδύνατο να προκύψει κατάλληλη δράση από την ομάδα ISO$(3,1)$, μιας και στην ομάδα αυτή δεν γίνεται να ορισθεί κάποια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή (μετρική).

Η εμπειρία μας υποδεικνύει ότι μπορούμε μέσω της δράσης των μετατοπίσεων να συνδέσουμε οποιαδήποτε δύο σημεία στο χωρόχρονο, γεγονός που μας οδηγεί στην πεποίθηση ότι ο χώρος εντός του οποίου ζούμε είναι (έστω κατά προσέγγιση) επίπεδος. Είναι γνωστό βέβαια, πως αυτό δεν είναι εξ' ολοκλήρου αλήθεια, μιας και είναι δυνατόν ο χώρος εν γένει να είναι καμπύλος, αλλά με ακτίνα καμπυλότητας τόσο μεγάλη, ώστε σχεδόν να μην μπορούμε να παρατηρήσουμε την απόκλιση από το επίπεδο. Δεδομένου αυτού λοιπόν, υπάρχει μεν η απαίτηση της αναλλοιωτότητας της επιθυμητής δράσης κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, όχι όμως και κάτω από την ολική συμμετρία Poincaré. Προκειμένου λοιπόν να βρεθεί η κατάλληλη δράση για τη θεωρία βαθμίδας, στο [7] προτείνεται η εξής εναλλακτική: Να ξεκινήσει κανείς από μία δράση τύπου Yang-Mills από κάποια ομάδα, η οποία θα περιέχει τόσο την $\mathrm{SO}(3,1)$ όσο και κάποιες συμμετρίες ανάλογες των μετατοπίσεων, και στη συνέχεια, μέσω της εισαγωγής ενός βαθμωτού πεδίου στη θεωρία, να επιβληθεί αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας από την ομάδα αυτή στην $\mathrm{SO}(3,1)$, προκειμένου με τον τρόπο αυτό να μειωθούν οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας. Οι τρεις μικρότερες, μη-τετριμμένες υποψήφιες ομάδες είναι οι:

- $\mathrm{ISO}(3,1)$, ομάδα Poincaré
- $\mathrm{SO}(4,1)$, de Sitter
- $\mathrm{SO}(3,2)$, anti-de Sitter.

Από τις παραπάνω ομάδες, θα προτιμούσε κανείς την dS (de Sitter) ή την adS (anti-de Sitter), μιας και αποτελούν semisimple (ημι-απλές) ομάδες[6], σε αντίθεση με την Poincaré[7]. Οι semisimple ομάδες προτιμώνται επειδή διαθέτουν ένα αναλλοίωτο στοιχείο (μετρική) το οποίο χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των κινητικών όρων των πεδίων βαθμίδας [8]. Επομένως, η ομάδα βαθμίδας που θα επιλεγεί, δηλαδή η ομάδα η οποία θα περιγράφει τις συμμετρίες βαθμίδας της Yang-Mills δράσης από την οποία ξεκινούμε, θα είναι η anti-de Sitter ομάδα $\mathrm{SO}(3,2)$. Η ομάδα $\mathrm{SO}(3,2)$ έχει μεν το ίδιο πλήθος γεννητόρων με την $\mathrm{ISO}(3,1)$, ενώ παράλληλα, ως semisimple ομάδα έχει την εξής επιθυμητή ιδιότητα: όλοι οι γεννήτορές της μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα ενιαίο πεδίο βαθμίδας το ${\omega_\mu}^{AB} = -{\omega_\mu}^{BA}$, με $A, B = 1, \ldots, 5$. Οι δείκτες αυτοί, θα «ανεβοκατεβαίνουν» με χρήση του $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,-1)$. Έπειτα, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως, εισάγεται ένα βαθμωτό πεδίο ϕ^A, το οποίο προκαλεί το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας από την $\mathrm{SO}(3,2)$ στην $\mathrm{SO}(3,1)$, κρατώντας έτσι μόνο τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz.

Προχωρώντας στην κατασκευή της θεωρίας βαθμίδας στην ομάδα $\mathrm{SO}(3,2)$, το πεδίο βαθμίδας θα γράφεται συναρτήσει του ${\omega_\mu}^{AB}$ ως

$$A_\mu = \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{AB} M_{AB}, \tag{2.42}$$

όπου M_{AB} οι γεννήτορες της $\mathrm{SO}(3,2)$, σύμφωνα με τους οποίους ορίζονται οι γεννήτορες των «μετατοπίσεων»

$$P_a = m M_{a5}, \tag{2.43}$$

[6]Semisimple ή ημι-απλές ονομάζονται οι ομάδες οι οποίες δεν έχουν μη τετριμμένες αβελιανές ομάδες ως υποομάδες τους.

[7]Η ομάδα Poincaré περιέχει αναλλοίωτες αβελιανές υποομάδες και άρα δεν είναι ημι-απλή ομάδα. Οι γεννήτορες των αβελιανών υποομάδων μετατίθενται μεταξύ τους και το γεγονός ότι οι υποομάδες αυτές είναι αναλλοίωτες σημαίνει πως πολλές σταθερές δομής της άλγεβρας Lie μηδενίζονται, με αποτέλεσμα η μετρική να αποκτά μηδενικές ιδιοτιμές και άρα να μην μπορεί να είναι αντιστρέψιμη [8].

για τους οποίους ικανοποιείται η μεταθετική σχέση

$$[P_a, P_b] = m^2 M_{ab}, \tag{2.44}$$

όπου m μία σταθερά με διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Αντικαθιστώντας το πεδίο (2.42) στην έκφραση του field strength tensor (2.38), ο τελευταίος θα πάρει τη μορφή

$$F_{\mu\nu}{}^{AB} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{AB} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{AB} + \omega_\mu{}^{A}{}_{C}\omega_\nu{}^{CB} - \omega_\nu{}^{A}{}_{C}\omega_\mu{}^{CB}. \tag{2.45}$$

Κάθε αναλλοίωτο στοιχείο το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην έκφραση της δράσης μίας θεωρίας βαθμίδας της SO$(3,2)$, λοιπόν, θα πρέπει να προκύπτει χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τανυστή.

Το μόνο αναλλοίωτο στοιχείο το οποίο θα μπορεί να προκύψει με χρήση του field strength tensor είναι η τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα, που ονομάζεται και δείκτης Pontryagin, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}{}^{AB} F_{\rho\sigma AB}$ [9]. Επίσης, προκειμένου να μπορεί να συμβεί το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, θα πρέπει στην έκφραση της δράσης να συμπεριληφθεί ένας όρος συναρτήσει του βοηθητικού βαθμωτού πεδίου ϕ^A το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί μια εξίσωση δεσμού. Η ζητούμενη δράση, λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα γράφεται ως:

$$\mathcal{S}_{(SO(3,2))} = \int d^4x \left(m\phi^A \epsilon_{ABCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - \lambda \left(\phi^A \phi_A + m^{-2} \right) \right), \tag{2.46}$$

όπου η μεταβλητή $\lambda = \lambda(x)$ παίζει το ρόλο πολλαπλασιαστή Lagrange, επιβάλλοντας έτσι το δεσμό

$$\phi^A \phi_A = -m^{-2}, \tag{2.47}$$

και m παράμετρος με μονάδες αντιστρόφου μήκους. Στο σημείο αυτό νομιμοποιείται κανείς να επιλέξει μία συγκεκριμένη βαθμίδα (gauge fixing) στην οποία το βαθμωτό πεδίο θα είναι

$$\phi = \phi^A = \left(0,0,0,0,m^{-1}\right) = \left(\phi^a, m^{-1}\right) \Rightarrow \phi^a(x) = 0 \;\text{ και }\; \phi^5(x) = m^{-1}, \tag{2.48}$$

και η μη μηδενική τιμή του ϕ^5 θα είναι αυτή που θα προκαλεί το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας από την SO$(3,2)$ στην SO$(3,1)$. Για την παραπάνω βαθμίδα, η δράση θα γίνει

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{(SO(1,3))} &= \int d^4x \Bigg[m \left(\cancelto{0}{\phi^a} \epsilon_{aBCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \phi^5 \epsilon_{5BCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \\
&\quad + \lambda \left(\cancelto{0}{\phi_a \phi^a} + \phi_5 \phi^5 + m^{-2} \right) \Bigg] \\
&\overset{(\phi^5 = m^{-1})}{=} \int d^4x \left[\cancel{m m^{-1}} \epsilon_{5BCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda \left(-\cancel{m^{-2}} + \cancel{m^{-2}} \right) \right] \\
&= \int d^4x \, \epsilon_{5BCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \int d^4x \, \epsilon_{5bcde} F_{\mu\nu}{}^{bc} F_{\rho\sigma}{}^{de} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\
\Rightarrow \mathcal{S}_{(SO(1,3))} &= \int d^4x \, \epsilon_{abcd} F_{\mu\nu}{}^{ab} F_{\rho\sigma}{}^{cd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Εάν τώρα αναπτυχθεί ο field strength tensor επί των γεννητόρων της SO$(3,2)$, $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}{}^{AB}M_{AB} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab} + F_{\mu\nu}{}^{a5}M_{a5}$ και ορισθεί το πεδίο βαθμίδας $e_\mu{}^a = m^{-1}\omega_\mu{}^{a5}$ που χρησιμοποιείται για να συσχετίσει ελληνικούς και λατινικούς δείκτες, από την (2.45) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}{}^{a5} &= m\left(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b\right) \\ &= mT_{\mu\nu}{}^a, \end{aligned} \tag{2.50}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}{}^{ab} &= \partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ac}\omega_{\mu c}{}^b - m^2\left(e_\mu{}^a - e_\nu{}^b\right) \\ &= R_{\mu\nu}{}^{ab} - m^2\left(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b\right), \end{aligned} \tag{2.51}$$

όπου οι $T_{\mu\nu}{}^a$, $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ είναι οι 2-μορφές torsion και καμπυλότητας της ISO$(3,1)$ αντίστοιχα.

Μιας και ο όρος $F_{\mu\nu}{}^{a5}$ δεν εμφανίζεται στην έκφραση της δράσης κατόπιν του σπασίματος συμμετρίας, μπορεί κανείς να θεωρήσει $F_{\mu\nu}{}^{a5} = 0 \Rightarrow T_{\mu\nu}{}^a = 0$, επιλογή που οδηγεί προφανώς στη συνθήκη μηδενικής στρέψης.

