

## Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας

### 42.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθεί η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια του βολφραμίου και, μέσω αυτής, το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας, που αποτυπώνεται στο νόμο των Fowler-Nordheim.

### 42.2. Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου είναι παγιδευμένα σε αυτό και υπό κανονικές συνθήκες δεν μπορούν να εξέλθουν. Να εξέλθουν μπορούν μόνο όταν αυτά με κάποιον τρόπο διεγερθούν και αποκτήσουν πρόσθετη κινητική ενέργεια.

Υπάρχουν 5 βασικά είδη εκπομπής ηλεκτρονίων από τα μέταλλα, που τυγχάνουν ευρείας εφαρμογής στην επιστημονική έρευνα και Υψηλή Τεχνολογία. Στις τέσσερις περιπτώσεις ο ρόλος της θερμοκρασίας είναι ασήμαντος και, επομένως, τα φαινόμενα αυτά μπορούν να παρατηρηθούν και σε θερμοκρασία **0 K**. Σε μία ειδική περίπτωση, η θερμοκρασία παίζει αποφασιστικό ρόλο και λαμβάνει χώρα μόνο σε υψηλές θερμοκρασίες, της τάξης **1000-2500 K**.

Καθώς τα 5 είδη εκπομπής σχετίζονται με τον τρόπο διέγερσης του μετάλλου, αυτά συσχετίζονται με 5 φαινόμενα, που είναι γνωστά ως:

1. **Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο**, που χρησιμοποιείται στα φωτοστοιχεία, στους φωτοπολλαπλασιαστές, στα φωτόμετρα, στους φασματογράφους κ.λ.π.
2. **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από προσπίπτοντα ηλεκτρόνια**, που χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία (SEM-Secondary Electron Microscope), στους φωτοπολλαπλασιαστές, στους πολλαπλασιαστές ηλεκτρονίων, στις διόπτρες νυκτός κ.λ.π.
3. **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από τα προσπίπτοντα ιόντα**, που χρησιμοποιείται στους ενδεικτικούς λαμπτήρες Νέου, στους οικονομικούς λαμπτήρες φθορισμού, στους λέιζερ αερίου κ.λ.π.
4. **Φαινόμενο θερμοϊονικής εκπομπής ηλεκτρονίων**, που χρησιμοποιείται στις οθόνες των τηλεοράσεων και υπολογιστών, στους καθοδικούς σωλήνες των παλμογράφων, στους φούρνους μικροκυμάτων, στις πηγές ακτινών X και ηλεκτρονικές λυχνίες μεγάλης ισχύος κ.λ.π.
5. **Φαινόμενο ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων** (cold emission), που χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία, στις νέες οθόνες υπολογιστών και τηλεοράσεων, στη μικροσκοπία ατομικής κλίμακας (Tunneling Atomic Force Microscope) κ.λ.π.

Αντικείμενο μελέτης στην Άσκηση αυτή είναι το πέμπτο φαινόμενο, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων, πίσω από το οποίο κρύβεται το **κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας**.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην ψυχρή εκπομπή, αλλά και στα 4 φαινόμενα που αναφέραμε, μεγάλο ρόλο παίζει το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου  $\phi$ , το οποίο για προφανείς λόγους ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που δαπανάται για να εξέλθει το ηλεκτρόνιο από το μέταλλο.

Η θερμοκρασία και το έργο εξόδου επηρεάζουν έντονα τη θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων, αλλά επηρεάζουν ελαφρώς και τη ψυχρή εκπομπή, όταν η θερμοκρασία του μετάλλου είναι υψηλή. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο, έστω σύντομα, να εξετάσουμε πρώτα το φαινόμενο της θερμοϊονικής εκπομπής ηλεκτρονίων.

#### 42.2.1. Θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων

Η εκπομπή ηλεκτρονίων αυτού του είδους παρατηρείται όταν σε συνθήκες υψηλού κενού το μέταλλο θερμαίνεται σε θερμοκρασίες **1000-2500 K**.

Η θερμοϊονική εκπομπή επηρεάζεται πολύ έντονα από το έργο εξόδου και τη θερμοκρασία του μετάλλου και υπακούει στη σχέση Richardson:

$$I = const \times T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right), \quad (42.1)$$

όπου  $\phi$  είναι το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου από το μέταλλο,  $T$  είναι η απόλυτη θερμοκρασία και  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann.

Πρέπει να σημειωθεί, ότι σε επιφάνειες με μικρό έργο εξόδου (**1-1,5 eV**), ασθενής θερμοϊονική εκπομπή παρατηρείται ακόμη και σε θερμοκρασία δωματίου. Για παράδειγμα, σε ένα φωτοστοιχείο ή φωτοπολλαπλασιαστή, σε θερμοκρασία δωματίου η φωτοευαίσθητη ουσία της φωτοδιόδου εκπέμπει περίπου **100-1000** ηλεκτρόνια το δευτερόλεπτο, τα οποία δημιουργούν το λεγόμενο ρεύμα σκότους (dark current), από το οποίο εξαρτάται το κατώφλι ευαισθησίας του φωτομετρητή.

#### 42.2.2. Ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων

Η φράση «Ψυχρή εκπομπή» (*cold emission*) σχετίζεται με το γεγονός, ότι η εκπομπή αυτή λαμβάνει χώρα σε θερμοκρασίες δωματίου. Το φαινόμενο παρατηρείται όταν στην επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται πολύ ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο, της τάξης  **$10^9$  V/m** και χαρακτηρίζεται με τις εξής ιδιαιτερότητες:

(α) Σε αντίθεση με τα 4 άλλα είδη εκπομπής που αναφέραμε, στην ψυχρή εκπομπή τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο δίχως αυτά προηγουμένως να διεγερθούν.

