

Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας

42.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθεί η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια του βολφραμίου και, μέσω αυτής, το *κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας*, από το οποίο προκύπτει ο νόμος των Fowler-Nordheim.

42.2. Εισαγωγή

Είναι γνωστό, ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου είναι παγιδευμένα σε αυτό και υπό κανονικές συνθήκες δεν μπορούν να εξέλθουν. Να εξέλθουν μπορούν μόνο όταν αυτά με κάποιον τρόπο διεγερθούν και αποκτήσουν πρόσθετη κινητική ενέργεια.

Υπάρχουν 5 βασικά είδη εκπομπής ηλεκτρονίων από τα μέταλλα, που τυγχάνουν ευρείας εφαρμογής στην επιστημονική έρευνα και υψηλή τεχνολογία. Στις τέσσερις περιπτώσεις ο ρόλος της θερμοκρασίας είναι ασήμαντος και, επομένως, τα φαινόμενα αυτά μπορούν να παρατηρηθούν και σε θερμοκρασία 0 K. Σε μία ειδική περίπτωση, η θερμοκρασία παίζει αποφασιστικό ρόλο και λαμβάνει χώρα μόνο σε υψηλές θερμοκρασίες, της τάξης 1000-2500 K.

Καθώς τα 5 είδη εκπομπής σχετίζονται με τον τρόπο διέγερσης του μετάλλου, αυτά συσχετίζονται με 5 φαινόμενα που είναι γνωστά ως:

1. **Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο**, που χρησιμοποιείται στα φωτοστοιχεία, στους φωτοπολλαπλασιαστές, στα φωτόμετρα, στους φασματογράφους κ.λπ.
2. **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από προσπίπτοντα ηλεκτρόνια**, που χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία (SEM-Secondary Electron Microscope), στους φωτοπολλαπλασιαστές, στους πολλαπλασιαστές ηλεκτρονίων, στις διόπτρες νυκτός κ.λπ.
3. **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από τα προσπίπτοντα ιόντα**, που χρησιμοποιείται στους ενδεικτικούς λαμπτήρες νέου, στους οικονομικούς λαμπτήρες φθορισμού, στους λέιζερ αερίου κ.λπ.
4. **Φαινόμενο θερμιονικής εκπομπής ηλεκτρονίων**, που χρησιμοποιείται στις οθόνες των τηλεοράσεων και υπολογιστών, στους καθοδικούς σωλήνες των παλμογράφων, στους φούρνους μικροκυμάτων, στις πηγές ακτινών X και σε ηλεκτρονικές λυχνίες μεγάλης ισχύος κ.λπ.
5. **Φαινόμενο ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων** (cold emission), που χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία, στις νέες οθόνες υπολογιστών και τηλεοράσεων, στη μικροσκοπία ατομικής κλίμακας (Tunneling Atomic Force Microscope) κ.λπ.

Αντικείμενο μελέτης στην Άσκηση αυτή είναι το πέμπτο φαινόμενο, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων, πίσω από το οποίο κρύβεται το *κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας*. Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην ψυχρή εκπομπή, αλλά και στα 4 φαινόμενα που αναφέραμε, μεγάλο ρόλο παίζει το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου ϕ , το οποίο για προφανείς λόγους ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που δαπανάται για να εξέλθει το ηλεκτρόνιο από το μέταλλο.

Η θερμοκρασία και το έργο εξόδου επηρεάζουν έντονα τη θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων, αλλά επηρεάζουν ελαφρώς και τη ψυχρή εκπομπή, όταν η θερμοκρασία του μετάλλου είναι υψηλή. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο, έστω σύντομα, να εξετάσουμε πρώτα το φαινόμενο της θερμοϊονικής εκπομπής ηλεκτρονίων.

42.2.1. Θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων

Η εκπομπή ηλεκτρονίων αυτού του είδους παρατηρείται όταν σε συνθήκες υψηλού κενού το μέταλλο θερμαίνεται σε θερμοκρασίες της τάξης των 1000-2500 K.

Η θερμοϊονική εκπομπή επηρεάζεται πολύ έντονα από το έργο εξόδου και τη θερμοκρασία του μετάλλου και υπακούει στη σχέση Richardson:

$$I = const \times T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right), \quad (42.1)$$

όπου ϕ είναι το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου από το μέταλλο, T είναι η απόλυτη θερμοκρασία και k είναι η σταθερά του Boltzmann.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε επιφάνειες με μικρό έργο εξόδου (1-1,5 eV), ασθενής θερμοϊονική εκπομπή παρατηρείται ακόμη και σε θερμοκρασία δωματίου. Για παράδειγμα, σε ένα φωτοστοιχείο ή φωτοπολλαπλασιαστή, σε θερμοκρασία δωματίου, η φωτοευαίσθητη ουσία της φωτοδιόδου εκπέμπει περίπου 100-1000 ηλεκτρόνια το δευτερόλεπτο, τα οποία δημιουργούν το λεγόμενο ρεύμα σκότους (dark current), από το οποίο εξαρτάται το *κατώφλι* ευαισθησίας του φωτομετρητή.

42.2.2. Ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων

Η φράση «*ψυχρή εκπομπή*» (*cold emission*) σχετίζεται με το γεγονός, ότι η εκπομπή αυτή λαμβάνει χώρα σε θερμοκρασίες δωματίου. Το φαινόμενο παρατηρείται όταν στην επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται πολύ ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο, της τάξης των 10^9 - 10^{10} V/m και χαρακτηρίζεται με τις εξής ιδιαιτερότητες:

(α) Σε αντίθεση με τα 4 άλλα είδη εκπομπής που αναφέραμε, στην ψυχρή εκπομπή τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο δίχως αυτά προηγουμένως να διεγερθούν.

(β) Η ένταση της εκπομπής σχεδόν καθόλου δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία και παραμένει σχεδόν αμετάβλητη στο θερμοκρασιακό διάστημα 0-300 K.

(γ) Στην εκπομπή πεδίου παρατηρούνται ασυνήθιστα υψηλές τιμές πυκνότητας του ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας του μετάλλου), που είναι 4-5 τάξεις υψηλότερες από αυτές της θερμοϊονικής εκπομπής. Συχνά την ψυχρή εκπομπή την αποκαλούν και εκπομπή πεδίου (*field emission*), λόγω συσχέτισης του φαινομένου με το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο.

42.2.3. Σύνοψη ιστορική αναδρομή

Στις πρώτες προσπάθειες ερμηνείας του φαινομένου ξεχώρισε η πρόταση Shottky, ο οποίος πρότεινε την άποψη ότι η εκπομπή πεδίου είναι ένα ξεχωριστό είδος θερμιονικής εκπομπής, όπου το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο μειώνει το έργο εξόδου σε μηδενικά επίπεδα, δηλαδή είναι θερμιονική εκπομπή από επιφάνεια με σχεδόν μηδενικό έργο εξόδου.

Με σχετικά απλούς συλλογισμούς έδειξε (βλ. Άσκηση 31, *Θερμιονική Εκπομπή Ηλεκτρονίων*), ότι ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του μετάλλου μειώνει το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου κατά έναν παράγοντα

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{e^3 F}{4\pi\epsilon_0}}, \quad (42.2)$$

όπου F είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (V/m), ϵ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου. Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία της τάξης των 10^9 V/m, η μείωση του έργου εξόδου είναι περίπου 1 eV.

Η υπόθεση Shottky ελέγχθηκε πειραματικά στα πειράματα της θερμιονικής εκπομπής, όπου διαπιστώθηκε η ορθότητά της, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο πράγματι μειώνει το έργο εξόδου και η μείωση αυτή ακολουθεί τη σχέση (42.2).

Παρότι η ιδέα του Shottky επιβεβαιώθηκε πειραματικά, επομένως ήταν ορθή στα πλαίσια της θερμιονικής εκπομπής, παρά ταύτα δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει την ανεξαρτησία της ψυχρής εκπομπής από τη θερμοκρασία.

Προβληματική ήταν και η μείωση του έργου εξόδου, καθώς από την πειραματική μελέτη προέκυπτε το συμπέρασμα ότι σε πεδία της τάξης των 10^9 V/m το έργο εξόδου πρέπει σχεδόν να μηδενίζεται, ενώ η σχέση (42.2) δίνει μείωση *μόνο* κατά ≈ 1 eV (ακριβέστερα, $1,9 \times 10^{-19}$ J).

Σημειώνουμε ότι στο βολφράμιο, στο οποίο γίνονταν τα περισσότερα πειράματα της ψυχρής εκπομπής, το έργο εξόδου είναι 4,5 eV ($\phi = 4,5$ eV).

Επίσης, το μοντέλο Shottky αδυνατούσε να ερμηνεύσει τη μεγάλη πυκνότητα ρεύματος που παρατηρείται στην ψυχρή εκπομπή, που είναι 4-5 τάξεις μεγαλύτερη από αυτή της θερμιονικής.

Σταδιακά εδραιώθηκε η πεποίθηση ότι η μείωση του έργου εξόδου σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία όντως λαμβάνει χώρα, αλλά η μείωση αυτή δεν επεκτείνεται έως το μηδενισμό του έργου εξόδου. Επομένως, η ψυχρή εκπομπή είναι ένα νέο φαινόμενο, ανεξάρτητο από αυτό της θερμιονικής.

Μεγάλη και ουσιαστική πρόοδο στην ερμηνεία της ψυχρής εκπομπής σημειώθηκε στο μοντέλο που προτάθηκε από τους Fowler-Nordheim (1928), οι οποίοι πρότειναν την υπόθεση ότι πίσω από την εκπομπή πεδίου κρύβεται το *κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας*.

42.2.4. Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας. Κβαντομηχανικός φορμαλισμός

Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται όταν ένα ηλεκτρόνιο προσπίπτει κάθετα σε ένα *φράγμα δυναμικού* («ενεργειακό εμπόδιο»), το οποίο, ή θα το διαπεράσει ή θα ανακλαστεί.

Πρέπει να διακρίνουμε το φράγμα δυναμικού (Σχ. 42.1β) από το βήμα (σκαλοπάτι), το πλάτος του οποίου είναι άπειρο (Σχ. 42.1α).

Σύμφωνα με τις αρχές της Κλασικής Φυσικής, το ηλεκτρόνιο θα *προσπεράσει* το βήμα (σκαλοπάτι) δυναμικού μόνο όταν η κινητική του ενέργεια είναι μεγαλύτερη από το «ύψος» του

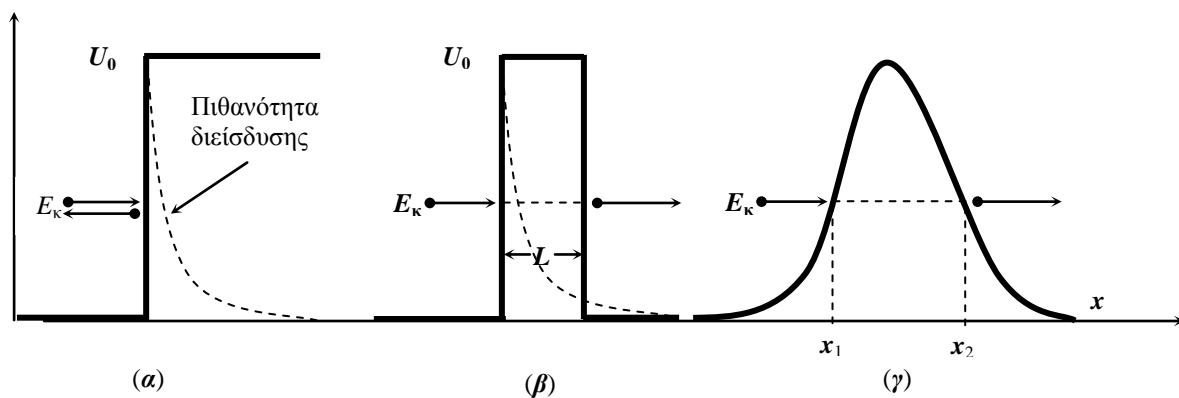
δυναμικού σκαλοπατιού. Με μικρότερη ενέργεια το ηλεκτρόνιο θα ανακλαστεί.