Αντικαθιστώντας τώρα την έκφραση (2.51) του $F_{\mu\nu}{}^{ab}$ στην δράση που δίνεται στη σχ. (2.49) τότε η τελευταία θα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(SO(1,3))} &= \int d^4x\, \epsilon_{abcd}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[R_{\mu\nu}{}^{ab} - m^2\left(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b\right)\right] \\ &\quad\times\left[R_{\rho\sigma}{}^{cd} - m^2\left(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d\right)\right] \\ &= \int d^4x\, \epsilon_{abcd}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{cd} - m^2 R_{\mu\nu}{}^{ab}\left(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d\right)\right. \\ &\quad - m^2 R_{\rho\sigma}{}^{cd}\left(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b\right) \\ &\quad\left.+ m^4\left(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b\right)\left(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d\right)\right] \\ &= \int d^4x\, \epsilon_{abcd}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{cd} + 2m^2 R_{\mu\nu}{}^{ab}\left(e_\sigma{}^c e_\rho{}^d - e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\right)\right. \\ &\quad\left.+ m^4\left(e_\mu{}^b e_\nu{}^a - e_\nu{}^b e_\mu{}^a\right)\left(e_\rho{}^d e_\sigma{}^c - e_\sigma{}^d e_\rho{}^c\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Τελικά, η παραπάνω δράση μπορεί να γραφεί πιο συνεπτυγμένα ως:

$$\mathcal{S}_{(SO(1,3))} = \int d^4x\, \epsilon_{abcd}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\mathcal{L}_{RR} + m^2\mathcal{L}_{eeR} + m^4\mathcal{L}_{eeee}\right). \tag{2.53}$$

Ο πρώτος όρος της έκφρασης αυτής είναι τοπολογικός όρος Gauss-Bonnet και ως εκ τούτου δε συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Ο δεύτερος όρος είναι η συνήθης Λαγκραντζιανή συναρτήσει της βαθμωτής καμπυλότητας, η οποία περιέχεται στη δράση Einstein-Hilbert και τέλος, ο τρίτος όρος αναπαριστά κοσμολογική σταθερά τάξης m^4. Λόγω της σταθεράς αυτής, οι πεδιακές εξισώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω δράση είναι ένας χώρος anti-de Sitter:

$$F_{\mu\nu}{}^{ab} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu}{}^{ab} = m^2\left(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b\right). \tag{2.54}$$

Σχετικά με την γενική συναλλοιωτότητα, αυτή φαίνεται εάν κανείς συσχετίσει τους μετασχηματισμούς βαθμίδας των πεδίων e και ω (σχ. (2.37)) με τους διαφορομορφισμούς. Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε στην τρισδιάστατη περίπτωση, αρκεί να υπολογίσει κανείς τη διαφορά μεταξύ των (2.37) και των διαφορομορφισμών, προκειμένου να γίνει φανερό πως αυτή μηδενίζεται, όπως και πριν, on-shell. Με άλλα λόγια, ενώ ισχύουν ο εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της δράσης, οι διαφορομορφισμοί ταυτίζονται με τους μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Σύμφωνα με την παραπάνω μελέτη λοιπόν, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί θεωρία βαθμίδας της τετραδιάστατης βαρύτητας, στην οποία τόσο οι μετασχηματισμοί Lorentz όσο και οι μετατοπίσεις εμφανίζονται ως τοπικές συμμετρίες βαθμίδας, δεδομένου βέβαια ότι το κομμάτι των μεταθέσεων έχει «σπάσει» αυθόρμητα.

Κεφάλαιο 3

Μη μεταθετικοί χώροι

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν περιληπτικά οι βασικές ιδέες και αρχές πίσω από τη δομή μη μεταθετικών χώρων. Αρχικά θα συζητηθεί η έννοια της μη μεταθετικότητας ενός χώρου και έπειτα θα παρουσιαστούν κάποιοι βασικοί μη μεταθετικοί χώροι, μερικοί από τους οποίους θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω κατά την κατασκευή της τρισδιάστατης βαρύτητας σαν θεωρία βαθμίδας.

3.1 Περί μη μεταθετικότητας χώρων

Παρόλο που η έννοια ενός μη μεταθετικού χώρου μπορεί εξαρχής να μοιάζει αλλόκοτη, μιας και η σκέψη πως δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν δύο χωρικές συντεταγμένες ταυτόχρονα φαντάζει αντίθετη της διαίσθησης μας, η ιδέα πίσω από την ύπαρξη τέτοιων χώρων έχει ρίζες και πηγάζει από τη κβαντομηχανική. Ο ορισμός ενός κβαντικού χώρου φάσεων δίνεται αντικαθιστώντας τις μεταβλητές θέσης και ορμής x^i, p_j με Ερμητιανούς τελεστές $\hat{x}^i$, $\hat{p_j}$, οι οποίοι πλέον υπακούν στην μεταθετική σχέση του Heisenberg

$$\left[\hat{x}^i, \hat{p_j}\right] = i\hbar\delta^i{}_j. \tag{3.1}$$

Ο χώρος αυτός, μέσω της διαδικασίας αυτής κβαντώνεται, ενώ η έννοια του σημείου αντικαθίσταται πλέον από μία κυψελίδα Planck. Από την παραπάνω μεταθετική σχέση βέβαια, είναι φανερό πως στο κλασσικό όριο, όπου $\hbar \to 0$, ο παραπάνω φασικός χώρος απομένει ως ένας κανονικός χώρος. Κατά την ίδια λογική, ένας χώρος θα μπορούσε, εν γένει, να κβαντιστεί, εάν αντικαθιστούσε κανείς τις συντεταγμένες του x^i με τελεστές $\hat{x}^i$ μίας C^* άλγεβρας[1] των συναρτήσεων του χώρου, έστω $\mathcal{A}$, οι οποίοι θα υπάκουαν σε μεταθετικές σχέσεις της μορφής

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\theta^{ij}, \tag{3.2}$$

όπου το θ^{ij} είναι αντισυμμετρικός τανυστής με διάσταση τετραγωνικού μήκους.

[1] C^* είναι μία μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ συνεχών γραμμικών τελεστών, επί ενός μιγαδικού χώρου Hilbert, με δύο επιπλέον ιδιότητες: αποτελεί τοπολογικά κλειστό σετ στη norm τοπολογία τελεστών και είναι κλειστή υπό τη δράση της συζυγίας και αναστροφής των τελεστών.

3.1.1 Η αναπαράσταση πινάκων

Αρχικά ας σταθούμε στον ορισμό της άλγεβρας $\mathcal{A}$. Η άλγεβρα αυτή εξ ορισμού υπακούει στην προσεταιριστικότητα (associative algebra), παρόλα αυτά δεν είναι α-ναγκαστικά μη μεταθετική, ενώ οποιοδήποτε στοιχείο της θα αντιστοιχεί σε κάποια διάταξη ενός κλασσικού μιγαδικού βαθμωτού πεδίου πάνω σε κάποιο χώρο M. Εάν θεωρήσει κανείς πως η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, το κύριο παράδειγμα μίας μεταθετικής associative άλγεβρας αποτελεί η άλγεβρα συναρτήσεων με μιγαδικό πεδίο τιμών, στις οποίες ορίζεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ως

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{3.3}$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x). \tag{3.4}$$

Το πιο χαρακτηριστικό και συνάμα απλό παράδειγμα μίας μη μεταθετικής άλγεβρας είναι η άλγεβρα $N \times N$ πινάκων με μιγαδικά στοιχεία. Γενίκευση της άλγεβρας αυτής θα αποτελούν οι άλγεβρες πινάκων $N \times N$, οι οποίοι θα απαρτίζονται από στοιχεία της άλγεβρας $\mathcal{A}$, ενώ το άθροισμα και το γινόμενο τους θα βρίσκονται σε συμφωνία με την $\mathcal{A}$. Μέσω της γενίκευσης αυτής, μπορεί να δοθεί ένας πιο «γνώριμος» και «διαισθητικός» χαρακτήρας στη μη μεταθετικότητα της θεωρίας που θα αναπτυχθεί, καθώς θυμίζει το πως στην κβαντομηχανική οι τελεστές μπορούν να αναπαρασταθούν ως πίνακες [10].

Με σκοπό λοιπόν, τη θεμελίωση μη μεταθετικών θεωριών πεδίων, θα χρειαστεί ο ορισμός των παραγώγων ∂_i και του ολοκληρώματος[2] $\int \mathrm{Tr}$. Αυτές θα είναι γραμμικές πράξεις, οι οποίες θα οφείλουν να υπακούν στους παρακάτω κανόνες:

- Κανόνας του Leibniz: $\partial_i (AB) = (\partial_i A)B + A(\partial_i B)$. Δεδομένης της γραμμικότητας, ο κανόνας αυτός υπονοεί πως η παράγωγος μίας σταθεράς μηδενίζεται.
- Το ολοκλήρωμα του ίχνους ενός μεταθέτη είναι μηδέν, $\int \mathrm{Tr}\,[A,B] \equiv \int \mathrm{Tr}(A \cdot B - B \cdot A) = 0$
- Το ολοκλήρωμα του ίχνους ενός ολικού διαφορικού είναι μηδέν, $\int \mathrm{Tr}\,\partial_i A = 0$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες λοιπόν, μία υποψήφια παράγωγος ∂_i θα μπορεί να γραφεί, χρησιμοποιώντας ένα στοιχείο d_i της άλγεβρας $\mathcal{A}$, ως $\partial_i A = [d_i, A]$.

Οι παραπάνω ορισμοί της παραγώγου και του ολοκληρώματος επιτρέπουν, λοιπόν, τη μελέτη μη μεταθετικών θεωριών πεδίων, αναπαριστώντας τους τελεστές της άλγεβρας $\mathcal{A}$ ως πίνακες. Αυτή είναι και η αναπαράσταση που θα ακολουθηθεί στο εξής. Παρακάτω θα αναφερθούν μερικές συνήθεις περιπτώσεις μη μεταθετικότητας ανάλογα με τη μορφή του θ^{ij} της μεταθετικής σχέσης.

[2] Ο λόγος που το ολοκλήρωμα γράφεται μαζί με το σήμα του ίχνους είναι πως εν γένει, για μη μεταθετικές άλγεβρες στις οποίες γίνεται χρήση πινάκων, δεν είναι δυνατόν να ξεχωρίσει το σύμβολο του ολοκληρώματος από αυτό του ίχνους.

Η canonical περίπτωση

Η απλούστερη περίπτωση μη μεταθετικότητας ενός χώρου είναι αυτή στην οποία το $\theta^{ij}(x) = \theta^{ij}$ είναι σταθερός αντισυμμετρικός $N \times N$ πίνακας με μιγαδικά στοιχεία, ενώ ταυτόχρονα είναι ανεξάρτητος από τις συντεταγμένες. Στην περίπτωση αυτή, η μεταθετική σχέση των συντεταγμένων γράφεται ως

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\theta^{ij}, \tag{3.5}$$

με τους δείκτες i, j να παίρνουν τιμές από 1 έως N. Οι χώροι των οποίων οι συντεταγμένες υπακούν στην παραπάνω σχέση συμβολίζονται ως $\mathbb{R}_\theta^N$, ενώ στην ειδική περίπτωση $N = 2$, ο χώρος $\mathbb{R}_\theta^2$ ονομάζεται επίπεδο Moyal.

Η περίπτωση τύπου Lie

Μία ακόμα ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η μη μεταθετικότητα τύπου Lie. Στην περίπτωση αυτή, η παράμετρος θ^{ij} εξαρτάται γραμμικά από τις συντεταγμένες, ενώ η αντίστοιχη σχέση μετάθεσης παίρνει τη μορφή

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = iC^{ij}{}_k\hat{x}^k, \tag{3.6}$$

όπου $C^{ij}{}_k$ είναι κάποια μιγαδική παράμετρος, ενώ οι δείκτες i, j, k παίρνουν τιμές από 1 έως N. Ειδική περίπτωση της παραπάνω είναι αυτή για $N = 3$, από τη μεταθετική σχέση της οποίας προκύπτει ο ορισμός της άλγεβρας της ομάδας SU(2). Η περίπτωση αυτή θα μας απασχολήσει περισσότερο στην συνέχεια, καθώς σε αυτή βασίζεται ο χώρος R_λ^3 επί του οποίου θα δομηθεί η τρισδιάστατη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας.

Κβάντωση Weyl

Τέλος, για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ένας εναλλακτικός τρόπος για την κατασκευή μη μεταθετικών χώρων, πέρα από την αναπαράσταση πινάκων. Ο τρόπος αυτός ονομάζεται κβάντωση Weyl [11] και έγκειται στο συσχετισμό των τελεστών μίας μη μεταθετικής άλγεβρας εξοπλισμένης με το συνήθη πολλαπλασιασμό, με μία άλγεβρα συναρτήσεων με μεταβλητές που μετατίθενται η οποία, όμως, θα είναι εφοδιασμένη με κάποιο παραμορφωμένο γινόμενο. Το γινόμενο αυτό ονομάζεται $\star$-γινόμενο Moyal-Weyl και συμβολίζεται με $\star$. Ουσιαστικά, μέσω της μεθόδου αυτής γίνεται μία «ένα-προς-ένα» αντιστοίχιση μεταξύ τελεστών που δεν μετατίθενται και συναρτήσεων οι οποίες μετατίθενται κανονικά, ενώ εισάγεται η μη μεταθετικότητα μέσω της προαγωγής του κοινού γινομένου μεταξύ συναρτήσεων στο $\star$-γινόμενο.

3.2 Η ασαφής σφαίρα

Η ασαφής σφαίρα αποτελεί τη χαρακτηριστικότερη περίπτωση μη μεταθετικού χώρου τύπου Lie. Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η κατασκευή της ασαφούς σφαίρας

S_F^2, κάνοντας χρήση της αναπαράστασης πινάκων που συζητήθηκε προηγουμένως. Εν γένει, οι ασαφείς χώροι ορίζονται ως η διακριτή προσέγγιση μέσω πινάκων ενός συνεχούς χώρου, με την απαίτηση να διατηρούνται οι ισομετρίες. Δεδομένου αυτού, η κατασκευή της ασαφούς σφαίρας που θα ακολουθήσει θα γίνει παράλληλα με το συνεχές της ανάλογο, την κανονική σφαίρα, προκειμένου να μπορεί να γίνει άμεση σύγκριση μεταξύ των δύο.

Η κοινή σφαίρα S^2 μπορεί να ορισθεί ως υπο-πολλαπλότητα ενός Ευκλείδειου χώρου με μία επιπλέον διάσταση, στην προκειμένη του $\mathbb{R}^3$. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_a της σφαίρας, ως είναι γνωστόν, ικανοποιούν την απαίτηση

$$\sum_{a=1}^{3} x_a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \tag{3.7}$$

όπου R είναι μία σταθερά, η οποία ταυτοποιείται με την ακτίνα της σφαίρας, ενώ ο δείκτης a παίρνει προφανώς τιμές από το 1 μέχρι το 3. Επίσης η σφαίρα υπακούει σε συμμετρία κάτω από στροφές, η οποία περιγράφεται από την άλγεβρα της ομάδας SO(3), της οποίας οι γεννήτορες είναι οι τρεις τελεστές γωνιακής στροφορμής που ορίζονται ως $L_a = -i\epsilon_{abc}x_b\partial_c$. Οι γεννήτορες αυτοί μπορούν επίσης να γραφούν συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων θ, ϕ ως $L_a = -\xi_a^i \partial_i$, όπου $i = \theta, \phi$ ενώ τα ξ_a^i είναι συνιστώσες των διανυσμάτων Killing. Ο τελεστής Laplace ορίζεται επί της σφαίρας μέσω της σχέσης

$$L^2 = -R^2 \Delta_{S^2} = -R^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{g} \partial_j \right), \tag{3.8}$$

όπου g^{ij} ο μετρικός τανυστής της σφαίρας. Τα ιδιοδιανύσματα των παραπάνω τελεστών είναι οι σφαιρικές αρμονικές, $Y_l^m(\theta, \phi)$, οι οποίες ορίζονται ως

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \tag{3.9}$$

με P_l^m τα πολυώνυμα Legendre. Τέλος, οι σφαιρικές αρμονικές ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη πληρότητας

$$\int d\Omega Y_{lm}^\dagger Y_{l'm'} = \int sin\theta d\theta d\phi Y_{lm}^\dagger Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \tag{3.10}$$

Λόγω του ότι οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν πλήρες και ορθοκανονικό σετ συναρτήσεων, οποιαδήποτε συνάρτηση $f(\theta, \varphi)$ πάνω στη σφαίρα S^2 θα μπορεί να αναλυθεί πάνω σε αυτές ως

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{3.11}$$

όπου c_{lm} είναι, εν γένει μιγαδικοί, συντελεστές.

Προχωρώντας στο μη μεταθετικό ανάλογο της σφαίρας, την ασαφή σφαίρα, θα δειχθεί πως μπορεί αυτή να εξαχθεί ξεκινώντας από ιδιότητες της S^2. Μία διακριτή εκδοχή της κοινής σφαίρας θα μπορούσε να βρεθεί αντικαθιστώντας την άλγεβρα των σφαιρικών αρμονικών $Y_l^m(\theta, \phi)$ πάνω στη σφαίρα, με ένα άλλο σετ συναρτήσεων $\hat{Y}_l^m(\theta, \phi)$, στις οποίες υπάρχει ένα άνω όριο N για τις τιμές του l [12]. Επομένως, μία συνάρτηση $\hat{f}$ θα μπορεί να αναλυθεί πάνω στο νέο αυτό σετ ως

$$\hat{f}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} \hat{Y}_{lm}(\theta, \phi). \tag{3.12}$$

Το γινόμενο, τώρα, δύο τέτοιων συναρτήσεων θα περιέχει όρους με το l να λαμβάνει μία μέγιστη τιμή $2N$ (το άθροισμα των μεγίστων τιμών N των δύο γωνιακών στροφορμών), ξεπερνώντας έτσι το ανώτατο όριο N. Αυτό προφανώς σημαίνει πως η «συντετμημένη» άλγεβρα των συναρτήσεων αυτών δεν κλείνει ως προς το γινόμενο, κι επομένως θα πρέπει να βρεθεί κάποια άλλη άλγεβρα. Ένας απλός τρόπος να βρεθεί μία κατάλληλη άλγεβρα θα ήταν να χρησιμοποιηθεί ένα διαφορετικό είδος γινομένου που θα είναι μη μεταθετικό. Το γινόμενο αυτό που χρησιμοποιηθεί δεν θα είναι άλλο παρά το γινόμενο πινάκων [3]. Επομένως, κατά τη διακριτοποίηση της σφαίρας, μέσω της «τμήσης», η απειροδιάστατη μη μεταθετική άλγεβρα συναρτήσεων αντικαθίσταται από μία, πεπερασμένη, $(N+1)$-διάστατη μη μεταθετική άλγεβρα. Ο διακριτοποιημένος χώρος αυτός ορίζεται ως ασαφή σφαίρα, και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι ασαφείς χώροι εν γένει θεωρούνται ως προσεγγίσεις μέσω πινάκων των κοινών χώρων όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, η ασαφής σφαίρα μπορεί να δομηθεί, εάν η «συντετμημένη» άλγεβρα παραπάνω θεωρηθεί ως άλγεβρα πινάκων πάνω σε κάποιο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης. Προς το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι $(N+1)$-διάστατοι πίνακες J_a, με $a = 1, 2, 3$, οι οποίοι αποτελούν βάση για την $(N+1)$-διάστατη μη αναγώγιμη αναπαράσταση της ομάδας SU(2), και οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c. \tag{3.13}$$

Επίσης, αφού οι πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες J_a θεωρούνται σε μη αναγώγιμη αναπαράσταση, η τιμή του τελεστή Casimir στην αναπαράσταση αυτή θα είναι[4]

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right) \mathbb{I}_{(N+1)}. \tag{3.14}$$

Επομένως, η ασαφής σφαίρα, επιπέδου ασάφειας N, είναι μη μεταθετικός χώρος του οποίου οι συναρτήσεις συντεταγμένων $\hat{X}_a$ ορίζονται ως οι $(N+1) \times (N+1)$ ερμητιανοί πίνακες οι οποίοι είναι ανάλογοι των γεννητόρων J_a της $(N+1)$-διάστατης, μη αναγώγιμης αναπαράστασης της SU(2):

$$\hat{X}_a = \kappa J_a, \tag{3.15}$$

με συντελεστή αναλογίας κ. Επίσης, αφού οι X_a είναι συντεταγμένες (ασαφούς μεν) σφαίρας, υποχρεωτικά θα υπακούν στην απαίτηση

$$\sum_{a=1}^{3} \hat{X}_a \hat{X}_a = \hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2 = R^2, \tag{3.16}$$

[3] Ισοδύναμα θα μπορούσε κανείς να κάνει χρήση ενός κατάλληλου $\star$-γινομένου προκειμένου να εισάγει τη μη μεταθετικότητα, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο.

[4] Η τιμή του τελεστή Casimir σε μία N-διάστατη, μη αναγώγιμη αναπαράσταση είναι $J^2 = \dfrac{N^2-1}{4}$.

με R την ακτίνα της σφαίρας. Η έκφραση του συντελεστή αναλογίας κ μπορεί να βρεθεί εάν αντικατασταθεί η σχέση (3.15) στην (3.16), λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση (3.14):

$$\kappa = \frac{r}{\sqrt{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}} = \lambda_N r, \tag{3.17}$$

όπου προφανώς $\lambda_N = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}}$. Γνωρίζοντας την έκφραση του κ λοιπόν, οι πίνακες συντεταγμένων $\hat{X}_a$ μπορούν να ξαναγραφτούν, σύμφωνα με την (3.15), ως

$$\hat{X}_a = \kappa J_a = \frac{r}{\sqrt{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}} J_a = \lambda_N r J_a. \tag{3.18}$$

Η μεταθετική σχέση μεταξύ των πινάκων συντεταγμένων μπορεί να υπολογισθεί λαμβάνοντας υπόψιν τη μεταθετική σχέση των γεννητόρων J_a (3.13)

$$\left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] = i\kappa\epsilon_{abc}\hat{X}_c = i\lambda_N r\epsilon_{abc}\hat{X}_c \tag{3.19}$$

Μπορούμε αντίστοιχα, να επαναορίσουμε τους πίνακες συντεταγμένων $\hat{X}_a$ και να προχωρήσουμε με αντι-ερμητιανούς πίνακες X_a, οι οποίοι ορίζονται ως

$$X_a = \frac{1}{i\kappa r}\hat{X}_a = \frac{1}{ir}J_a. \tag{3.20}$$

Επίσης, η σχέση μετάθεσης, καθώς και η απαίτηση που θα πρέπει να ικανοποιούν οι πίνακες αυτοί σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας ξαναγράφονται ως

$$[X_a, X_b] = \frac{\epsilon_{abc}}{r}X_c \tag{3.21}$$

και

$$\sum_{a=1}^{3} X_a X_a = -\frac{(\lambda_N)^{-2}}{r^2}. \tag{3.22}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις λοιπόν, η άλγεβρα της ασαφούς σφαίρας γίνεται να περιγραφεί κατά ισοδύναμο τρόπο και με τις δύο περιπτώσεις.