Σύμφωνα, όμως, με τις αρχές της Κβαντικής Μηχανικής, το ηλεκτρόνιο μπορεί να διεισδύσει στην απαγορευμένη ενεργειακά περιοχή, αλλά η πιθανότητα αυτής της διείσδυσης είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του βάρους διείσδυσης.

Όταν το ηλεκτρόνιο προσπίπτει σε βήμα δυναμικού άπειρου πλάτους, με ενέργεια μικρότερη από το «ύψος» του δυναμικού βήματος, θα ανακλαστεί τελικά, ωστόσο έχει πεπερασμένη πιθανότητα να εισχωρήσει στην απαγορευμένη (ενεργειακά) περιοχή πριν ανακλαστεί.

Όταν το ηλεκτρόνιο προσπίπτει σε φράγμα δυναμικού «μικρού» πλάτους, το ηλεκτρόνιο ή θα ανακλαστεί ή θα το διαπεράσει, καθώς έχει μη μηδενική πιθανότητα να το διαπεράσει ακόμη και όταν η κινητική του ενέργεια είναι μικρότερη από το «ύψος» του φράγματος. Αυτοί είναι οι όροι με τους οποίους περιγράφεται το φαινόμενο σήραγγας και, όπως τονίσαμε, οφείλεται στις κυματικές ιδιότητες των ηλεκτρονίων. Θυμίζουμε, ότι η διείσδυση των κυμάτων στην απαγορευμένη περιοχή παρατηρείται ακόμη και σε πειράματα της Κλασικής Οπτικής (βλ. Παράρτημα 1).

Η προαναφερθείσα πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος αυξάνει σημαντικά, όταν το πλάτος του φράγματος έχει διαστάσεις ίδιας τάξης με το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου.



Σχήμα 42.1. Βήμα (σκαλοπάτι, α) και φράγματα δυναμικού (β και γ).

Στα μέταλλα, για παράδειγμα, ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K, το μεγαλύτερο μέρος των ελεύθερων ηλεκτρονίων κινείται με τη λεγόμενη ενέργεια Fermi, E_f , που στο βολφράμιο είναι 5,7 eV. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με τις ενέργειες αυτές έχουν μήκος κύματος de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_f}} = 5,13 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 5,1 \text{ \AA}$$

όπου h είναι η σταθερά του Πλάνκ και m_e είναι η μάζα του ηλεκτρονίου ($h = 6,625 \times 10^{-34}$ Js, $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg, $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J). Επομένως, στο βολφράμιο, για να είναι σχετικά μεγάλη η πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος, το πλάτος του πρέπει να είναι της τάξης 5×10^{-10} m.

Γενικότερα, υπό κανονικές συνθήκες και απουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εξέλθουν από το μέταλλο καθώς, ακόμη και αυτά που κινούνται με ενέργεια Fermi, στην επιφάνεια του μετάλλου αντιμετωπίζουν ένα βήμα δυναμικού (σκαλοπάτι

δυναμικού) που είναι υψηλότερο από την ενέργεια Fermi κατά 4,5 eV (έργο εξόδου, ϕ). Επομένως, στο βολφράμιο, το «ύψος» του δυναμικού σκαλοπατιού, σε βολτ, είναι

$$U_0 = 5,7 \text{ V} + 4,5 \text{ V} = 10,2 \text{ V}.$$

Στο ηλεκτρόνιο που κινείται με την ενέργεια Fermi, προκειμένου να εξέλθει από το μέταλλο, πρέπει να του καταβληθεί πρόσθετη ενέργεια της τάξης του ϕ . Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο η πρόσθετη ενέργεια καταβάλλεται από τα φωτόνια, ενώ στη θερμοϊονική εκπομπή από τη θερμότητα κ.λπ. Αλλά στο «σκοτάδι» και σε θερμοκρασία 0 K, το ηλεκτρόνιο μπορεί να εξέλθει από το μέταλλο μόνο μέσω του φαινομένου σήραγγας.

Στα μέταλλα, για τα ηλεκτρόνια το δυναμικό εμπόδιο είναι σκαλοπάτι ή βήμα δυναμικού άπειρου πλάτους. Προκειμένου να εκδηλωθεί το φαινόμενο σήραγγας, το βήμα δυναμικού πρέπει με κάποιον τρόπο να μετατραπεί σε φράγμα δυναμικού σχετικά μικρού «πλάτους», της τάξης των 5 Å. Η μετατροπή αυτή πραγματοποιείται μέσω εφαρμογής ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου.

Στα ζητήματα αυτού του είδους, στην Κβαντική Μηχανική εισάγεται η έννοια της διαπερατότητας του φράγματος δυναμικού $D(E_k)$, η οποία εξαρτάται από το «ύψος» και το πλάτος του, αλλά και την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Η διαπερατότητα του δυναμικού φράγματος ορίζεται ως

$$D(E_k) = \frac{I_D}{I_0}, \quad (42.3)$$

όπου I_0 και I_D είναι οι εντάσεις των κυμάτων de Broglie, του προσπίπτοντος και αυτού που διαπέρασε το φράγμα, αντίστοιχα. Ουσιαστικά, η διαπερατότητα ορίζει το ποσοστό των ηλεκτρονίων που διαπερνά το φράγμα.

Για ένα ορθογώνιο φράγμα, όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχ. 42.1β, όταν $E_k < U_0$, η διαπερατότητα ορίζεται από τη σχέση

$$D(E_k) = \frac{E_k}{U_0} \left(1 - \frac{E_k}{U_0}\right) \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_k)}\right), \quad (42.4)$$

όπου L και U_0 είναι το πλάτος και το ύψος του δυναμικού φράγματος, ενώ m και E_k είναι η μάζα και η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα.

Όταν το δυναμικό φράγμα έχει περιπλοκότερο σχήμα (Σχ. 42.1γ), οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν τη σχέση

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E_k)} dx\right), \quad (42.5)$$

όπου D_0 είναι ο προεκθετικός παράγον της σχέσης (42.4).

Από τη σχέση (42.4) προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η διαπερατότητα του δυναμικού φράγματος είναι εκθετική συνάρτηση του πλάτους ή του «μήκους της ενεργειακής σήραγγας» L , αλλά και της διαφοράς $U_0 - E_k$, δηλαδή εξαρτάται έντονα και από τις κινητικές ενέργειες των ηλεκτρονίων. Συνεπώς, το φαινόμενο σήραγγας άμεσα συνδέεται με την ενεργειακή κατάσταση των ηλεκτρονίων μέσα στο μέταλλο, το «μήκος της σήραγγας», αλλά και το ύψος του δυναμικού φράγματος που αυτά αντιμετωπίζουν στην επιφάνεια του μετάλλου.

42.3. Ενεργειακή κατάσταση των ελεύθερων ηλεκτρονίων στα μέταλλα

42.3.1. Κβαντομηχανική προσέγγιση

Καθώς το φαινόμενο σήραγγας δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία, η σχετική ανάλυση γίνεται σε θερμοκρασία 0 K. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις τυχόν διαφοροποιήσεις που δημιουργούνται σε θερμοκρασίες δωματίου.

Η κβαντική θεωρία των μετάλλων, στην απλούστερή μορφή της θεωρεί ότι τα ηλεκτρόνια που προκαλούν την ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι ελεύθερα.

Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο περιγράφεται με ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται χωρίς σκέδαση και ανακλάται μόνο στην επιφάνεια του μετάλλου. Έτσι διαμορφώνεται ένα σύστημα στάσιμων κυμάτων με διακριτό φάσμα, όμοιο με αυτό των στάσιμων ακουστικών κυμάτων. Η μεγάλη πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων επιτρέπει την αντικατάσταση του διακριτού φάσματος με ένα συνεχές, όπου η σχετική μαθηματική ανάλυση είναι ευκολότερη.

Από την απαγορευτική αρχή του Pauli προκύπτει, ότι ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν «παγώνουν» την κίνησή τους. Τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη μπορούν να καταλάβουν μόνο δύο ηλεκτρόνια. Τα υπόλοιπα θα κατανομηθούν σε ενεργειακές στάθμες κατά ζεύγη, από τις χαμηλότερες προς τις υψηλότερες τιμές. Έτσι, είναι αναγκασμένα να καταλάβουν μια περιοχή ενεργειακών σταθμών που εκτείνεται από το μηδέν έως κάποια μέγιστη τιμή E_{max} , που φέρει ειδική ονομασία και ονομάζεται *ενέργεια Fermi*, E_f .

Για την τιμή της ενέργειας Fermi, E_f , οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν:

$$E_f = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{8m_e \pi^2}, \quad (42.6)$$

όπου \hbar είναι η σταθερά του Planck, m_e είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και n είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου.

Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων, ανά μονάδα ενέργειας και ανά μονάδα όγκου, δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{8\pi}{h^3} (2m_e)^3 \sqrt{E}, \quad (42.7)$$

ενώ ο αριθμός dN των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E + dE$ είναι ανάλογος της πυκνότητας των ενεργειακών καταστάσεων και της πιθανότητας $f(E)$ να είναι κατειλημμένη η κατάσταση με ενέργεια E . Η τελευταία προκύπτει από τη στατιστική Fermi-Dirac και είναι:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}. \quad (42.8)$$

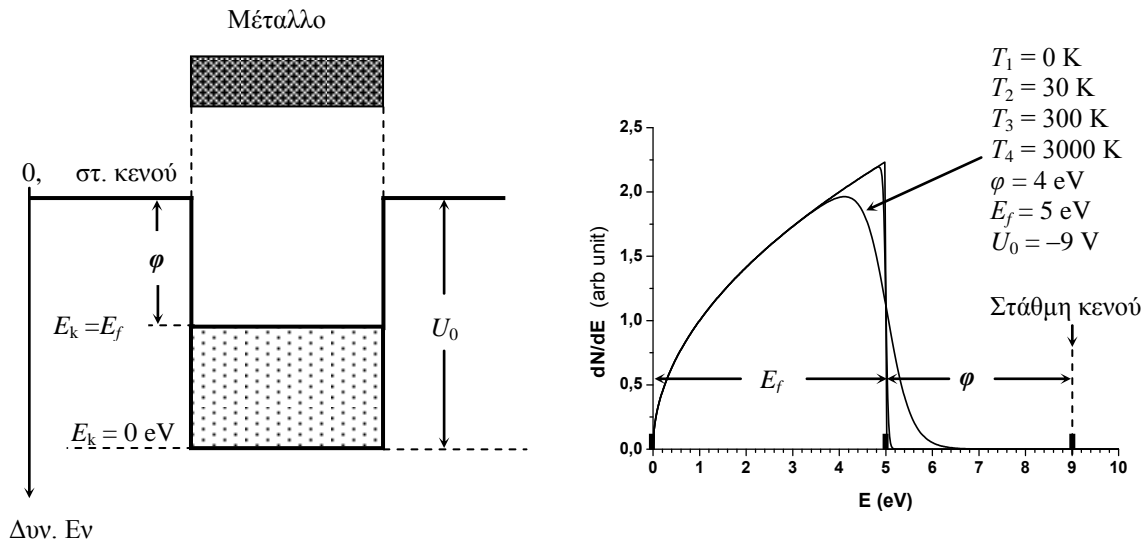
Έτσι, ο αριθμός dN είναι:

$$dN = \rho(E)f(E)dE = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m_e^3} \frac{\sqrt{E}dE}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}.$$

Επομένως, η πυκνότητα των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E+dE$ είναι

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E)f(E) = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m_e^3} \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}. \quad (42.9)$$

Στο Σχ. 42.2β δίνεται η γραφική παράσταση της ενεργειακής κατανομής των ηλεκτρονίων σε διάφορες θερμοκρασίες, δηλαδή όταν αυτά διεγείρονται θερμικά. Προφανώς, στη θερμοϊονική εκπομπή συμμετέχουν μόνον τα ηλεκτρόνια της εκθετικής «ουράς», που κινούνται προς την επιφάνεια του στερεού και οι κινητικές τους ενέργειες υπερβαίνουν το άθροισμα $E_f + \phi$, δηλαδή το ύψος του δυναμικού σκαλοπατιού U_0 . Αντίθετα, στην ψυχρή εκπομπή τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο απευθείας από τη στάθμη Fermi, ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K.



Σχήμα 42.2. Ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων σε θερμοκρασίες 0, 30, 300 και 3000 K, σε μέταλλο με $E_f = 5 \text{ eV}$, $\phi = 4 \text{ eV}$ και $U_0 = -9 \text{ V}$.

42.3.2. Μετατροπή του σκαλοπατιού δυναμικού σε φράγμα

Σύμφωνα με την απλουστευμένη εικόνα του φαινομένου, σε θερμοκρασία 0 K, τα «ελεύθερα» ηλεκτρόνια του μετάλλου, κινούμενα με ενέργειες Fermi (E_f) κάθετα προς την επιφάνεια, ανακλώνται πλήρως προς το εσωτερικό όταν αυτά προσκρούουν στο βήμα (σκαλοπάτι) δυναμικού, το «ύψος» (U_0) του οποίου είναι μεγαλύτερο από την ενέργεια Fermi.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στο βολφράμιο, το έργο εξόδου είναι 4,5 eV, ενώ η ενέργεια Fermi είναι 5,7 eV. Επομένως στο μέταλλο αυτό το ύψος του δυναμικού σκαλοπατιού, σε βολτ, είναι

$$U_0 = 5,7 \text{ V} + 4,5 \text{ V} = 10,2 \text{ V}.$$

Βλέπουμε ότι ακόμη και τα πιο ενεργά ελεύθερα ηλεκτρόνια που κινούνται με ενέργειες Fermi, υπό κανονικές συνθήκες δεν μπορούν να εξέλθουν στο κενό.

Στην εικόνα αυτή η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου, έξω από το μέταλλο, θεωρείται σταθερή και, συνήθως, η τιμή της επιλέγεται μηδέν (Σχ. 42.3α). Την τιμή αυτή την αποκαλούν συχνά *στάθμη κενού* ή *στάθμη αναφοράς*.

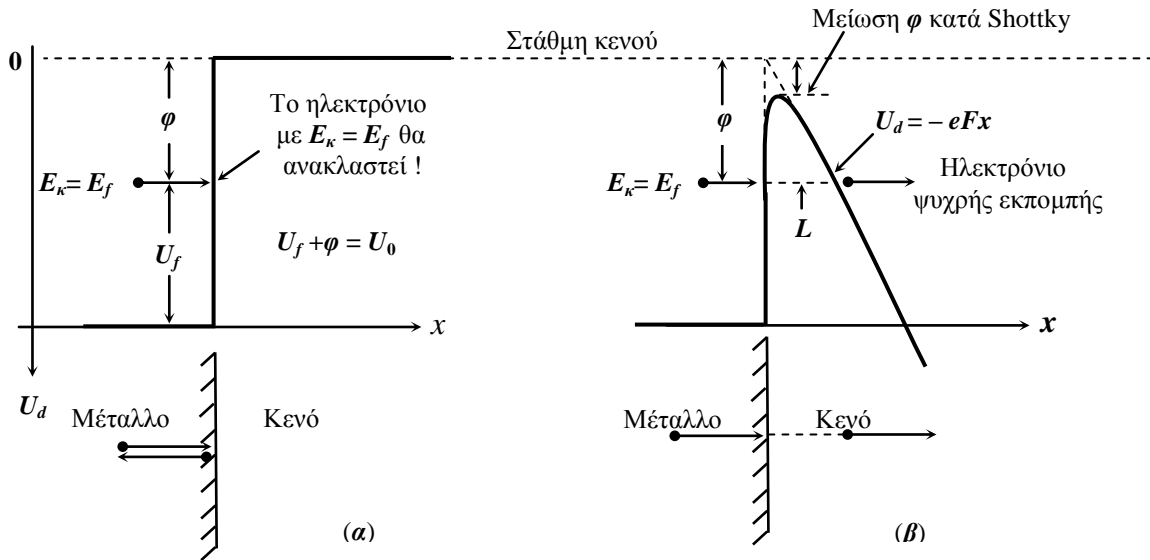
Έξω από το μέταλλο, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου διαφοροποιείται όταν, με ένα βοηθητικό ηλεκτρόδιο, στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο F (Σχ. 42.3β).

Έξω από το μέταλλο, παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται γραμμικά, υπακούοντας στη σχέση

$$U_d = -eFx, \quad (42.10)$$

όπου x είναι η απόσταση του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια του μετάλλου.

Η ένταση του φαινομένου σε μεγάλο βαθμό εξαρτάται από το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας» L , που «βλέπουν» τα ηλεκτρόνια όταν αυτά κινούνται με ενέργειες Fermi, καθώς στο μέταλλο, το μεγαλύτερο μέρος των ηλεκτρονίων κινείται με την ενέργεια αυτή. Προφανώς, το μήκος αυτό εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 42.3. Μετατροπή του βήματος σε φράγμα δυναμικού.

Το μήκος αυτό υπολογίζεται από το «τριγωνικό φράγμα δυναμικού» με τις κάθετες πλευρές ϕ και L , που βλέπουμε στο Σχ. 42.3β. Σε απόσταση L (διακεκομμένη βάση του δυναμικού τριγώνου) έξω από το μέταλλο, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται κατά ϕ :

$$-\phi = -eFL. \quad \text{Επομένως,} \quad L = \frac{\phi}{eF}. \quad (42.11\alpha,\beta)$$

Βλέπουμε ότι το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας», L , είναι αντιστρόφως ανάλογο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου F , αλλά εξαρτάται και από το έργο εξόδου ϕ .

Σημειώνουμε, ότι στην ψυχρή εκπομπή συμμετέχουν και τα ηλεκτρόνια που οι ενέργειές τους είναι μικρότερες από την ενέργεια Fermi, αλλά η ποσοστιαία συμμετοχή των ηλεκτρονίων αυτών μειώνεται σημαντικά, καθώς αντιμετωπίζουν «σήραγγα» μεγαλύτερου μήκους (βλ. Σχ. 42.3β).

42.4. Νόμος των Fowler-Nordheim

Το 1928, στο περιοδικό Proc. Roy. Soc. London, Series A 119 (1928), 173, οι δύο ερευνητές δημοσίευσαν την εργασία “*Electron emission in intense electric fields*”, στην οποία υπολόγισαν τη ροή των ηλεκτρονίων, ανά μονάδα επιφάνειας του μετάλλου, όταν αυτά διαπερνούν το φράγμα δυναμικού μέσω του φαινομένου σήραγγας και εξέρχονται στο κενό, δηλαδή μέσω μίας

διαδικασίας που είναι απαγορευμένη στην Κλασσική Φυσική.

Οι ερευνητές υπολόγισαν την πυκνότητα του ρεύματος ηλεκτρονίων που εξέρχεται από το μέταλλο όταν, σε θερμοκρασία 0 K, στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται ένα κάθετο ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο F . Οι σχετικοί υπολογισμοί οδήγησαν στη σχέση:

$$j_e = P \frac{e^2}{2\pi h} \frac{F^2}{\varphi} \exp\left(-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{2\pi h e} \frac{\varphi^{3/2}}{F}\right), \quad (42.12)$$

όπου e και m είναι το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου, h είναι η σταθερά Planck, φ είναι το έργο εξόδου και P είναι μία σταθερά του μετάλλου:

$$P = \frac{\sqrt{\varphi U_f}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{U_f}}. \quad (42.13)$$

Στη σχέση (42.13), το U_f παριστάνει το δυναμικό Fermi, σε V (Σχ. 43.3α).

Στο βολφράμιο, για παράδειγμα, $\varphi = 4,5$ και $U_f = 5,7$ (V), επομένως η σταθερά αυτού του μετάλλου είναι

$$P = \frac{\sqrt{\varphi U_f}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{U_f}} = \frac{\sqrt{4,5 \times 5,7}}{\sqrt{4,5} + \sqrt{5,7}} = 1,12 \quad (\sqrt{V}),$$

και, όπως βλέπουμε, διαφέρει ελάχιστα από τη μονάδα.

Διευκρινίζουμε, ότι στην ανάλυσή τους, οι δύο ερευνητές δεν έλαβαν υπόψη την ελαφρά μείωση του έργου εξόδου λόγω φαινομένου Shottky. Επομένως, στη σχέση (42.12), το φ παριστάνει την τιμή του έργου εξόδου *απουσία* του ηλεκτρικού πεδίου. Με την έννοια αυτή, η σχέση (42.12) είναι προσεγγιστική, αλλά στις επόμενες εργασίες που ακολούθησαν διαπιστώθηκε ότι σε γενικές γραμμές η σχέση αυτή σωστά αποδίδει την εξέλιξη του φαινομένου, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή υπακούει σε μια σχέση τύπου

$$j = CF^2 \exp\left(-\frac{B}{F}\right), \quad (42.14)$$

όπου C και B είναι σταθερές.

Στη σχέση (42.12), αντικαθιστώντας τα μεγέθη m , e , και h με τις αντίστοιχες τιμές στο σύστημα μονάδων SI ($m = 9,109 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C, $h = 6,6256 \times 10^{-34}$ Js) και, επίσης, επιλέγοντας για το έργο εξόδου τη μονάδα eV, η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$j = P \times 6,168 \times 10^{-2} \frac{F^2}{\varphi} \exp\left(-6,827 \times 10^9 \frac{\varphi^{3/2}}{F}\right) \text{ (A/m}^2\text{)}, \quad (42.15)$$

όπου η πυκνότητα του ρεύματος είναι σε μονάδες A/m², το φ σε V, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε μονάδες V/m.