Τέλος, οι συναρτήσεις $\hat{Y}_{lm}$ που χρησιμοποιήθηκαν, επί των οποίων μπορεί να αναλυθεί οποιαδήποτε συνάρτηση πάνω στην ασαφή σφαίρα, ονομάζονται ασαφείς αρμονικές και δίνονται από την έκφραση

$$\hat{Y}_{lm} = r^{-l}\sum_{\vec{a}} f^{(lm)}_{a_1\ldots a_l}\hat{X}^{a_1}\ldots\hat{X}^{a_l}, \tag{3.23}$$

ενώ υπακούν στην παρακάτω σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int \mathrm{Tr}_N\left(\hat{Y}^{\dagger}_{lm}\hat{Y}_{l'm'}\right) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.24}$$

3.3 Θεωρίες βαθμίδας σε ασαφείς χώρους

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η διαδικασία που ακολουθείται προς την κατασκευή θεωριών βαθμίδας σε ασαφείς χώρους. Αρχικά, έστω ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(X)$, το οποίο είναι στοιχείο μίας άλγεβρας $\mathbf{A}$, η οποία περιέχει δυναμοσειρές στις συντεταγμένες, και μίας ομάδας βαθμίδας G. Ένας απειροστός μετασχηματισμός βαθμίδας θα δίνεται συναρτήσει μίας απειροστής παραμέτρου βαθμίδας $a(X)$, ως

$$\delta\phi(X) = i\alpha(X)\phi(X), \tag{3.25}$$

ο οποίος είναι και ο κανόνας συναλλοίωτου μετασχηματισμού του πεδίου $\phi(X)$. Από την παραπάνω προκύπτει επίσης πως $\delta\phi(X) \in \mathbf{A}$. Εφόσον η παράμετρος a είναι στοιχείο της άλγεβρας $\mathbf{A}$, τότε είναι το ισοδύναμο ενός αβελιανού μετασχηματισμού βαθμίδας, ενώ εάν ανήκε σε μία άλγεβρα $M_N(\mathbf{A})$ πινάκων οι οποίοι απαρτίζονται από στοιχεία της $\mathbf{A}$, θα ήταν το ισοδύναμο ενός μη αβελιανού μετασχηματισμού βαθμίδας. Αξίζει να σημειωθεί επίσης, πως οι συντεταγμένες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\delta X_a = 0 \tag{3.26}$$

Όπως και στην περίπτωση των κοινών θεωριών βαθμίδας, έτσι και στην περίπτωση των ασαφών χώρων η έκφραση ενός πεδίου πολλαπλασιασμένο από τα αριστερά με μία συντεταγμένη δεν θα είναι συναλλοίωτη, δηλαδή

$$\delta(X_a\phi(X)) = iX_a a(X)\phi(X), \tag{3.27}$$

έκφραση η οποία δεν είναι απαραίτητα ίση με $ia(X)X_a\phi(X)$.

Ακολουθώντας τα παραπάνω λοιπόν, όπως στην περίπτωση κοινών θεωριών βαθμίδας έπεται η αναβάθμιση της παραγώγου σε μία που θα μετασχηματίζεται συναλλοίωτα, το επόμενο βήμα στην κατασκευή θεωριών βαθμίδας σε ασαφείς χώρους θα είναι η εισαγωγή των συναλλοίωτων συντεταγμένων $\hat{X}_a$, οι οποίες θα είναι τέτοιες ώστε

$$\delta(\hat{X}_a\phi(Q)) = ia(X)\hat{X}_a\phi(X), \tag{3.28}$$

από την οποία προκύπτει πως

$$\delta\hat{X}_a = i[a(X), \hat{X}_a]. \tag{3.29}$$

Στο σημείο αυτό επισημαίνεται πως στο εξής με το συμβολισμό $\hat{X}_a$ δεν θα εννοούνται πλέον οι ερμητιανοί τελεστές των συντεταγμένων όπως είδαμε προηγουμένως, αλλά οι συναλλοίωτες συντεταγμένες που μόλις αναφέρθηκαν. Επίσης, διατηρείται ο συμβολισμός X_a για να περιγράψει τους αντι-ερμητιανούς τελεστές συντεταγμένων σε ασαφείς χώρους, όπως έχει συζητηθεί μέχρι τώρα.

Περαιτέρω, θεωρούμε πως οι συναλλοίωτες συντεταγμένες $\hat{X}_a$ συνδέονται με τις X_a σύμφωνα με τη σχέση

$$\hat{X}_a = X_a + A_a(X), \tag{3.30}$$

με $A_a(X)$ στοιχείο της άλγεβρας $\mathbf{A}$. Αυτή είναι και η ανάλογη σχέση της συναλλοίωτης παραγώγου στις κοινές θεωρίες βαθμίδας, με $A_a(X)$ να είναι το μη μεταθετικό ανάλογο του δυναμικού βαθμίδας. Ο νόμος μετασχηματισμού του $A_a(X)$, μπορεί εύκολα να βρεθεί λαμβάνοντας υπόψιν την απαίτηση (3.29):

$$\delta A_a = i\left[a(X), A_a(X)\right] - i\left[X_a, a(X)\right] \tag{3.31}$$

Προχωρώντας στην κατασκευή ενός μοντέλου θεωρίας βαθμίδας, ο επόμενος στόχος είναι ο ορισμός του τανυστή δύναμης πεδίου. Παρόλο που σε θεωρίες βαθμίδας σε συνεχείς χώρους, ο τανυστής δύναμης πεδίου δίνεται πάντα από την έκφραση του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων, στην περίπτωση που ο χώρος είναι μη μεταθετικός, ο ορισμός αυτός δεν ευσταθεί και επομένως δεν υπάρχει μία κοινή σχέση σύμφωνα με την οποία θα μπορεί να οριστεί ο τανυστής αυτός. Αντιθέτως, σε κάθε μη μεταθετικό χώρο ο τανυστής δύναμης πεδίου θα πρέπει να ορισθεί μέσω κάποιας άλλης σχέσης, η οποία μάλιστα θα είναι διαφορετική για κάθε τύπο μη μεταθετικότητας. Παρακάτω δίνονται, ενδεικτικά, οι σχέσεις αυτές για τις δύο περιπτώσεις μη μεταθετικότητας (Canonical και Lie τύπου) που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Canonical Περίπτωση

Στην Canonical περίπτωση, δεδομένης της σχέσης (3.5), ο τανυστής δύναμης πεδίου ορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω έκφραση:

$$F_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - i\theta_{ab}, \tag{3.32}$$

ενώ συναρτήσει των συντεταγμένων, κατόπιν αντικατάστασης της σχέσης (3.30), ο τανυστής αυτός θα δίνεται από την

$$F_{ab} = [X_a, A_b] - [X_b, A_a] + [A_a, A_b]\,, \tag{3.33}$$

η σύγκριση της οποίας με τη σχέση (2.38), κάνει προφανή την αναλογία με τις κοινές θεωρίες βαθμίδας. Τέλος, ο μετασχηματισμός βαθμίδας του F θα δίνεται από την

$$\delta F_{ab} = [X_a, \delta A_b] - [X_b, \delta A_a] + [\delta A_a, A_b] + [A_a, \delta A_b]\,, \tag{3.34}$$

από την οποία, αντικαθιστώντας την έκφραση της μεταβολής της συνοχής βαθμίδας δA_a από τη σχέση (3.31) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi[5], οδηγούμαστε στην τελική μορφή του μετασχηματισμού του F:

$$\delta F_{ab} = i\left[a, F_{ab}\right], \tag{3.35}$$

σχέση η οποία υποδεικνύει, κατόπιν σύγκρισης με την (3.29), πως ο F μετασχηματίζεται κατά συναλλοίωτο τρόπο υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας.

[5]Η ταυτότητα Jacobi για μεταθέτες $N \times N$ πινάκων γράφεται ως $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Περίπτωση τύπου Lie

Κατά αντίστοιχο τρόπο, σε συμφωνία με τη σχέση (3.6), ο τανυστής δύναμης πεδίου θα ορίζεται ως

$$F_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - iC_{ab}{}^c\hat{X}_c \tag{3.36}$$

με $C_{ab}{}^c \in \mathbb{C}$. Σε αναλογία με την παραπάνω διαδικασία για την Canonical περίπτωση, αρχικά προκύπτει η παρακάτω έκφραση για τον F

$$F_{ab} = [X_a, A_b] - [X_b, A_a] + [A_a, A_b] - iC_{ab}{}^c A_c, \tag{3.37}$$

από όπου τελικά προκύπτει ο μετασχηματισμός βαθμίδας του ως

$$\delta F_{ab} = i\,[a, F_{ab}]\,, \tag{3.38}$$

και άρα και σε αυτή την περίπτωση ο F μετασχηματίζεται συναλλοίωτα.

Βεβαίως, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο, θα μπορούσε κανείς να κάνει την ίδια διαδικασία χωρίς να χρησιμοποιήσει αναπαραστάσεις πινάκων, αλλά με χρήση μεταθετικών συναρτήσεων. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να αντικατασταθούν στις παραπάνω σχέσεις οι τελεστές από συναρτήσεις και το «κανονικό» γινόμενο από ένα παραμορφωμένο, $\star$-γινόμενο, το οποίο θα ορίζεται ανάλογα με τον χώρο. Επισημαίνεται και πάλι, πως οι δύο αυτές μέθοδοι είναι απολύτως ισοδύναμες.