42.4.1. Επίδραση της θερμοκρασίας στο φαινόμενο της ψυχρής εκπομπής

Στα πειράματα των ερευνητών παρατηρήθηκε μια ασθενής εξάρτηση του φαινομένου από τη θερμοκρασία, δηλαδή μια ελαφρά ενίσχυση της ψυχρής εκπομπής σε υψηλότερες θερμοκρασίες.

Η εξάρτηση αυτή *ερμηνεύεται* εύκολα αν λάβουμε υπόψη το γεγονός, ότι σε θερμοκρασίες $T > 0$, στην ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων πάνω από την στάθμη Fermi εμφανίζεται μια εκθετική «ουρά». Τα ηλεκτρόνια της ουράς που έχουν κινητικές ενέργειες $E_k > E_f + \varphi$ είναι υπεύθυνα για τη θερμοϊονική εκπομπή.

Τα ηλεκτρόνια, όμως, που κινούνται με κινητικές ενέργειες $E_f < E_k < E_f + \varphi$, δεν μπορούν να εξέλθουν θερμοϊονικά και για το λόγο αυτό το μεγαλύτερο τους μέρος ανακλάται στο εσωτερικό του μετάλλου, ωστόσο ένα μικρό μέρος εξέρχεται από το μέταλλο μέσω φαινομένου σήραγγας, καθώς για τα ηλεκτρόνια αυτά το μήκος της σήραγγας είναι μικρότερο από αυτό στη στάθμη Fermi. Πλην όμως, το ποσοστό αυτών των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρό και ελάχιστα επηρεάζει το συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων που εξέρχονται από τη στάθμη Fermi.

42.5. Έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim

Παρά τις πειραματικές δυσκολίες, ο νόμος των Fowler-Nordheim μελετήθηκε ποιοτικά, αλλά και ποσοτικά, όπου διαπιστώθηκε καλή συμφωνία θεωρίας-πειράματος. Τονίζουμε, ότι η επαλήθευση αυτού του νόμου συνιστά *πειραματική απόδειξη* ορθότητας της υπόθεσης περί κυματικών ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων.

Η δυσκολία των πειραμάτων αυτών πηγάζει από την ανάγκη χρησιμοποίησης ηλεκτρικών πεδίων της τάξης των 10^9 - 10^{10} V/m. Τα ισχυρά αυτά ηλεκτρικά πεδία δημιουργούνται συνήθως μέσα σε μια δίοδο υψηλού κενού, στα ηλεκτρόδια της οποίας εφαρμόζεται σχετικά μεγάλη τάση.

Το ηλεκτρόδιο που πολώνεται αρνητικά κατασκευάζεται από μέταλλο που έχει πολύ μεγάλη καμπυλότητα (λεπτό σύρμα ή ακίδα). Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις και λειτουργεί ως συλλέκτης των ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής.

Στις πειραματικές διατάξεις, τα αναγκαία ηλεκτρικά πεδία στην επιφάνεια του μετάλλου επιτυγχάνονται με τάσεις της τάξης των 3-10 kV. Για παράδειγμα, σε έναν ομοαξονικό κυλινδρικό πυκνωτή που αποτελείται από ένα λεπτό μεταλλικό σύρμα, ακτίνας r , και έναν κοίλο μεταλλικό κύλινδρο που το περιβάλλει, ακτίνας R , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του λεπτού σύρματος είναι

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}. \quad (42.16\alpha)$$

Έτσι, στο κυλινδρικό σύστημα ηλεκτροδίων, με $r = 1 \mu\text{m}$ (10^{-6} m) και $R = 10$ cm, στην επιφάνεια του λεπτού σύρματος το ηλεκτρικό πεδίο είναι 2×10^9 V/m, σε τάση 11,5 kV.

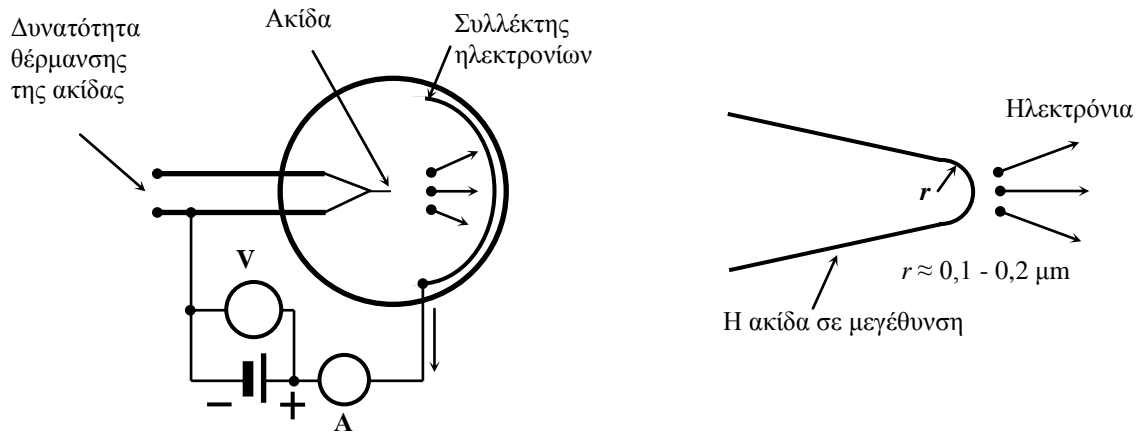
Στον ομόκεντρο σφαιρικό πυκνωτή, η αντίστοιχη σχέση είναι

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{R}{R-r}, \quad (42.16\beta)$$

ενώ στην κορυφή του παραβολοειδούς εκ περιστροφής, το οποίο σε ικανοποιητικό βαθμό αποδίδει την ακίδα, η αντίστοιχη σχέση είναι

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)} \quad (42.17)$$

Στην παρούσα Άσκηση χρησιμοποιείται μία λυχνία υψηλού κενού με δύο ηλεκτρόδια, τύπου ακίδα-σφαίρα (Σχ. 42.4). Η ακίδα, που λειτουργεί ως *πηγή των ηλεκτρονίων*, τοποθετείται στο κέντρο της σφαίρας και μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων εφαρμόζεται υψηλή τάση μερικών κιλοβόλτ, δηλαδή σχετικά μικρή τάση, καθώς η κορυφή της ακίδας κατασκευάζεται σκόπιμα με ακτίνα περίπου 0,1-0,2 μm . Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις (μερικά εκατοστά) και λειτουργεί ως *συλλέκτης των ηλεκτρονίων*.



Σχήμα 42.4. Βασική διάταξη μελέτης της ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων.

Έξω από τη λυχνία, στη διαδρομή του ρεύματος ηλεκτρονίων συνδέεται ένας ευαίσθητος μετρητής ρεύματος, καθώς τα μετρούμενα ρεύματα είναι της τάξης 10^{-6} - 10^{-9} A.

Στη λυχνία αυτή, προφανώς, η σχέση (42.17) μόνο κατά προσέγγιση αποδίδει το ηλεκτρικό πεδίο στην κορυφή της ακίδας, καθότι η γεωμετρία της ακίδας είναι άγνωστη.

Λόγω μικρών γεωμετρικών διαστάσεων της ακίδας, το ρεύμα των ηλεκτρονίων αποκτά μετρήσιμες τιμές σε σχετικά μικρές τάσεις, γεγονός που συνιστά μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των συσκευών, ενώ στο κυλινδρικό σύστημα οι εφαρμοζόμενες τάσεις είναι πολύ υψηλότερες, αλλά και σύρμα με διάμετρο 1 μm δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί.

Στα *μειονεκτήματα* των συσκευών τύπου ακίδα-σφαίρα πρέπει να αναφέρουμε την *αβεβαιότητα* της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας ($\approx 30\%$). Η αβεβαιότητα αυτή προέρχεται από την αβεβαιότητα στην τιμή της διαμέτρου της κορυφής της ακίδας, καθώς είναι δύσκολο να μετρηθεί με ακρίβεια, όπως, επίσης, και του ακαθορίστου γεωμετρικού σχήματός της. Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι στην κορυφή της ακίδας η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι *ανάλογη* της εφαρμοζόμενης τάσης και, κατ' εκτίμηση, αποδίδεται από τη σχέση (42.17). Συνεπώς, στις διατάξεις αυτές είναι σχετικά δύσκολος ο ποσοτικός έλεγχος του νόμου, ωστόσο προσφέρονται για τον έλεγχο τον *ποιοτικό*.

42.5.1. Ποιοτικός έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim. Μέθοδος

Ο ακριβής προσδιορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας δεν είναι *απαραίτητος* όταν ο νόμος ελέγχεται ποιοτικά.

Για τον ποιοτικό έλεγχο, την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας μπορούμε να την ορίσουμε ως

$$F = \xi U, \quad (42.18)$$

όπου U είναι η τάση που εφαρμόζεται μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων, ενώ ξ είναι ο γεωμετρικός παράγοντας της ακίδας:

$$\xi = \frac{1}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)}$$

Η σχέση (42.12), που παρήχθη από τους Fowler-Nordheim, μπορεί να γραφτεί ως

$$I_{\psi} = C U^2 \exp\left(-\frac{B}{U}\right), \quad (\text{A}) \quad (42.19)$$

όπου I_{ψ} είναι το συνολικό ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, S είναι το «μέσο» εμβαδόν της ακίδας, ενώ οι σταθερές C και B είναι:

$$C = \frac{SP\xi^2 \times 10^{-2}}{\phi} \quad (\text{AV}^{-2}) \quad (42.20)$$

και

$$B = \frac{6,83 \times 10^9 \phi^{3/2}}{\xi}, \quad (\text{V}) \quad (42.21)$$

αντίστοιχα.

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (42.19), προκύπτει τελικά:

$$\ln\left(\frac{I_{\psi}}{U^2}\right) = \ln C - \frac{B}{U}. \quad (42.22)$$

Σε τιμές $x = 1/U$ και $y = \ln(I_{\psi}/U^2)$, η γραφική παράσταση της σχέσης (42.22) παριστάνει μια ευθεία που τέμνει τον άξονα y στο σημείο $\ln C$, ενώ η κλίση της είναι $-B$.

Μετρώντας το ρεύμα της ακίδας συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης, στο βαθμό που ο νόμος **Fowler-Nordheim** ισχύει, τα επεξεργασμένα πειραματικά σημεία αναμένεται να πέσουν πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση B , από την οποία μπορεί να υπολογιστεί ο γεωμετρικός παράγοντας ξ της ακίδας και, στη συνέχεια, να υπολογιστεί (εκτιμηθεί) η ακτίνα καμπυλότητας r της κορυφής της ακίδας.

42.6. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μια βάση, πάνω στην οποία στηρίζεται μια γυάλινη λυχνία-δίοδος υψηλού κενού. Η διάταξη περιλαμβάνει την πηγή υψηλής τάσης, με τον ψηφιακό μετρητή της, όπως, επίσης, και ένα υποτυπώδες ηλεκτρόμετρο (βλ. Παράρτημα 2).

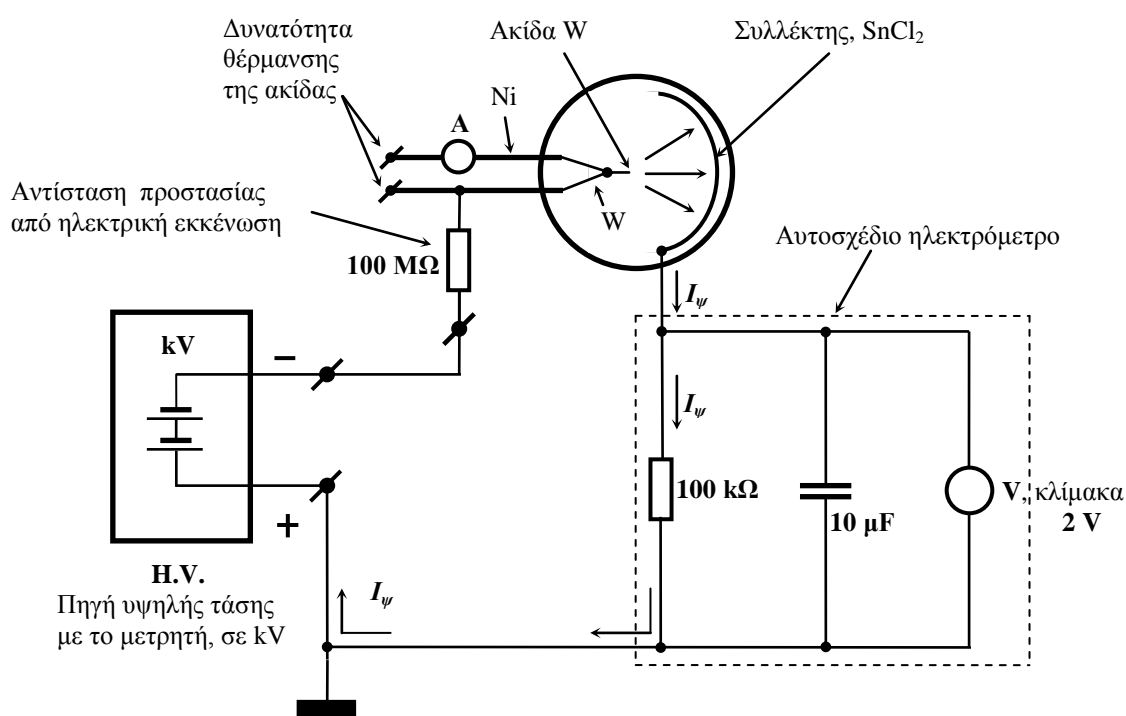
Η ακίδα βρίσκεται στο δεξί άκρο ενός λεπτού ευθύγραμμου σύρματος από βολφράμιο, μήκους περίπου 4 mm (Σχ. 42.5). Το σύρμα αυτό είναι κολλημένο στο κέντρο άλλου σύρματος, από βολφράμιο και αυτό, σε σχήμα « > », που σε άλλα πειράματα δύναται να θερμανθεί με μεγάλα ρεύματα της τάξης των 1-2 A.

Η διάμετρος του ευθύγραμμου σύρματος είναι σχετικά μεγάλη (50 μm), αλλά με μια ειδική ηλεκτροχημική κατεργασία το δεξί άκρο αποκτά σχήμα κώνου, στην κορυφή του οποίου βρίσκεται ένα μικρό ημισφαίριο με ακτίνα περίπου 0,1- 0,2 μm .

Η ακίδα βρίσκεται στο κέντρο της γυάλινης σφαίρας και δύναται να θερμανθεί, μέσω θέρμανσης του νύματος που έχει σχήμα «>». Η διάμετρος της γυάλινης σφαίρας είναι 8,0 cm.

Ο συλλέκτης των ηλεκτρονίων, υπό μορφή ενός λεπτού και διαφανούς αγωγίμου στρώματος από χλωριούχο κασσίτερο SnCl_2 , έχει σχήμα ημισφαιρίου και βρίσκεται απέναντι από την ακίδα, στην εσωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας.

Το λεπτό στρώμα του συλλέκτη (SnCl_2) βρίσκεται σε ηλεκτρική επαφή με τα ηλεκτρόδια τροφοδοσίας ενός φούρνου (δεν εικονίζεται στο σχήμα), που προορίζεται για την εξάχνωση των ατόμων βαρίου στην επιφάνεια της ακίδας. Μέσω των ηλεκτροδίων αυτού του φούρνου, τα ηλεκτρόνια της ψυχρής εκπομπής οδηγούνται έξω από τη γυάλινη σφαίρα και, μέσω της μετρητικής αντίστασης 100 $\text{k}\Omega$ του ηλεκτρομέτρου, καταλήγουν τελικά στο θετικό πόλο της πηγής υψηλής τάσης.



Σχήμα 42.5. Πειραματική διάταξη της Άσκησης.

Για λόγους ασφαλείας, ο μετρητής ρεύματος προτιμάται να βρίσκεται στο δυναμικό της Γης, δηλαδή στο δυναμικό που βρίσκεται και ο πειραματιστής. Ουσιαστικά, μέσω της μετρητικής αντίστασης 100 $\text{k}\Omega$ (Σχ. 42.6), το δυναμικό του συλλέκτη (SnCl_2) βρίσκεται πρακτικά στο δυναμικό της Γης, ενώ η μεγάλη αρνητική τάση εφαρμόζεται στην ακίδα, μέσω της προστατευτικής αντίστασης 100 $\text{M}\Omega$ ($10^8 \Omega$).

Προσοχή (!!!). Η τυχόν παράκαμψη της προστατευτικής αντίστασης των 100 $\text{M}\Omega$ θα προκαλέσει άμεση **καταστροφή** της ακίδας, καθώς η παρουσία της αποτρέπει τη δημιουργία ηλεκτρικού τόξου μεταξύ της ακίδας και του συλλέκτη. Λόγω πολύ μεγάλης έντασης του

ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή της ακίδας, το ηλεκτρικό τόξο δημιουργείται ακόμη και σε συνθήκες υψηλού κενού.

Αν για κάποιο λόγο δημιουργηθεί τόξο υψηλού κενού, τα θετικά ιόντα του τόξου που βομβαρδίζουν την ακίδα με ενέργειες μερικών χιλιάδων eV θα προκαλέσουν εξάχνωση του υλικού της (spattering), με αναπόφευκτη σημαντική αύξηση της διαμέτρου της. Αυτό θα προκαλέσει μείωση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας, επομένως και μείωση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής σε επίπεδα μικρότερα από τη διακριτική ικανότητα του μετρητή ρεύματος. Η κατάσταση αυτή, με δεδομένη πηγή υψηλής τάσης, ισοδυναμεί με καταστροφή της ακίδας!

Τονίζουμε ότι μικρή και αργή καταστροφή της ακίδας γίνεται και δίχως το ηλεκτρικό τόξο, λόγω κίνησης των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό της λυχνίας, η οποία προκαλεί παραγωγή θετικών ιόντων που βομβαρδίζουν την ακίδα. Η παραγωγή αυτών των ιόντων εξαρτάται από την πίεση των αερίων στο εσωτερικό της λυχνίας, που δεν την ελέγχουμε, αλλά και από τον αριθμό των ηλεκτρονίων που συμμετέχουν στην κίνηση από την ακίδα προς τον συλλέκτη, δηλαδή από την ένταση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής, που μπορούμε να την ελέγξουμε.

Έτσι, προκειμένου να παραταθεί η διάρκεια ζωής της ακίδας, είναι σκόπιμο το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής να μην υπερβαίνει τα 1000 nA. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, πρέπει να συντομεύουμε τη χρονική διάρκεια των καταστάσεων όπου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι μεγάλο.

Στην πηγή υψηλής τάσης, η τάση εξόδου ρυθμίζεται με ένα ποτενσιόμετρο 10 στροφών, ο άξονας του οποίου βρίσκεται στην πρόσοψη του οργάνου. Στην πηγή, επίσης, είναι ενσωματωμένος ένας ψηφιακός μετρητής της παραγόμενης υψηλής τάσης, η ακρίβεια του οποίου είναι μικρή (2 ψηφίων, με διακριτική ικανότητα 0,1 kV).

Σύμφωνα με τα μετρολογικά χαρακτηριστικά του μετρητή, οι παράμετροι ακρίβειας του ενσωματωμένου στην πηγή βολτόμετρου είναι:

Accuracy: $\pm 3 \%$, Resolution: 0,1 kV,

ενώ το άνω όριο της ολίσθησης του μηδενός ($h_u r_u$ - ο σταθερός όρος του σφάλματος στα ψηφιακά όργανα), η κατασκευάστρια εταιρεία δεν το αναφέρει, γεγονός που μας επιτρέπει (αναγκάζει) να το θεωρήσουμε μηδέν.

Η πειραματική διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα πειράματα, καθώς παρέχει τη δυνατότητα θέρμανσης της ακίδας, επικάλυψης της ακίδας με άτομα του βαρίου, όπως επίσης και λειτουργία της συσκευής ως ηλεκτρονικό μικροσκόπιο με μεγέθυνση $R_{\text{συλ}}/r_{\text{ακ}} \approx 10^6$. Για το σκοπό αυτό η εσωτερική επιφάνεια του συλλέκτη είναι καλυμμένη με λεπτό στρώμα φθορίζουσας ουσίας (ZnS), η οποία εκπέμπει φως όταν τη βομβαρδίζουν ηλεκτρόνια με ενέργειες 5-10 keV. Η δυνατότητες αυτές δεν αξιοποιούνται στην Άσκηση αυτή και παραμένουν ανενεργές.

Βιβλιογραφία

Σ. Τραχανάς, *KBANTOMΗΧΑΝΙΚΗ Ι*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.

42.7. Εκτέλεση

Προσοχή. Στην Άσκηση αυτή χρησιμοποιούνται υψηλές τάσεις (έως 10 kV), που είναι επικίνδυνες για τη ζωή. Για το λόγο αυτό:

(α) δεν επιτρέπεται στον σπουδαστή να θέτει σε λειτουργία την πηγή της υψηλής τάσης.

(β) η συναρμολόγηση του ηλεκτρικού κυκλώματος της Άσκησης πρέπει να γίνεται **αυστηρά με κλειστή** την πηγή υψηλής τάσης και μόνο με ειδικά καλώδια ασφαλείας.

(γ) την πηγή της υψηλής τάσης τη θέτει σε λειτουργία *μόνο ο επιβλέπων* καθηγητής της Άσκησης, εφόσον βεβαιωθεί πρώτα ότι το ηλεκτρικό κύκλωμα είναι συναρμολογημένο σωστά.

Η εκτέλεση της Άσκησης περιλαμβάνει 2 πειράματα: ένα *δοκιμαστικό* και το *κύριο*.

Στο δοκιμαστικό πείραμα γίνεται η μέτρηση του ρεύματος συναρτήσεως της εφαρμοζόμενης τάσης, καθώς η τάση αυξάνει με βήμα 400 V.

Καθώς στις μικρές τάσεις (0-3 kV) το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό, στις τάσεις αυτές το μετρούμενο ρεύμα ουσιαστικά αποτελείται από το ρεύμα διαρροής που δημιουργείται στην εξωτερική επιφάνεια της λυχνίας μεταξύ των 2 ηλεκτροδίων. Δια χωρίζεται εύκολα από το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, καθώς εξαρτάται από την υγρασία του αέρα και αυξάνει γραμμικά συναρτήσεως της εφαρμοζόμενης τάσης. Στο ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, η εξάρτηση από την τάση είναι απότομη και ακολουθεί μία εκθετική συνάρτηση.