Έστω τώρα, μία μη αβελιανή ομάδα G, με γεννήτορες T^a καθώς και τα πεδία βαθμίδας $A_a(X)$ και μια παράμετρο βαθμίδας $\epsilon^a(X)$. Κατά την κατασκευή μιας μη μεταθετικής θεωρίας βαθμίδας, όπως έχει φανεί μέχρι τώρα, εμφανίζεται ο μεταθέτης $[\epsilon, A]$, ο οποίος μπορεί να γραφεί αναλυτικά συναρτήσει των γεννητόρων ως

$$[\epsilon, A] = \left[\epsilon^a T^a, A^b T^b\right] = \frac{1}{2}\left\{\epsilon^a, A^b\right\}\left[T^a, T^b\right] + \frac{1}{2}\left[\epsilon^a, A^b\right]\left\{T^a, T^b\right\}, \tag{3.39}$$

από όπου γίνεται φανερό πως προκύπτουν όροι του αντιμεταθέτη των γεννητόρων $\left\{T^a, T^b\right\}$. Σε κοινές θεωρίες βαθμίδας, σε μεταθετικούς χώρους, ο αντιμεταθέτης που εμφανίζεται στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους καταλήγει απλά στο γινόμενο των ϵ και A, ενώ ο μεταθέτης του δεύτερου όρου μηδενίζεται με αποτέλεσμα να διαγράφεται ο δεύτερος όρος εξ΄ ολοκλήρου. Επομένως, στο μεταθετικό πλαίσιο, δεν καλείται κανείς να αντιμετωπίσει τον αντιμεταθέτη $\left\{T^a, T^b\right\}$, κάτι το οποίο δεν αληθεύει εν γένει στο μη μεταθετικό πλαίσιο, μιας και στην τελευταία περίπτωση, οι διάφορες συναρτήσεις του X προφανώς δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Το ζήτημα που προκύπτει από τον αντιμεταθέτη αυτό είναι πως γενικότερα αντιμεταθέτες γεννητόρων μίας άλγεβρας Lie σε κάποια τυχαία αναπαράσταση δεν επιστρέφουν γεννήτορες που ανήκουν στην άλγεβρα, κι επομένως δεν κλείνουν. Προκειμένου να προσπεραστεί αυτό, ένας τρόπος θα ήταν να συμπεριλαμβάνουμε κάθε φορά τους επιπλέον γεννήτορες στην άλγεβρα επ΄ αόριστον, κάτι το οποίο θα οδηγούσε σε μία απειροδιάστατη άλγεβρα, η οποία θα περιείχε όλα τα δυνατά στοιχεία που θα προέκυπταν από τους αντιμεταθέτες. Δεδομένου πως δεν εξυπηρετεί τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, θα πρέπει να επιστρατευτεί κάποιος εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης. Ο εναλλακτικός τρόπος αυτός είναι να θεωρηθεί κάποια συγκεκριμένη αναπαράσταση των γεννητόρων, τέτοια ώστε οι αντιμεταθέτες τους να δίνουν κάποιο πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τα οποία δεν θα ανήκουν στην άλγεβρα, το οποία στη συνέχεια θα προστεθούν σε αυτή. Ως εκ τούτου, η τελική ομάδα βαθμίδας θα επεκταθεί ώστε να περιέχει όλα τα στοιχεία που προκύπτουν από τους αντιμεταθέτες εκπεφρασμένους στην ίδια αναπαράσταση, παραμένοντας όμως πεπερασμένη. Αυτή είναι και η μέθοδος που θα ακολουθηθεί στην επόμενη παράγραφο, κατά την κατασκευή της θεωρίας βαθμίδας που περιγράφει την βαρύτητα σε κατάλληλο ασαφή χώρο.

3.4 Οι ασαφείς χώροι $\mathbb{R}^3_\lambda$ και $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$

Ο ασαφής χώρος $\mathbb{R}^3_\lambda$

Ο χώρος $\mathbb{R}^3_\lambda$ πρόκειται για ένα μη μεταθετικό χώρο, ο οποίος περιγράφεται με βάση την ασαφή σφαίρα που παρουσιάστηκε προηγουμένως. Για αρχή έστω ασαφής σφαίρα στην οποία κάθε συγκεκριμένη τιμή του λ στη σχέση (3.19), χαλαρώνεται η συνθήκη Casimir (3.16), γεγονός που επιτρέπει στους πίνακες των συντεταγμένων να αναπαρίστανται με αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Στις αναπαραστάσεις αυτές, οι πίνακες X_a θα μπορούν να γραφούν σε block diagonal μορφή, με διαγώνια στοιχεία τους μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις, σε κάθε ένα από τα οποία ισχύει η συνθήκη Casimir [6]. Με άλλα λόγια, κάθε διαγώνιο block θα περιγράφει μία ασαφή σφαίρα. Ως εκ τούτου, ο χώρος $\mathbb{R}^3_\lambda$ θα μπορεί να γραφεί ως το ευθύ γινόμενο ασαφών σφαιρών για όλες τις δυνατές τιμές της ακτίνας [13, 14, 15] οι οποίες καθορίζονται από τα άνω όρια $N \in \mathbb{N}$ των στοφορμών l:

$$\mathbb{R}^3_\lambda = \sum_{2N\in\mathbb{N}} S^2_N = \bigoplus_{2N\in\mathbb{N}} \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}). \tag{3.40}$$

Επομένως, ο χώρος $\mathbb{R}^3_\lambda$ μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η διακριτή φυλλοποίηση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου από πολλαπλές ασαφείς σφαίρες, με κάθε ασαφή σφαίρα να αποτελεί ένα φύλλο.

Ο ασαφής χώρος $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$

Σε άμεση αναλογία με τον ασαφή χώρο $\mathbb{R}^3_\lambda$, ο ασαφής χώρος $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$ ορίζεται αφού «χαλαρώσει» η αντίστοιχη συνθήκη Casimir, επιτρέποντας έτσι στους πίνακες των συντεταγμένων να αναπαρίστανται από αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Για το λόγο αυτό, όπως και προηγουμένως με τον $\mathbb{R}^3_\lambda$, έτσι και σε αυτή την περίπτωση οι πίνακες αυτοί θα μπορούν να γραφούν σε block diagonal μορφή, με κάθε διαγώνιο στοιχείο να αποτελεί μη αναγώγιμη αναπαράσταση, αυτή τη φορά της ομάδας $\mathrm{SU}(1,1)$, δηλαδή ασαφών υπερβολοειδών διαφόρων ακτίνων.

[6] Επομένως μιλάμε για μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας $\mathrm{SU}(2)$

Κεφάλαιο 4

Μη μεταθετική τρισδιάστατη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η κατασκευή ενός τρισδιάστατου μοντέλου βαρύτητας ως θεωρία βαθμίδας, στο μη μεταθετικό πλαίσιο, ως μεταφορά της θεωρίας βαθμίδας της τρισδιάστατης βαρύτητας Einstein που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.1. Προς το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.3 και ειδικότερα για την περίπτωση των ασαφών χώρων $\mathbb{R}^3_\lambda$ και $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$ (παράγραφος 3.4).

Η μελέτη που θα ακολουθήσει σχετίζεται με την κατασκευή μίας μη αβελιανής θεωρίας βαθμίδας που θα περιγράφει την τρισδιάστατη βαρύτητα με θετική κοσμολογική σταθερά. Προς το σκοπό αυτό οι ομάδες βαθμίδας που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι η $\mathrm{SO}(3,1)$ για τη Λορεντζιανή περίπτωση και η $\mathrm{SO}(4)$ για την Ευκλείδια περίπτωση, ενώ μη μεταθετικοί χώροι επί των οποίων θα αναπτυχθούν οι θεωρίες βαθμίδας θα είναι ο $\mathbb{R}^3_\lambda$ και ο $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$ αντίστοιχα. Όπως και στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας σε συνεχή χώρο η πληροφορία των πεδίων dreibein και spin connection εμπεριεχόταν στη συνοχή βαθμίδας της σχέσης (2.10), έτσι και στις παραπάνω περιπτώσεις, η πληροφορία των πεδίων dreibein και spin connection θα εμπεριέχεται στις συναλλοίωτες συντεταγμένες [16, 17, 18].

4.1 Η Λορεντζιανή περίπτωση

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η ομάδα βαθμίδας που θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση αυτή είναι η $\mathrm{SO}(3,1)$ ή μάλλον η ισοδύναμη της σπιν ομάδα $\mathrm{Spin}(3,1)$ η οποία είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκε πως κατά την κατασκευή μη αβελιανών θεωριών βαθμίδας οι αντιμεταθέτες των γεννητόρων της ομάδας βαθμίδας δεν κλείνουν, καθώς δίνουν στοιχεία τα οποία δεν ανήκουν στην άλγεβρα που ανήκουν οι γεννήτορες. Το ίδιο ακριβώς ζήτημα προκύπτει προφανώς και για τους γεννήτορες της ομάδας $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως λοιπόν, προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό αρχικά θα πρέπει να γίνει διαλογή της αναπαράστασης στην οποία θα βρίσκονται οι γεννήτορες. Στην περίπτωση αυτή, διαλέγεται η σπινοριακή αναπαράσταση, στην οποία οι έξι γεννήτορες της ομάδας αναπαρίστανται ως

$$\Sigma_{AB} = \frac{1}{2}\gamma_{AB} = \frac{1}{4}\left[\gamma_A, \gamma_B\right], \tag{4.1}$$

όπου γ_A οι Λορεντζιανοί γ πίνακες, και οι δείκτες A, B παίρνουν τιμές από το 1 έως το 4. Οι σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων θα δίνονται λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση [19]

$$\gamma_{AB}\gamma^{CD} = 2\delta^{[C}_{[B}\delta^{D]}_{A]} + 4\delta^{[C}_{[B}\gamma_{A]}{}^{D]} + i\epsilon_{AB}{}^{CD}\gamma_5, \tag{4.2}$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$[\gamma_{AB}, \gamma_{CD}] = 8\eta_{A[C}\gamma_{D]B]} \tag{4.3}$$

και

$$\{\gamma_{AB}, \gamma_{CD}\} = 4\eta_{C[B}\eta_{A]D}\mathbb{I} + 2i\epsilon_{ABCD}\gamma_5, \tag{4.4}$$

με $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Στην αναπαράσταση αυτή, όπως φαίνεται από την παραπάνω αντιμεταθετική σχέση, τα μόνα στοιχεία που παράγονται από τους αντιμεταθέτες είναι ο τετραδιάστατος μοναδιαίος πίνακας, καθώς και ο πίνακας γ_5, κι ως εκ τούτου, θα πρέπει να επεκταθεί η άλγεβρα προκειμένου να τα συμπεριλαμβάνει κι αυτά. Η επέκταση αυτή οδηγεί ακριβώς στην οκταδιάστατη άλγεβρα $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, η οποία προφανώς έχει γεννήτορες τους $\{\gamma_{AB}, \gamma_5, i\mathbb{I}\}$ [19].