Αποστολή του δοκιμαστικού πειράματος είναι να εντοπιστεί η τάση U_a (3-4 kV), στην οποία το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερο της διαρροής, γεγονός που παρατηρείται όταν το μετρούμενο ρεύμα αρχίζει να αυξάνει απότομα, ακολουθώντας μια εκθετική συνάρτηση τάσης.

1. Συναρμολογήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχ. 42.5.
2. Όταν ο επιβλέπων της Άσκησης θέσει σε λειτουργία την πηγή υψηλής τάσης, ρυθμίστε την τάση εξόδου στο μηδέν.

Το ψηφιακό πολύμετρο του ηλεκτρομέτρου πρέπει να λειτουργεί ως μετρητής τάσης στην κλίμακα 2 V.

Τονίζουμε ότι, προκειμένου η ακίδα να μην καταστραφεί, το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής πρέπει να είναι πάντα μικρότερο από 1000 nA!

3. Στο δοκιμαστικό πείραμα

Αυξάνοντας σταδιακά την τάση της πηγής, με βήμα 400 V, εντοπίστε εκείνη την τάση U_a , στην οποία το ρεύμα αρχίζει να αυξάνει απότομα. Το μικρό ρεύμα (μερικά nA) που παρατηρείται πριν την απότομη άνοδο είναι του ρεύματος διαρροής. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, κύριο γνώρισμα του ρεύματος διαρροής, I_d , είναι ο ωμικός του χαρακτήρας, δηλαδή ακολουθεί το νόμο του Ohm και αυξάνει γραμμικά συναρτήσεως της τάσης.

Στην επεξεργασία των μετρήσεων, το ρεύμα διαρροής πρέπει να αφαιρεθεί.

4. Στο κύριο πείραμα

Στο κύριο πείραμα το βήμα της τάσης είναι 200 V, ενώ το ρεύμα θα μετρηθεί 2 φορές: στην άνοδο και στην κάθοδο της τάσης. Εδώ η τάση εκκίνησης είναι η τάση U_a που μετρήσατε (εντοπίσατε) στο δοκιμαστικό πείραμα.

(α) Από την τάση U_a , αρχίστε να την αυξάνετε με βήμα 200 V, σημειώνοντας το ρεύμα συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης. Η άνοδος της τάσης (U_{max}) πρέπει να γίνεται έως ότου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής γίνει περίπου 1000 nA.

(β) Καθώς τα μεγάλα ρεύματα φθείρουν την ακίδα, δίχως καθυστέρηση και χρονοτριβή, για τις ίδιες τιμές της εφαρμοζόμενης τάσης, μετρήστε το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, αλλά στην «κάθοδο» της τάσης, από την U_{max} έως την U_a .

Στις μετρήσεις αυτές το ρεύμα που μετράτε είναι συνολικό, $I_S = I_\psi + I_\delta$, δηλαδή αποτελεί άθροισμα δύο ρευμάτων: του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής και του ρεύματος διαρροής. Στην επεξεργασία, το ρεύμα διαρροής πρέπει να αφαιρεθεί. Για το σκοπό αυτό, μετρήστε το ρεύμα διαρροής, σημειώνοντας το ρεύμα στην τάση κατά 300 V μικρότερη από την U_a . Στην τάση αυτή το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό και μπορεί να αγνοηθεί. Επομένως, στην τάση $U_a - 300$ V το ρεύμα που μετράτε αποτελείται ουσιαστικά μόνο από το ρεύμα διαρροής.

Συμπληρώστε τον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

U_1 (V)	I_1 (nA)	U_2 (V)	I_2 (nA)	$I_{μέσο}$ (nA)	$I_\psi = I_\mu - I_\delta$ (nA)
$U_a + 200$		$U_a + 200$			
$U_a + 400$		$U_a + 400$			
$U_a + 600$		$U_a + 600$			
-----	-----	-----	-----	-----	
U_{max}		U_{max}			

42.8. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Σε ένα χαρτί μιλιμετρέ, στο διάστημα τάσεων [$U_a - U_{max}$], σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της σχέσης $I_\psi = f(U)$.
2. Για το διάστημα τάσεων [$U_a - U_{max}$], υπολογίστε τις τιμές $1/U$, $\text{Ln}(I_\psi/U^2)$ και συμπληρώστε τις στήλες του Πίνακα 2.

Πίνακας 2

U (V)	I_ψ (nA)	$1/U$ (V ⁻¹)	$\text{Ln}(I_\psi/U^2)$ (Μονάδες SI)
$U_a + 200$			
$U_a + 400$			
$U_a + 600$			

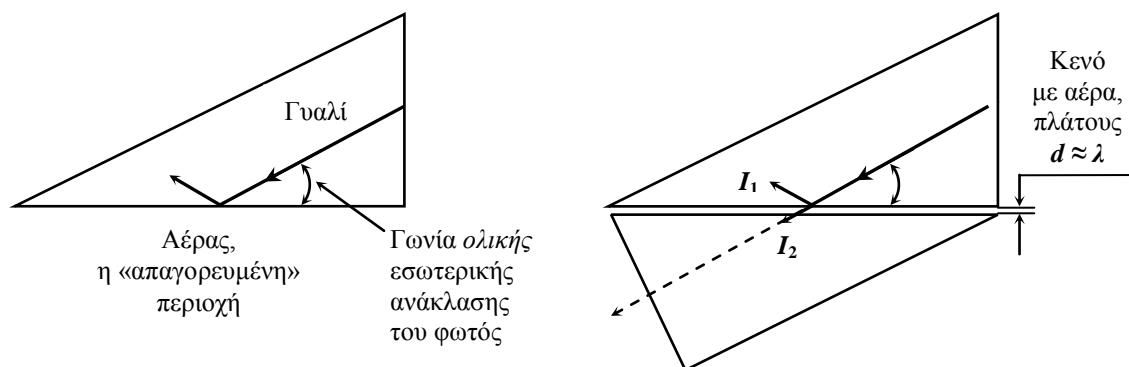
U_{max}			

3. Σε δεύτερο χαρτί μιλιμετρέ, στο διάστημα τάσεων $[U_a - U_{max}]$, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση $\ln(I_{\psi}/U^2) = f(1/U)$.
4. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, υπολογίστε την κλίση B (τιμή και σφάλμα) της πειραματικής ευθείας.
5. Υπολογίστε τον γεωμετρικό παράγοντα της ακίδας ζ (τιμή και σφάλμα), θεωρώντας ότι το έργο εξόδου του βολφραμίου δεν επηρεάστηκε από το ηλεκτρικό πεδίο και ήταν 4,5 eV.
6. Υπολογίστε (βλ. παράρτημα 6) την ακτίνα της κορυφής της ακίδας, r , και συγκρίνετε την τιμή που υπολογίσατε με αυτή που δηλώνει η κατασκευάστρια εταιρεία. Υπολογίστε επίσης και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή της ακίδας, όταν η εφαρμοζόμενη τάση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων είναι U_a .
7. Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πειράματος.

Παράρτηματα

Παράρτημα 1. Φαινόμενο σήραγγας στην κλασική οπτική

Η διείσδυση του ηλεκτρονίου στην ενεργειακά απαγορευμένη περιοχή οφείλεται στην κυματική του φύση. Παρόμοια διείσδυση παρατηρείται και με τα κύματα του φωτός κατά την ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας (Σχ. 42.6).



Σχήμα 42.6. Διείσδυση του φωτός στην «απαγορευμένη» περιοχή.

Θυμίζουμε, ότι στην ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός που παρατηρείται στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας (Σχ. 42.6), για την προσπίπτουσα ακτίνα ο αέρας είναι «απαγορευμένη» περιοχή. Παρά ταύτα, στο σημείο εσωτερικής ανάκλασης, μέρος του προσπίπτοντος φωτός διεισδύει στον αέρα, σε βάθος περίπου λ . Μπορούμε να φανταστούμε την εικόνα, όπου το φως εισέρχεται (διεισδύει), για λίγο, στον αέρα και επιστρέφει στο γυαλί.

Η διείσδυση αυτή μπορεί να γίνει ορατή με το δεύτερο πρίσμα, όταν τοποθετείται σε μικρή απόσταση ($d \approx \lambda$) από το πρώτο. Τότε στο σημείο ανάκλασης η προσπίπτουσα ακτίνα διασπάται σε 2 συνιστώσες: στην ανακλώμενη I_1 και στην I_2 , που είχε διεισδύσει στον αέρα και στο δεύτερο πρίσμα διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση με αυτήν της προσπίπτουσας ακτίνας.

Ουσιώδες είναι το γεγονός ότι η ένταση της ακτίνας I_2 εξαρτάται από την απόσταση d και

ενισχύεται σε βάρος της I_1 , καθώς το άθροισμα $I_1 + I_2$ είναι σταθερό. Στη δεκαετία του 60, την ιδιότητα αυτή τη χρησιμοποιούσαν για τη διαμόρφωση της έντασης της φωτεινής δέσμης με ακουστικές συχνότητες, προκειμένου να αξιοποιηθεί στις συσκευές οπτικής τηλεπικοινωνίας.

Παράρτημα 2. Το αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο

Για τις ανάγκες του πειράματος είναι απαραίτητος ένας ευαίσθητος μετρητής ρεύματος στην κλίμακα 1-1000 nA.

Μικρά ρεύματα της τάξης των 1 μ A-1 pA τα μετράνε συνήθως με ηλεκτρόμετρα, το κόστος των οποίων είναι πολύ μεγάλο. Εντωμεταξύ, η μέτρηση των ρευμάτων της τάξης των 1-1000 nA μπορεί να γίνει με ικανοποιητική ακρίβεια και με ένα κοινό πολύμετρο 4,5 ψηφίων που χρησιμοποιείται στην εργαστηριακή πρακτική.

Αν το πολύμετρο των 4,5 ψηφίων χρησιμοποιηθεί κανονικά, δηλαδή ως *μετρητής ρεύματος*, τότε στην πιο ευαίσθητη κλίμακα των ρευμάτων η ευαισθησία ή η διακριτική ικανότητα (resolution) του οργάνου είναι 0,1 μ A ή 100 nA, η οποία *δεν επαρκεί*, καθώς στην Άσκηση αυτή η *ζητούμενη* διακριτική ικανότητα είναι 1 nA.

Με το ψηφιακό πολύμετρο των 4,5 ψηφίων μπορούμε να μετρήσουμε ρεύματα ακόμη και 0,01 nA, δηλαδή ρεύματα 10000 φορές μικρότερα (!!!) από τα 100 nA, αρκεί το όργανο να μετατραπεί σε *υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο*. Για τη μετατροπή αυτή, το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να *αλλάξουμε* τον τρόπο χρήσης του οργάνου.

Από την *αρχή λειτουργίας* του ηλεκτρομέτρου γνωρίζουμε ότι το μετρούμενο ρεύμα I οδηγείται σε μια μετρητική αντίσταση R_μ , *μεγάλης ακρίβειας*, προκαλώντας πτώση τάσης στην αντίσταση αυτή. Στο επόμενο βήμα γίνεται μέτρηση αυτής της τάσης με ένα βολτόμετρο, η αντίσταση εισόδου του οποίου είναι πολύ μεγαλύτερη της μετρητικής. Στη μέθοδο αυτή, το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση

$$I = \frac{u}{R_\mu}$$

και είναι ανάλογο της μετρούμενης τάσης u (στο μέρος αυτό, με I και u σημειώνονται οι ενδείξεις του πολύμετρου των 4,5 ψηφίων).

Στην πράξη, προκειμένου να διευκολυνθεί η χρήση του οργάνου, ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ ρεύματος και τάσης, $1/R_\mu$, ενσωματώνεται συνήθως στην κλίμακα του οργάνου, με κατάλληλη βαθμονόμηση της κλίμακας σε μονάδες A.

Συνεπώς, για να συναρμολογήσουμε ένα ηλεκτρόμετρο, μας είναι απαραίτητη μια μετρητική αντίσταση R_μ , όπως, επίσης, και ένα ευαίσθητο βολτόμετρο, η αντίσταση εισόδου του οποίου, είναι εκατοντάδες ή ακόμη και χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από αυτή της μετρητικής ($R_{inp} \gg R_\mu$), προκειμένου να μην αλλοιώνεται η τιμή της μετρητικής.

Είναι άξιο προσοχής το γεγονός ότι το κοινό πολύμετρο 4,5 ψηφίων διαθέτει αυτά τα 2 σημαντικά στοιχεία, αρκεί αυτό να χρησιμοποιηθεί ως *μετρητής τάσης* και όχι ρεύματος. Σημειώνουμε, ότι για μετρητική αντίσταση μπορεί να αξιοποιηθεί η ωμική αντίσταση εισόδου του ίδιου του οργάνου, η οποία είναι μεγάλης ακρίβειας (0,1 %) και η τιμή της είναι 10 M Ω ή $10^7 \Omega$. Στη μέθοδο αυτή, το πολύμετρο τίθεται σε λειτουργία *βολτομέτρου*, ενώ το μετρούμενο ρεύμα εισάγεται στην είσοδο του οργάνου άμεσα, προκειμένου να μετρηθεί η πτώση τάσης που το ρεύμα δημιουργεί στη μετρητική αντίσταση.

Στο πολύμετρο της Άσκησης, στην πιο ευαίσθητη κλίμακα των τάσεων η διακριτική ικανότητα είναι 0,01 mV ή 10^{-5} V. Έτσι, όταν στην οθόνη του οργάνου το τελευταίο ψηφίο

μεταβάλλεται κατά 1 μονάδα, τη μεταβολή 10^{-5} V την προκαλεί συνεχές ρεύμα ΔI , η τιμή του οποίου είναι:

$$\Delta I = \frac{\Delta u}{R_{\mu}} = \frac{0,01 \text{ mV}}{10 \text{ M}\Omega} = \frac{10^{-5} \text{ V}}{10^7 \Omega} = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA!}$$

Στο πείραμα της Άσκησης τόσο μεγάλη ευαισθησία είναι περιττή, καθώς για τις ανάγκες του πειράματος είναι αρκετή η διακριτική ικανότητα 1 nA. Για το λόγο αυτό, η ευαισθησία του ηλεκτρομέτρου μειώνεται 1000 φορές:

- 10 φορές, μέσω αλλαγής της κλίμακας μέτρησης από 200 mV σε 2 V, όπου η διακριτική ικανότητα είναι 0,0001 V ή 0,1 mV.
- 100 φορές, μέσω μείωσης της μετρητικής αντίστασης από 10 M Ω σε 100 k Ω ($10^5 \Omega$).

Η δεύτερη αλλαγή γίνεται με μια βοηθητική αντίσταση των 100 k Ω ($\pm 1 \%$), που συνδέεται παράλληλα στην είσοδο του ψηφιακού οργάνου, η αντίσταση εισόδου του οποίου είναι 100 φορές μεγαλύτερη ($10^7 \Omega$).

Με τις αλλαγές αυτές, η κατά τάση διακριτική ικανότητα 0,1 mV και η μετρητική αντίσταση $10^5 \Omega$ παράγουν την κατά ρεύμα διακριτική ικανότητα ΔI (resolution)

$$\Delta I = \frac{\Delta u}{R_{\mu}} = \frac{0,1 \text{ mV}}{100 \text{ k}\Omega} = \frac{10^{-4} \text{ V}}{10^5 \Omega} = 10^{-9} \text{ A} = 1 \text{ nA},$$

γεγονός που διευκολύνει την ανάγνωση της τιμής του ρεύματος, σε nA, δίχως την εμπλοκή πρόσθετου πολλαπλασιαστικού παράγοντα στις μετρήσεις. Έτσι, η ένδειξη 0,0281 V, διαβάζεται και σημειώνεται ως 281 nA.

Παράρτημα 3. Ζητήματα ακρίβειας στη μέτρηση του ρεύματος

Καθώς στο αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση

$$I = \frac{u}{R_{\mu}},$$

το σφάλμα στο ρεύμα εξαρτάται από τα σφάλματα στην τάση u και στη μετρητική αντίσταση R_{μ} , η οποία στην Άσκηση δεν είναι ακριβείας και ανήκει στην κατηγορία 1 %.

Γενικότερα, στο πηλίκο, για τα σχετικά σφάλματα ισχύει η σχέση

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\delta R_{\mu}}{R_{\mu}} + \frac{\delta u}{u} = 0,01 + \frac{\delta u}{u},$$

όπου το σχετικό σφάλμα στην αντίσταση δεν υπερβαίνει το 0,01 (1 %), ενώ το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην τάση, δu , προσδιορίζεται από το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού βολτομέτρου.

Συμφωνά με τη δήλωση της κατασκευάστριας εταιρείας, στην κλίμακα 2 V, οι εγγυημένοι παράμετροι ακριβείας του ψηφιακού οργάνου είναι

$$\text{Accuracy: } \pm (0,05 \% \text{ rdg} + 3 \text{ digits}) \rightarrow \pm (\gamma_u + h_u r_u),$$

όπου $\gamma_u = 0,05 \%$ είναι η ποσοστιαία συνιστώσα του σφάλματος, $h_u = 3$, ενώ r_u είναι η διακριτική ικανότητα στην τάση που, όπως είδαμε, είναι $r_u = 0,0001 \text{ V}$ ή 10^{-4} V .

Επομένως, στο βολτόμετρο, το κατά τάση σφάλμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\delta u = u\gamma_u + h_u r_u,$$

ωστόσο, λόγω μικρής τιμής του γ_u , ακόμη και στη μέγιστη τιμή του ρεύματος, το γινόμενο $u\gamma_u$ μπορεί να αγνοηθεί:

$$u\gamma_u \Big|_{max} = R_{\mu} i_{max} \times \gamma = 10^5 \times 1000 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-4} (\Omega A) = 5 \times 10^{-5} \text{ V} = 0,00005 \text{ V} \ll h_u r_u = 0,0003 \text{ V}.$$

Συνεπώς, με καλή προσέγγιση, το σφάλμα στην τάση δεν υπερβαίνει τα $0,0003 \text{ V}$:

$$\delta u = u\gamma_u + h_u r_u \approx 0 + h_u r_u = 3 \times 0,0001 \text{ V} = 0,0003 \text{ V}.$$

Από την παρατήρηση αυτή, για το σφάλμα στο ρεύμα προκύπτει η σχέση

$$\delta I = I \left(0,01 + \frac{\delta u}{u} \right) = I \left(0,01 + \frac{0,3 \times 10^{-3} \text{ V}}{I R_{\mu}} \right) = 0,01 \times I + \frac{0,3 \times 10^{-3} \text{ V}}{R_{\mu}} = 0,01 \times I + 3 \times 10^{-9} (\text{A}).$$

Τελικά, το σφάλμα στο ρεύμα του ηλεκτρομέτρου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta I = 0,01 \times I + 3 \times 10^{-9} (\text{A}),$$

όπου στην παράσταση $\delta I = I\gamma_i + h_i r_i$: $\gamma_i = 1 \%$, $h_i = 3$ και $r_i = 1 \text{ nA}$.

Για παράδειγμα, στην ένδειξη $0,0280 \text{ V}$, που σημειώνεται ως 280 nA , το σφάλμα είναι μικρότερο από 6 nA :

$$\delta I = I\gamma_i + h_i r_i = 280 \times 1 \times 10^{-2} + 3 \times 1 (\text{nA}) \approx 2,8 \text{ nA} + 3 \text{ nA} = 5,8 \text{ nA} \leq 6 \text{ nA}.$$

Επομένως, η τιμή και το εγγυημένο διάστημα σφάλματος αυτού του ρεύματος είναι:

$$I = 280 \pm 6 (\text{nA}).$$

Παράρτημα 4. Προστασία του ηλεκτρομέτρου από τις ηλεκτρικές παρεμβολές

Το υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο είναι ευάλωτο στις ηλεκτρικές παρεμβολές, καθότι τα καλώδια συναρμολόγησης του ηλεκτρικού κυκλώματος έχουν μεγάλο μήκος και δεν είναι προστατευμένα (θωρακισμένα).

Θυμίζουμε ότι τα θωρακισμένα καλώδια περιβάλλονται από μια εύκαμπτη *χάλκινη πλεξούδα*, το λεγόμενο *μπλεντάζ*, το οποίο συνήθως το συνδέουν με τη Γη (το γειώνουν).

Οι ηλεκτρικές παρεμβολές στα καλώδια συναρμολόγησης προκαλούν γρήγορες και άτακτες μεταβολές του τελευταίου ψηφίου κατά μερικές μονάδες, γεγονός που δυσκολεύει τις μετρήσεις. Οι άτακτες αυτές μεταβολές μειώνονται δεκάδες φορές αν στη μετρητική αντίσταση συνδεθεί *παράλληλα* ένας πυκνωτής των $10 \mu\text{F}$, ο οποίος «βραχυκυκλώνει» και εξουδετερώνει τις γρήγορες μεταβολές της τάσης και του ρεύματος, αλλά *δεν επηρεάζει τη μέση τιμή*, την οποία μετράμε τελικά. Η μόνη αρνητική επίπτωση της παρουσίας του είναι η μεγάλη αδράνεια του μετρητή, η οποία χαρακτηρίζεται από τη σταθερά χρόνου τ :

$$\tau = RC = 10^5 (\Omega) \times 10^{-5} (\text{F}) = 1 \text{ s.}$$

Συνεπώς, στο προστατευμένο με πυκνωτή ηλεκτρόμετρο, κάθε νέα ένδειξη της τιμής θα σταθεροποιείται μετά από παρέλευση 3τ , ή περίπου 3 δευτερολέπτων, γεγονός που επιβάλλει η νέα ένδειξη του οργάνου να σημειώνεται μετά από παρέλευση περίπου τριών δευτερολέπτων.

Παράρτημα 5. Υπολογισμός του $\Delta b_{\text{орг}}$ στην κλίση της πειραματικής ευθείας

Στην Άσκηση, η σχετική θεωρητική ανάλυση του φαινομένου οδηγεί στη σχέση

$$i = CU^2 \exp\left(-\frac{B}{U}\right),$$

όπου i είναι το ρεύμα ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής και u είναι η εφαρμοζόμενη τάση.