Στην συνέχεια, προκειμένου να μπορούν τα πεδία που θα εισαχθούν παρακάτω να ταυτοποιηθούν, έχει νόημα να γίνει $\mathrm{SO}(3)$ ανάπτυγμα των παραπάνω γεννητόρων, ορίζοντας $\tilde{\gamma}^a \equiv \epsilon^{abc}\gamma_{bc}$ και $\bar{\gamma}_a \equiv \gamma_{a4}$ με τους δείκτες a, b, c να παίρνουν τιμές από το 1 μέχρι το 3. Δεδομένων των ορισμών αυτών, οι παραπάνω μεταθετικές και αντιμεταθετικές σχέσεις μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{\gamma}^a, \tilde{\gamma}^b\right] = -4\epsilon^{abc}\tilde{\gamma}_c, \quad \left[\bar{\gamma}_a, \tilde{\gamma}_b\right] = -4\epsilon_{abc}\tilde{\gamma}^c, \quad \left[\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b\right] = \epsilon_{abc}\tilde{\gamma}^c \\ &\left\{\tilde{\gamma}^a, \tilde{\gamma}^b\right\} = -8\eta_{ab}\mathbb{I}, \quad \left\{\bar{\gamma}_a, \tilde{\gamma}^b\right\} = 4i\delta^b_a\gamma_5, \quad \left\{\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b\right\} = 2\eta_{ab}\mathbb{I} \quad , \\ &\left[\gamma^5, \tilde{\gamma}^a\right] = \left[\gamma^5, \bar{\gamma}^a\right] = 0, \quad \left\{\gamma^5, \tilde{\gamma}_a\right\} = 4i\bar{\gamma}_a, \quad \left\{\gamma^5, \bar{\gamma}^a\right\} = i\tilde{\gamma}^a, \end{aligned} \tag{4.5}$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι γνωστές σχέσεις για το γ_5:

$$\left[\gamma^5, \gamma^{AB}\right] = 0 \tag{4.6}$$

καθώς και

$$\left\{\gamma^5, \gamma^{AB}\right\} = i\epsilon^{ABCD}\gamma_{CD}. \tag{4.7}$$

Προχωρώντας τώρα στην κατασκευή της θεωρίας βαθμίδας, ορίζονται οι συναλλοίωτες συντεταγμένες ως

$$\hat{X}_\mu = X_\mu + \mathcal{A}_\mu, \tag{4.8}$$

όπου μ οι χωροχρονικοί δείκτες με τιμές από 1 μέχρι 3, και $\mathcal{A}_\mu$ η συνοχή βαθμίδας. Η συνοχή βαθμίδας $\mathcal{A}_\mu$ ανήκει στην άλγεβρα $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ και επομένως μπορεί να αναλυθεί πάνω στους γεννήτορές της. Εάν συμβολιστούν οι γεννήτορες ενιαία ως $T^{\bar{a}}$ με $\bar{a} = 1, \ldots, 8$, τότε το ανάπτυγμα της συνοχής βαθμίδας θα είναι

$$\mathcal{A}_\mu(X) = \mathcal{A}^{\bar{a}}_\mu(X) \otimes T^{\bar{a}}. \tag{4.9}$$

Ο λόγος που στην παραπάνω εμφανίζεται το τανυστικό γινόμενο είναι ακριβώς επειδή τα πεδία βαθμίδας $\mathcal{A}_{\mu}^{\bar{a}}(X)$ είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων και άρα $N \times N$ πίνακες, ενώ οι γεννήτορες στη σπινοριακή αυτή αναπαράσταση είναι πίνακες 4×4. Αναλυτικότερα το παραπάνω ανάπτυγμα της συνοχής βαθμίδας επί των γεννητόρων της ομάδας βαθμίδας γράφεται

$$\mathcal{A}_{\mu}(X) = e_{\mu}{}^{a}(X) \otimes \bar{\gamma}_{a} + \omega_{\mu}{}^{a}(X) \otimes \tilde{\gamma}_{a} + A_{\mu}(X) \otimes i\mathbb{I} + \tilde{A}_{\mu}(X) \otimes \gamma_{5}, \tag{4.10}$$

από όπου γίνεται φανερό πως έχει αντιστοιχιστεί το πεδίο dreibein $e_{\mu}{}^{a}(X)$ στο γεννήτορα $\bar{\gamma}_{a}$ και ομοίως το spin connection $\omega_{\mu}{}^{a}(X)$ στον γεννήτορα $\tilde{\gamma}_{a}$ κατά παρόμοιο τρόπο με τη μη μεταθετική περίπτωση στη σχέση (2.10). Επίσης, η μη μεταθετικότητα οδήγησε στην εισαγωγή δύο επιπλέον πεδίων βαθμίδας τύπου U(1), των $A_{\mu}(X)$ και $\tilde{A}_{\mu}(X)$. Στη συνέχεια, κατά τα γνωστά, ορίζεται μία απειροστή παράμετρος βαθμίδας ϵ, η οποία επίσης αναπτύσσεται επί των γεννητόρων της άλγεβρας ως

$$\epsilon(X) = \xi^{a}(X) \otimes \bar{\gamma}_{a} + \lambda^{a}(X) \otimes \tilde{\gamma}_{a} + \epsilon_{0}(X) \otimes i\mathbb{I} + \tilde{\epsilon}_{0}(X) \otimes \gamma_{5}. \tag{4.11}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, την σχέση μετασχηματισμού των συναλλοίωτων συντεταγμένων $\delta\hat{X} = [\epsilon, \hat{X}]$ [1], μπορεί κανείς να εξάγει τους μετασχηματισμούς βαθμίδας των πεδίων βαθμίδας ως

$$\begin{aligned}
\delta e_{\mu}{}^{a} =& - i\left[X_{\mu} + A_{\mu}, \xi^{a}\right] + 2\left\{\omega_{\mu b}, \xi_{c}\right\}\epsilon^{abc} + 2\left\{e_{\mu b}, \lambda^{c}\right\}\epsilon^{abc} + 2i\left[\lambda_{a}, \tilde{A}_{\mu}\right] \\
& + 2i\left[\tilde{\epsilon}_{0}, \omega_{\mu a}\right] + i\left[\epsilon_{0}, e_{\mu a}\right], \\
\delta \omega_{\mu}{}^{a} =& - i\left[X_{\mu} + A_{\mu}, \lambda^{a}\right] + 2\left\{\omega_{\mu b}, \lambda_{c}\right\}\epsilon^{abc} - \frac{1}{2}\left\{e_{\mu b}, \xi_{c}\right\}\epsilon^{abc} + \frac{i}{2}\left[\xi^{a}, \tilde{A}_{\mu}\right] \\
& + i\left[\epsilon_{0}, \omega_{\mu}{}^{a}\right] + \frac{i}{2}\left[\tilde{\epsilon}_{0}, e_{\mu}{}^{a}\right], \\
\delta A_{\mu} =& - i\left[X_{\mu} + A_{\mu}, \epsilon_{0}\right] - i\left[\xi^{a}, e_{\mu a}\right] + 4i\left[\lambda^{a}, \omega_{\mu a}\right] - i\left[\tilde{\epsilon}_{0}, \tilde{A}_{\mu}\right], \\
\delta \tilde{A}_{\mu} =& - i\left[X_{\mu} + A_{\mu}, \tilde{\epsilon}_{0}\right] + 2i\left[\xi^{a}, \omega_{\mu a}\right] + 2i\left[\lambda^{a}, e_{\mu a}\right] + i\left[\epsilon_{0}, \tilde{A}_{\mu}\right],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

όπου έχει ληφθεί υπόψιν η σχέση (3.39).

Ενδιαφέρον έχει η παρατήρηση του μεταθετικού ορίου στους παραπάνω μετασχηματισμούς. Στο όριο αυτό, τα επιπλέον πεδία αποσυζεύγνυνται από εκείνα που σχετίζονται με την βαρύτητα και ως εκ τούτου μπορεί να τεθεί $A_{\mu} = \tilde{A}_{\mu} = 0$. Επίσης, δεδομένου πως $A_{\mu} = 0$, ο μεταθέτης $[X_{\mu}, f]$ παίρνει τη μορφή[2] $i\partial_{\mu}f$ και επομένως απομένουν μόνον οι μετασχηματισμοί των dreibein και spin connection

$$\delta e_{\mu}^{a} = -\partial_{\mu}\xi^{a} - 4\xi_{b}\omega_{\mu c}\varepsilon^{abc} - 4\lambda_{b}e_{\mu c}\varepsilon^{abc}, \tag{4.13}$$

και

$$\delta \omega_{\mu}^{a} = -\partial_{\mu}\lambda^{a} + \xi_{b}e_{\mu c}\varepsilon^{abc} - 4\lambda_{b}\omega_{\mu c}\varepsilon^{abc}, \tag{4.14}$$

[1] λόγω του πως είναι ορισμένοι οι γεννήτορες δεν γίνεται χρήση του γενικού τύπου (3.29) καθώς παραλείπεται η φανταστική μονάδα i.

[2] Μιας και όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1.1, ο τελεστής παραγώγισης θεωρήθηκε ως $\partial_{i}A = [d_{i}, A]$.

αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό παρατηρείται επίσης πως κατόπιν των παρακάτω επαναορισμών των πεδίων, γεννητόρων και παραμέτρων:

$$\bar{\gamma}_a \to \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} P_a, \quad \tilde{\gamma}_a \to -4J_a, \quad 4\lambda_a \to \lambda^a$$

και

$$\xi \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \to -\xi^a, \quad e_\mu{}^a \to \frac{\sqrt{\lambda}}{2i} e_\mu{}^a, \quad \omega_\mu{}^a \to -\frac{1}{4}\omega_\mu{}^a,$$

οι παραπάνω μετασχηματισμοί ταυτίζονται ακριβώς με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς της σχέσης (2.28), που παρουσιάστηκαν στην μεταθετική περίπτωση.

Το επόμενο βήμα προς την κατασκευή της ζητούμενης θεωρίας βαθμίδας, είναι η εύρεση του τανυστή δύναμης πεδίου. Δεδομένου πως ο χώρος επί του οποίου κατασκευάζεται η θεωρία βαθμίδας είναι τύπου Lie σε συμφωνία με τη σχέση (3.36), ο τανυστής αυτός θα δίνεται από την

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] - i\lambda C_{\mu\nu}{}^\rho \hat{X}_\rho. \tag{4.15}$$

Δεδομένου πως και αυτός ανήκει στην άλγεβρα, θα μπορεί κι αυτός να αναλυθεί επί των γενητόρων της ως

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(X) = T_{\mu\nu}{}^a(X) \otimes \bar{\gamma}_a + R_{\mu\nu}{}^a(X) \otimes \tilde{\gamma}_a + F_{\mu\nu}(X) \otimes i\mathbb{I} + \tilde{F}_{\mu\nu}(X) \otimes \gamma_5. \tag{4.16}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (4.8), (4.10), (4.15) και (4.16), βρίσκεται η έκφραση των συνιστωσών τανυστών ως

$$\boxed{\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^a =& i\left[X_\mu + A_\mu, e_\nu{}^a\right] - i\left[X_\nu + A_\nu, e_\mu^a\right] \\ &- 2\epsilon^{abc}\left(\{e_{\mu b}, \omega_{\nu c}\} + \{\omega_{\mu b}, e_{\nu c}\}\right) \\ &+ 2i\left(\left[\omega_\mu{}^a, \tilde{A}_\nu\right] - \left[\omega_\nu{}^a, \tilde{A}_\mu\right]\right) - i\lambda C_{\mu\nu}{}^\rho e_\rho{}^a, \end{aligned}} \tag{4.17}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^a =& i\left[X_\mu + A_\mu, \omega_\nu{}^a\right] - i\left[X_\nu + A_\nu, \omega_\mu{}^a\right] \\ &+ \epsilon^{abc}\left(\frac{1}{2}\{e_{\mu b}, e_{\nu c}\} - 2\{\omega_{\mu b}, \omega_{\nu c}\}\right) \\ &+ \frac{i}{2}\left(\left[e_\mu{}^a, \tilde{A}_\nu\right] - \left[e_\nu{}^a, \tilde{A}_\mu\right]\right) - i\lambda C_{\mu\nu}{}^\rho \omega_\rho{}^a, \end{aligned}} \tag{4.18}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\mu\nu} =& i\left[X_\mu + A_\mu, X_\nu + A_\nu\right] - i\left[e_\mu{}^a, e_{\nu a}\right] + 4i\left[\omega_\mu{}^a, \omega_{\nu a}\right] \\ &- i\left[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu\right] - i\lambda C_{\mu\nu}{}^\rho\left(X_\rho + A_\rho\right), \end{aligned}} \tag{4.19}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} =& i\left[X_\mu + A_\mu, \tilde{A}_\nu\right] - i\left[X_\nu + A_\nu, \tilde{A}_\mu\right] \\ &+ 2i\left(\left[e_\mu{}^a, \omega_{\nu a}\right] + \left[\omega_\mu{}^a, e_{\nu a}\right]\right) - i\lambda C_{\mu\nu}{}^\rho \tilde{A}_\rho. \end{aligned}} \tag{4.20}$$

Και πάλι, στο μεταθετικό όριο, κάνοντας χρήση των επαναορισμών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, οι δύο πρώτες σχέσεις από τις παραπάνω ανάγονται ξανά στις (2.28).