Η σχέση αυτή γραμμικοποιείται ως:

$$\ln \frac{i}{U^2} = C - \frac{B}{U}, \quad \text{όπου } x = \frac{1}{U} \quad \text{και } y = \ln \frac{i}{U^2}.$$

Σκοπός του πειράματος είναι ο ποιοτικός έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim και η μέτρηση του συντελεστή B .

Αν ο νόμος περιγράφει σωστά την εξέλιξη του φαινομένου, αναμένουμε τα πειραματικά σημεία να πέσουν πάνω σε μια ευθείας, τύπου

$$y = C + Bx,$$

η κλίση της οποίας είναι $-B$.

Στο πείραμα, οι μετρητές του ρεύματος και της τάσης είναι ψηφιακοί, με παραμέτρους ακριβείας

$$\text{Accuracy } (i): \gamma_i (\%) + h_i r_i = 0,05 \% + 3d$$

και

$$\text{Accuracy } (U): \gamma_U (\%) + h_U r_U = 3 \% + (?),$$

αντίστοιχα.

Καθώς οι 2 μετρητές είναι ψηφιακοί, σε άμεσες μετρήσεις των x_i και y_i , η συνεισφορά των 2 οργάνων στο σφάλμα της κλίσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b_{\text{орг}} = b(\gamma_y + \gamma_x)$$

(βλ. Συμπληρωματικές σημειώσεις, σελ. 74).

Θυμίζουμε, ότι οι 2 σταθεροί όροι των σφαλμάτων, $h_i r_i$ και $h_U r_U$, δεν επηρεάζουν (συμβάλλουν) το (στο) σφάλμα της κλίσης.

Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης, πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$(\gamma_x + \gamma_y),$$

συναρτήσει των παραμέτρων γ_i και γ_U των 2 ψηφιακών οργάνων, καθώς τα ποσοστιαία σφάλματα γ_x και γ_y δεν είναι των οργάνων, αλλά είναι παραγόμενα μεγέθη και πρέπει να υπολογιστούν. Θα υπολογίσουμε πρώτα το γ_x .

Έτσι, καθώς η μεταβλητή x είναι

$$x = \frac{1}{U},$$

για το σφάλμα δx προκύπτει η σχέση:

$$\delta x = -\frac{\delta U}{U^2} = x \left| \frac{\delta U}{U} \right| = x \gamma_U.$$

Επομένως,

$$\gamma_x = \frac{\delta x}{x} = \left| \frac{\delta U}{U} \right| = \gamma_U.$$

Συνεπώς, στις τιμές των x το ποσοστιαίο σφάλμα είναι όσο και αυτό του μετρητή της τάσης:

$$\gamma_x = \gamma_U = 3 \text{ \%}.$$

Δυσκολότερα υπολογίζεται (αποδεικνύεται) το ποσοστιαίο σφάλμα στο y . Θα αποδείξουμε, ότι στις τιμές των y_k το ποσοστιαίο σφάλμα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\gamma_y = 0!$$

Για την απόδειξη, ως συνήθως, με κεφαλαία γράμματα θα συμβολίζουμε τις πραγματικές τιμές (τις ακριβείς), ενώ με τα πεζά θα συμβολίζουμε τις ενδείξεις των 2 οργάνων.

Έστω ότι $\gamma_x > 0$ και $\gamma_y > 0$. Καθώς οι πραγματικές και οι προσεγγιστικές τιμές συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$I = i + i\gamma_i$$

και

$$U = u + u\gamma_U,$$

για την πραγματική τιμή του λογαρίθμου προκύπτει η σχέση:

$$Y = \ln \frac{I}{U^2} = \ln \frac{i + i\gamma_i}{(u + u\gamma_U)^2} = \ln \frac{i(1 + \gamma_i)}{u^2(1 + \gamma_U)^2} = \ln \frac{i}{u^2} + \ln(1 + \gamma_i) - 2\ln(1 + \gamma_U) =$$

$$y + \ln(1 + \gamma_i) - 2\ln(1 + \gamma_U) \approx y + (\gamma_i - 2\gamma_U),$$

όπου για $z \ll 1$, έγινε χρήση της προσεγγιστικής σχέσης της σειράς Taylor:

$$\ln(1 + z) \approx z.$$

Τελικά, για τις πραγματικές και τις προσεγγιστικές τιμές των λογαρίθμων προκύπτει η σχέση

$$Y = y + (\gamma_i - 2\gamma_U) = y + \delta y.$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι πραγματικές τιμές των λογαρίθμων Y_k είναι μετατοπισμένες (εσφαλμένες) έναντι των μετρημένων y_k , ωστόσο όλες στον ίδιο βαθμό, δηλαδή κατά

$$\delta y = \gamma_i - 2\gamma_U.$$

Με άλλα λόγια, στον λογάριθμο, παρά την αλλοίωση των πραγματικών τιμών, από Y_k προς y_k , η σταθερή αυτή αλλοίωση δημιουργεί τη πραγματική ευθεία που είναι παράλληλη προς την πειραματική, αλλά μετατοπισμένη προς τις μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές, ανάλογα με την τιμή και το πρόσημο του αθροίσματος $\gamma_i - 2\gamma_U$ ($\delta\gamma = \pm(\gamma_i - 2\gamma_U)$). Συνεπώς, στις τιμές των y_k απουσιάζει ο ποσοστιαίος όρος του σφάλματος, γεγονός που μας επιτρέπει να τον θεωρήσουμε μηδέν:

$$\gamma_y = 0!$$

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η συνθήκη $\gamma_y = 0$ προκύπτει από το γεγονός ότι στη σχέση για τις πραγματικές τιμές των λογαρίθμων, που λάβαμε, λείπει ο όρος του σφάλματος που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ανάλογος του y , δηλαδή οι όροι τύπου

$$y\gamma_i, y\gamma_U, y(\gamma_i - \gamma_U), y(\gamma_i + \gamma_U) \text{ κ.ο.κ.}$$

Τελικά, τα ποσοστιαία σφάλματα των μεταβλητών x και y είναι

$$\gamma_x = \gamma_U \text{ και } \gamma_y = 0,$$

από τα οποία προκύπτει το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 οργάνων:

$$\Delta b_{οργ} = b(\gamma_x + \gamma_y) = b\gamma_U.$$

Στο σφάλμα που προκαλούν τα δύο όργανα, $\Delta b_{οργ}$, μένει να προστεθεί η αβεβαιότητα της μέσης κλίσης (βλ. μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, Συμπληρωματικές σημειώσεις, σελ. 63), δηλαδή ο όρος $\Delta b_{τυχ}$, καθώς στο πείραμα οι τιμές των y_k υφίστανται διασπορά. Ο όρος αυτός υπολογίζεται κανονικά, ως αβεβαιότητα της μέσης κλίσης, πολλαπλασιάζοντάς την στον κατάλληλο συντελεστή Student

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b\gamma_U + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{1}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \times \frac{\sum d_k^2}{(n-2)}}, \quad P \geq \%99,7 \%$$

όπου $t_{n,p}$ είναι ο συντελεστής Student, οι αποκλίσεις d_k υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$d_k = y_k - a - bx_k,$$

ενώ η μέση κλίση, b , υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Παράρτημα 6. Υπολογισμός της ακτίνας καμπυλότητας της κορυφής της ακίδας

Με την υπολογισθείσα τιμή του γεωμετρικού παράγοντα ξ , η ακτίνα καμπυλότητας της κορυφής της ακίδας, r , για το παραβολοειδές εκ περιστροφής υπολογίζεται από τη σχέση

$$\xi = \frac{1}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)},$$

όπου R είναι η απόσταση μεταξύ της ακίδας και του συλλέκτη ηλεκτρονίων και είναι 4,0 cm.

Είναι προτιμότερο, η παραπάνω σχέση να γραφτεί ως:

$$R\xi = \frac{2R}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)} \quad (42.23)$$

ή

$$R\xi \times \ln x = x, \quad (42.24)$$

όπου

$$x = \frac{2R}{r}. \quad (42.25)$$

Θα αναζητήσουμε *προσεγγιστική* λύση της εξίσωσης (42.24).

Είναι όμως χρήσιμο να εξετάσουμε πρώτα ένα αριθμητικό παράδειγμα με $x = 10^6$, που είναι κοντά στην πειραματική τιμή. Έτσι, για τιμές $R = 5$ cm και $r = 10^{-7}$ m, η τιμή του x είναι 10^6 , ενώ $\ln x = 13,8$. Επομένως, εδώ το γινόμενο $R\xi$ είναι 72382, με $\ln R\xi \approx 11,2$.

Αν στην εξίσωση (42.24) αγνοηθεί ο λογάριθμος, δηλαδή θέσουμε $\ln x = 1$, αυτό θα προκαλέσει σφάλμα στο x της τάξης 1380 %, που είναι εξαιρετικά μεγάλο.

Στο παράδειγμά μας, το υπολογιστικό σφάλμα στο x θα μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 19 %, αν ο λογάριθμος του x αντικατασταθεί με τον λογάριθμο του γινομένου $R\xi$, η τιμή του είναι επίσης μεγάλη, αλλά και γνωστή. Η αντικατάσταση αυτή μας επιτρέπει την παράμετρο x να την υπολογίσουμε από την προσεγγιστική εξίσωση:

$$R\xi \times \ln R\xi = x.$$

Επομένως, θέτοντας $x = R\xi$, στο x εισάγεται ένα ποσοστιαίο σφάλμα:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\ln x - \ln R\xi}{\ln x} = \frac{13,8 - 11,2}{13,8} = 0,188 < 0,19$$

Από την εξίσωση (42.24) προκύπτει η ισότητα

$$\ln R\xi + \ln(\ln x) = \ln x,$$

η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί.

Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε, ότι το υπολογιστικό σφάλμα στην τιμή του x μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 1,6 %, αν στην εξίσωση 42.24 ο λογάριθμος του x αντικατασταθεί με τον όρο $\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)$, δηλαδή θέσουμε $\ln x \approx \ln R\xi + \ln(\ln(x = R\xi))$. Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει το x να το υπολογίσουμε από την προσεγγιστική εξίσωση:

$$R\xi \times [\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)] = x.$$

Ακολουθώντας την ίδια τακτική, το υπολογιστικό σφάλμα στο x μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 0,11 %, αν στην εξίσωση 42.24 ο λογάριθμος του x αντικατασταθεί με τον όρο

$$\ln R\xi + \ln(\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)),$$

δηλαδή θέσουμε $\ln x \approx \ln R\xi + \ln(\ln R\xi + \ln(\ln(x = R\xi)))$, όπου η προσέγγιση είναι πολύ καλύτερη. Επομένως, με ακρίβεια της τάξης 0,11 %, η παράμετρος x μπορεί να υπολογιστεί από την προσεγγιστική εξίσωση:

$$R\xi \times [\ln R\xi + \ln(\ln R\xi + \ln(\ln R\xi))] = x.$$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, το υπολογιστικό σφάλμα μπορεί να μειωθεί και σε επίπεδα πολύ μικρότερα του 0,11 %, ωστόσο στο βαθμό που στο πείραμα τα σφάλματα των οργάνων είναι περίπου 3 %, η περεταίρω μείωση του υπολογιστικού σφάλματος είναι περιττή.