4.2 Η Ευκλείδεια περίπτωση

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, η ομάδα βαθμίδας που θα χρησιμοποιηθεί τώρα είναι η ισοδύναμη ομάδα της SO(4), η ομάδα σπιν Spin(4) η οποία είναι ισόμορφη με την ομάδα SU(2) × SU(2). Ξανά, λόγω του ότι οι αντιμεταθέτες δεν κλείνουν, προκύπτει η ανάγκη για διαλογή μίας συγκεκριμένης αναπαράστασης, καθώς και να επεκταθεί η άλγεβρα ώστε να περιέχει τα στοιχεία που προκύπτουν από τους αντιμεταθέτες. Αυτό οδηγεί στη διαλογή της U(2) × U(2) ως ομάδα βαθμίδας της θεωρίας. Κάθε μία από τις U(2) θα αποτελείται από τους πίνακες Pauli καθώς και από τον ταυτοτικό πίνακα και επομένως η συνολική ομάδα U(2) × U(2) θα περιέχει τους εξής 4 × 4 πίνακες

$$J_a^L = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_0^L = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

και

$$J_a^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, J_0^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Προκειμένου τα πεδία βαθμίδας να ερμηνευτούν κατάλληλα, θεωρούνται οι παρακάτω γεννήτορες

$$P_a = \frac{1}{2}\left(J_a^L - J_a^R\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & -\sigma_a \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

$$M_a = \frac{1}{2}\left(J_a^L + J_a^R\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\mathbb{I} = J_0^L + J_0^R, \tag{4.25}$$

$$\gamma_5 = J_0^L - J_0^R. \tag{4.26}$$

Δεδομένων των σχέσεων μετάθεσης και αντιμετάθεσης των πινάκων του Pauli, οι παραπάνω γεννήτορες θα ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&[P_a, P_b] = i\epsilon_{abc}M_c, \quad [P_a, M_b] = i\epsilon_{abc}P_c, \quad [M_a, M_b] = i\epsilon_{abc}M_c, \\
&\{P_a, P_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbb{I}, \quad \{P_a, M_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}\gamma_5, \quad \{M_a, M_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbb{I}, \\
&[\gamma_5, P_a] = [\gamma_5, M_a] = 0, \quad \{\gamma_5, P_a\} = 2M_a, \quad \{\gamma_5, M_a\} = 2P_a.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Στη συνέχεια, όπως και προηγουμένως, ορίζονται οι συναλλοίωτες συντεταγμένες ως

$$\hat{X}_\mu = X_\mu \otimes i\mathbb{I} + e_\mu^a \otimes P_a + \omega_\mu^a \otimes M_a + A_\mu \otimes i\mathbb{I} + \tilde{A}_\mu \otimes \gamma_5 \tag{4.28}$$

καθώς και το ανάπτυγμα πάνω στους γεννήτορες της άλγεβρας, μιας απειροστής παραμέτρου βαθμίδας

$$\epsilon = \xi^a \otimes P_a + \lambda^a \otimes M_a + \epsilon_0 \otimes i\mathbb{I} + \tilde{\epsilon}_0 \otimes \gamma_5 \tag{4.29}$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση και πάλι ο μετασχηματισμός των συναλλοίωτων παραγώγων παράγει τους μετασχηματισμούς των συνιστωσών πεδίων βαθμίδας, ενώ μέσω του ορισμού του τανυστή δύναμης πεδίου μη μεταθετικότητας τύπου Lie, προκύπτουν παρόμοιες σχέσεις με της προηγούμενης περίπτωσης, για τα πεδία βαθμίδας.

4.3 Η δράση της ασαφούς τρισδιάστατης βαρύτητας

Τέλος, προκειμένου η θεωρία να είναι ολοκληρωμένη, θα πρέπει να βρεθεί η δράση η οποία θα την περιγράφει. Δεδομένου πως όλη η διαδικασία ξεκίνησε από την τρισδιάστατη βαρύτητα Einstein που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.1, η προφανής επιλογή για τη ζητούμενη δράση θα ήταν μία τύπου Chern-Simons. Για τη Λορεντζιανή περίπτωση στον $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$ η δράση που προτείνεται [20] είναι η ακόλουθη

$$S_0 = \frac{1}{g^2} \operatorname{Tr} \left(\frac{i}{3} C^{\mu\nu\rho} X_\mu X_\nu X_\rho - m^2 X_\mu X^\mu \right), \tag{4.30}$$

η οποία κατόπιν ελαχιστοποίησής της οδηγεί στην εξής πεδιακή εξίσωση

$$[X_\mu, X_\nu] - 2im^2 C_{\mu\nu}{}^\rho X_\rho = 0, \tag{4.31}$$

η οποία επιδέχεται ως λύση τον ασαφή χώρο $\mathbb{R}^{2,1}_\lambda$, όταν $2m^2 = \lambda$. Εάν τώρα, είχε θεωρηθεί η Ευκλείδεια περίπτωση $\mathbb{R}^3_\lambda$, η μόνη διαφορά θα ήταν πως αντί για το $C_{\mu\nu}{}^\rho$, στη θέση του θα υπήρχε ο τανυστής $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, ενώ η παράμετρος θα ήταν $2m^2 = -\lambda$.

Επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή των πεδίων βαθμίδας της θεωρίας στην παραπάνω δράση. Προς το σκοπό αυτό στην έκφραση της δράσης αντικαθίστανται οι συντεταγμένες από τις συναλλοίωτες συντεταγμένες και κατόπιν ακολουθεί ελαχιστοποίηση της δράσης, από όπου δίνονται οι πεδιακές εξισώσεις. Τελικά, η δράση θα γράφεται συναρτήσει τω πεδίων βαθμίδας και επομένως θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται και ένα ίχνος πάνω στους δείκτες βαθμίδας. Τα μόνα μη μηδενικά ίχνη από τους γεννήτορες της $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ είναι τα

$$\operatorname{tr}_G (\bar{\gamma}_a \bar{\gamma}_b) = 4\eta_{ab} \tag{4.32}$$

και

$$\operatorname{tr}_G (\tilde{\gamma}_a \tilde{\gamma}_b) = -16\eta_{ab}. \tag{4.33}$$

Επομένως, η δράση γράφεται συναρτήσει των πεδίων βαθμίδας ως

$$S = \frac{1}{g^2} \operatorname{Trtr}_G \left(\frac{i}{3} C^{\mu\nu\rho} \hat{X}_\mu \hat{X}_\nu \hat{X}_\rho - \frac{\lambda}{2} \hat{X}_\mu \hat{X}^\mu \right), \tag{4.34}$$

όπου το πρώτο ίχνος είναι πάνω στους $N \times N$ πίνακες των συντεταγμένων, ενώ το δεύτερο ίχνος tr_G είναι πάνω στους 4×4 πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες της ομάδας βαθμίδας $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Η παραπάνω δράση μπορεί επίσης να γραφτεί συναρτήσει του τανυστή δύναμης πεδίου ως

$$S = \frac{1}{6g^2} \operatorname{Trtr}_G \left(i C^{\mu\nu\rho} \hat{X}_\mu \mathcal{R}_{\nu\rho} \right) + S_\lambda \tag{4.35}$$

όπου για τον όρο S_λ ισχύει

$$S_\lambda = -\frac{\lambda}{6g^2} \operatorname{Trtr}_G \left(\hat{X}_\mu \hat{X}^\mu \right), \tag{4.36}$$

που προφανώς μηδενίζεται στο όριο που το λ τείνει στο μηδέν. Αντικαθιστώντας τώρα, τις αναλυτικές εκφράσεις των ιχνών που αναφέρθηκαν παραπάνω, στην τελευταία σχέση της δράσης (4.35), αυτή παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} S =& \frac{2}{3g^2} \operatorname{Tr} iC^{\mu\nu\rho} \left(e_{\mu a} T_{\nu\rho}{}^{a} - 4\omega_{\mu a} R_{\nu\rho}{}^{a} - (X_\mu + A_\mu) F_{\nu\rho} + \tilde{A}_\mu \tilde{F}_{\nu\rho} \right) \\ & - \frac{2\lambda}{3g^2} \operatorname{Tr} \left(e_\mu{}^a e_a{}^\mu - 4\omega_\mu{}^a \omega_a{}^\mu - (X_\mu + A_\mu)(X^\mu + A^\mu) + \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Από την έκφραση αυτή, γίνεται φανερό πως στο μεταθετικό όριο, εάν γίνουν οι επαναορισμοί των πεδίων βαθμίδας, των γεννητόρων και των παραμέτρων βαθμίδας, η παραπάνω δράση ταυτίζεται με αυτή τρισδιάστατης βαρύτητας Einstein που φαίνεται στη σχέση (2.22). Ταυτόχρονα όμως η δράση αυτή περιέχει έναν επιπλέον όρο που σχετίζεται με τα επιπλέον πεδία βαθμίδας, και ο οποίος μπορεί να αποσυζευχθεί μονάχα στο μεταθετικό όριο.

Τέλος, ελαχιστοποιώντας τη δράση ως προς τις συναλλοίωτες συντεταγμένες, προκύπτουν οι εξής εξισώσεις κίνησης

$$T_{\mu\nu}{}^{a} = 0, \quad R_{\mu\nu}{}^{a} = 0, \quad F_{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \tag{4.38}$$

Και πάλι στο μεταθετικό όριο, οι πρώτες δύο ταυτίζονται με τις εξισώσεις κίνησης της τρισδιάστατης βαρύτητας Einstein.

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε η κατασκευή μίας θεωρίας βαθμίδας για τη τρισδιάστατη βαρύτητα σε μη μεταθετικό πλαίσιο. Ακολουθώντας τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αρχικά ορίστηκαν οι συναλλοίωτες συντεταγμένες και από το νόμο μετασχηματισμού τους βρέθηκαν οι μετασχηματισμοί βαθμίδας των πεδίων βαθμίδας της θεωρίας. Έπειτα, λόγω του ότι η μη μεταθετικότητα του τρισδιάτατου χώρου που χρησιμοποιήθηκε είναι τύπου Lie, πάρθηκε η κατάλληλη έκφραση του τανυστή δύναμης πεδίου και εξήχθησαν οι εκφράσεις των συνιστωσών πεδίων βαθμίδας. Τελικά, θεωρήθηκε δράση τύπου Chern-Simons, από την ελαχιστοποίηση της οποίας προέκυψαν εξισώσεις κίνησης οι οποίες ταυτίζονται με τις αντίστοιχες της τρισδιάστατης βαρύτητας Einstein στο μεταθετικό όριο.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει κανείς, προκειμένου να δομήσει κατάλληλη θεωρία βαθμίδας που να περιγράφει την βαρυτική αλληλεπίδραση στις τρείς διαστάσεις, τόσο σε κοινούς, όσο και σε μη μεταθετικούς χώρους. Όπως φαίνεται, το πλεονέκτημα που έχει η τρισδιάστατη έναντι της τετραδιάστατης περίπτωσης είναι ότι η πρώτη μπορεί να προκύψει κατά άμεσο τρόπο ως θεωρία βαθμίδας, σε αντίθεση με την τετραδιάστατη, για την οποία πρέπει να ακολουθηθούν κάποια επιπλέον βήματα.

Από την παραπάνω μελέτη γίνεται φανερό πως είναι δυνατόν να περιγράψει κανείς την $(2+1)$-διάστατη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας σε μη συναλλοίωτους μεταθετικούς χώρους, γεγονός που ίσως συμβάλλει προς τη κβάντωση της βαρύτητας και στην ενοποίησή της τελικά με τις υπόλοιπες τρεις θεμελιώδεις δυνάμεις (Ηλεκτρομαγνητισμός, Ισχυρή και Ασθενής πυρηνική). Επίσης, αποτελεί ενθαρρυντικό αποτέλεσμα προς την κατεύθυνση αυτή το γεγονός ότι στο μεταθετικό όριο ανακτάται η γνωστή τρισδιάστατη βαρύτητα στις τρεις διαστάσεις.

Παράρτημα Α΄

Νόμοι Μετασχηματισμού Τανυστών

Παρακάτω παρατίθενται οι νόμοι σύμφωνα με τους οποίους μετασχηματίζονται οι συνιστώσες διαφόρων τάξεων τανυστών, κατά την αλλαγή μεταβλητών $x^\mu \to x'^\mu$:

- $\Phi(x) \to \Phi'(x') = \Phi(x)$ βαθμωτό - τανυστής τάξης $(0, 0)$
- $V^\mu(x) \to V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$ διάνυσμα - τανυστής τάξης $(1, 0)$
- $V_\mu(x) \to V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu(x)$ 1-μορφή - τανυστής τάξης $(0, 1)$
- $X^{\mu\nu}(x) \to X'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} X^{\rho\sigma}(x)$ τανυστής τάξης $(0, 2)$
- $X_{\mu\nu}(x) \to X'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} X_{\rho\sigma}(x)$ τανυστής τάξης $(2, 0)$
- $X^\mu{}_\nu(x) \to X'^\mu{}_\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} X^\rho{}_\sigma(x)$ τανυστής τάξης $(1, 1)$

Παράρτημα Β′

Διαφορικές μορφές

Διαφορικές μορφές, ή αλλιώς p-forms, ονομάζονται τανυστές τάξης $(0, p)$, οι οποίοι είναι αντισυμμετρικοί ως προς την εναλλαγή κάποιου πλήθους δεικτών τους [21].

Β′.1 Το εξωτερικό γινόμενο

Το εξωτερικό γινόμενο ή wedge product ενός α p-form και ενός β q-form είναι ένα $(p+q)$-form το οποίο ορίζεται ως

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \left(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha\right) \tag{Β′.1}$$

και έχει συνιστώσες

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{[\mu_1 \ldots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \ldots \mu_{p+q}]}. \tag{Β′.2}$$

Επίσης έχει τις εξής ιδιότητες:

- Προσεταιριστική: $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- Επιμεριστική: $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
- Μη μεταθετική: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$, όπου α ένα p-form και β ένα q-form.
- $dx^i \wedge dx^i$, και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν μπορεί να ορισθεί $n+1$-form εντός manifold διάστασης n.

Επιστρατεύοντας το εξωτερικό γινόμενο, ένα p-form μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} \mathbf{dx}^{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{dx}^{(\mu_p)} \\ &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} \mathbf{dx}^{(\mu_1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}^{(\mu_p)} \end{aligned} \tag{Β′.3}$$

Β′.2 Εξωτερική Παράγωγος

Η εξωτερική παράγωγος ενός p-form α είναι ένα $(p+1)$-form το οποίο έχει συνιστώσες

$$(d\alpha)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} \alpha_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}]} \,, \tag{Β′.4}$$

και ικανοποιεί τις ιδιότητες

- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \,,$
- $d^2 = 0 \,,$
- Εάν το α είναι p-form όπου π ισούται με την διάσταση του μανιφολδ, τότε το α ονομάζεται top form και ισχύει για αυτό $d\alpha = 0$

Β′.3 Στοιχειώδης όγκος

Εντός ενός n-διάσταστου manifold, το n-form

$$\epsilon = \mathbf{dx}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}^{(n)} \tag{Β′.5}$$

αποτελεί στοιχειώδη όγκο , ενώ οι συνιστώσες του $\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ δίνονται από το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi - Civita

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \begin{cases} +1 \text{ εάν τα } (\mu_1 \cdots \mu_n) \text{ βρίσκονται σε άρτια μετάθεση των } (1, \cdots, n) \\ -1 \text{ εάν τα } (\mu_1 \cdots \mu_n) \text{ βρίσκονται σε περιττή μετάθεση των } (1, \cdots, n) \\ 0 \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \tag{Β′.6}$$

Τέλος, ένα p-form μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\alpha = \phi \mathbf{dx}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}^{(n)} \,, \tag{Β′.7}$$

όπου ϕ βαθμωτό. Έτσι, για $\phi = \sqrt{|g|}$, με $g = \det g_{\mu\nu}$ όπου $g_{\mu\nu}$ μετρική Riemann, ορίζεται ο στοιχειώδης όγκος Riemann

$$\sqrt{|g|} \mathbf{dx}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}^{(n)} \tag{Β′.8}$$

ή αλλιώς,

$$\int dV = \int \sqrt{|g|} \mathbf{dx}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}^{(n)} \tag{Β′.9}$$

Β′.4 Τελεστής Hodge Δυϊκότητας

Εντός ενός n-διάστατου manifold, ο τελεστής $*$ ονομάζεται Hodge Star Duality Operator και αποτελεί χάρτη που απεικονίζει ένα p-form σε ένα $(n-p)$-φορμ που ορίζεται ως εξής:

$$(*\alpha)_{\mu_{p+1},\mu_n} = \frac{1}{p!}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu_{p+1}\ldots\mu_n}\sqrt{|g|}g^{\mu_1\nu_1}\ldots g^{\mu_p\nu_p}\alpha_{\nu_1\ldots\nu_p}\,, \tag{Β′.10}$$

ή διαφορετικά, δρώντας πάνω στο p-form εξωτερικό γινόμενο

$$*\left(\alpha^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{\mu_p}\right) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\ldots\mu_n}\alpha^{\mu_p+1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{\mu_n}\,, \tag{Β′.11}$$

και ικανοποιεί της εξής ιδιότητες:

- $*^2\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha\,,$
- $*(\alpha\wedge\beta) = \alpha\times\beta\,,$ και
- $*[\alpha\wedge(*\beta)] = \alpha\cdot\beta\,.$

Βιβλιογραφία

[1] J. Yepez, "Einstein's vierbein field theory of curved space," 2011.

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and D. Kaiser, *Gravitation.* Princeton University Press, 2017.

[3] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity.* Cambridge University Press, 2020.

[4] E. Witten, "2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system," *Nuclear Physics B*, vol. 311, no. 1, pp. 46–78, 1988.

[5] S. Carlip, "Lectures on (2+1) dimensional gravity," *J. Korean Phys. Soc.*, vol. 28, pp. S447–S467, 1995.

[6] T. Ortín, *Gravity and Strings.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2004.

[7] K. S. Stelle and P. C. West, "Spontaneously broken de sitter symmetry and the gravitational holonomy group," *Phys. Rev. D*, vol. 21, pp. 1466–1488, Mar 1980.

[8] J. Zanelli, "Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008)," in *7th Mexican Workshop on Particles and Fields*, 2 2005.

[9] T. W. B. Kibble and K. S. Stelle, *Gauge theories of gravity and supergravity.* 1985.

[10] M. Douglas and N. Nekrasov, "Noncommutative field theory," *Reviews of Modern Physics*, vol. 73, p. 977–1029, Nov 2001.

[11] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess, "Gauge theory on noncommutative spaces," *The European Physical Journal C*, vol. 16, p. 161–167, Aug 2000.

[12] J. Madore, "The Fuzzy sphere," *Class. Quant. Grav.*, vol. 9, pp. 69–88, 1992.

[13] P. Vitale and J.-C. Wallet, "Noncommutative field theories on $\mathbb{R}^3_\lambda$ towards uv/ir mixing freedom," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, Apr 2013.

[14] P. Vitale, "Noncommutative field theory on $\mathbb{R}^3_\lambda$," *Fortschritte der Physik*, vol. 62, p. 825–834, May 2014.

[15] J.-C. Wallet, "Exact partition functions for gauge theories on $\mathbb{R}^3_\lambda$," *Nuclear Physics B*, vol. 912, p. 354–373, Nov 2016.

[16] A. Chatzistavrakidis, L. Jonke, D. Jurman, G. Manolakos, P. Manousselis, and G. Zoupanos, "Noncommutative gauge theory and gravity in three dimensions," *Fortschritte der Physik*, vol. 66, p. 1800047, Aug 2018.

[17] G. Manolakos, D. Jurman, P. Manousselis, and G. Zoupanos, "Gravity as a gauge theory on three-dimensional noncommutative spaces," *Proceedings of Corfu Summer Institute 2017 "Schools and Workshops on Elementary Particle Physics and Gravity" — PoS(CORFU2017)*, Aug 2018.

[18] G. Manolakos and G. Zoupanos, "Non-commutativity in unified theories and gravity," 2018.

[19] A. Van Proeyen, "Tools for supersymmetry," *Ann. U. Craiova Phys.*, vol. 9, no. I, pp. 1–48, 1999.

[20] A. Géré, P. Vitale, and J.-C. Wallet, "Quantum gauge theories on noncommutative three-dimensional space," *Physical Review D*, vol. 90, Aug 2014.

[21] P. G. Labropoulos, "Differential forms - lecture notes,"