(β) Η ένταση της εκπομπής σχεδόν καθόλου δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία και παραμένει σχεδόν αμετάβλητη στο θερμοκρασιακό διάστημα **0 – 300 K**.

(γ) Στην εκπομπή πεδίου παρατηρούνται ασυνήθιστα υψηλές τιμές πυκνότητας του ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας του μετάλλου), που είναι 4-5 τάξεις υψηλότερες από αυτές που παρατηρούνται στη θερμοϊονική εκπομπή. Συχνά την ψυχρή εκπομπή την αποκαλούν και εκπομπή πεδίου (*field emission*), λόγω συσχέτισης του φαινομένου με το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο.

### 42.2.3. Σύντομη ιστορική αναδρομή

Στις πρώτες προσπάθειες ερμηνείας του φαινομένου ξεχώρισε η πρόταση Shottky, ο οποίος πρότεινε την άποψη, ότι η εκπομπή πεδίου είναι ένα ξεχωριστό είδος θερμιονικής εκπομπής, όπου το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο μειώνει το έργο εξόδου σε μηδενικά επίπεδα, δηλαδή είναι θερμιονική εκπομπή από επιφάνεια με σχεδόν μηδενικό έργο εξόδου.

Με σχετικά απλούς συλλογισμούς έδειξε (βλ. Άσκηση 25: *Θερμιονική Εκπομπή Ηλεκτρονίων*), ότι ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του μετάλλου μειώνει το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου κατά έναν παράγοντα

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{e^3 F}{4\pi\epsilon_0}}, \quad (42.2)$$

όπου  $F$  είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ( $\text{V/m}$ ),  $\epsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και  $e$  είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου. Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία της τάξης  $10^9 \text{ V/m}$ , η μείωση του έργου εξόδου είναι περίπου  $1 \text{ eV}$ .

Η υπόθεση Shottky ελέγχθηκε πειραματικά στα πειράματα της θερμιονικής εκπομπής όπου διαπιστώθηκε η ορθότητά της, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο πράγματι μειώνει το έργο εξόδου και η μείωση αυτή ακολουθεί τη σχέση (42.2).

Παρότι η ιδέα του Shottky επιβεβαιώθηκε πειραματικά και, επομένως, ήταν ορθή στα πλαίσια της θερμιονικής εκπομπής, παρά ταύτα δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει την ανεξαρτησία της ψυχρής εκπομπής από τη θερμοκρασία.

Προβληματική ήταν και η μείωσης του έργου εξόδου, καθώς από την πειραματική μελέτη προέκυπτε το συμπέρασμα ότι σε πεδία της τάξης  $10^9 \text{ V/m}$  το έργο εξόδου πρέπει σχεδόν να μηδενίζεται, ενώ η σχέση (42.2) δίνει μείωση μόνο κατά  $\approx 1 \text{ eV}$  (ακριβέστερα,  $1,9 \times 10^{-19} \text{ J}$ ).

Σημειώνουμε ότι στο βολφράμιο, στο οποίο γινόταν τα περισσότερα πειράματα της ψυχρής εκπομπής, το έργο εξόδου είναι  $4,5 \text{ eV}$  ( $\phi = 4,5 \text{ eV}$ ).

Επίσης, το μοντέλο Shottky αδυνατούσε να ερμηνεύσει τη μεγάλη πυκνότητα ρεύματος που παρατηρείται στην ψυχρή εκπομπή, που είναι 4-5 τάξεις μεγαλύτερη από αυτή της θερμιονικής.

Σταδιακά εδραιώθηκε η πεποίθηση ότι η μείωση του έργου εξόδου σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία όντως λαμβάνει χώρα, αλλά η μείωση αυτή δεν επεκτείνεται έως το μηδενισμό του έργου εξόδου. Επομένως, η ψυχρή εκπομπή είναι ένα νέο φαινόμενο, ανεξάρτητο από αυτό της θερμιονικής.

Μεγάλη και ουσιαστική πρόοδο στην ερμηνεία της ψυχρής εκπομπής σημειώθηκε στο μοντέλο που προτάθηκε από τους Fowler-Nordheim (1928), οι οποίοι πρότειναν την υπόθεση ότι πίσω από την εκπομπή πεδίου κρύβεται το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας.

### 42.2.4. Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας. Κβαντομηχανικός φορμαλισμός

Το φαινόμενο αυτό λαμβάνει χώρα όταν ένα ηλεκτρόνιο «προσκρούει» κάθετα σε ένα φράγμα δυναμικού.

Πρέπει να διακρίνουμε το φράγμα δυναμικού (Σχ. 42.1,β) από το βήμα (σκαλοπάτι), το πλάτος του οποίου είναι άπειρο (Σχ.42.1α).

Σύμφωνα με τις αρχές της Κλασικής Φυσικής, το ηλεκτρόνιο θα προσπεράσει το βήμα (σκαλοπάτι) δυναμικού μόνο όταν η κινητική του ενέργεια είναι μεγαλύτερη από το «ύψος» του δυναμικού σκαλοπατιού. Σε αντίθετες καταστάσεις το ηλεκτρόνιο θα ανακλαστεί.

Σύμφωνα, όμως, με τις αρχές της Κβαντικής Μηχανικής, το ηλεκτρόνιο μπορεί να διεισδύσει στην απαγορευμένη περιοχή, αλλά η πιθανότητα αυτής της διείσδυσης είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση βάρους.

Όταν το ηλεκτρόνιο προσκρούει σε βήμα δυναμικού άπειρου πλάτους, με ενέργεια μικρότερη από το “ύψος” του δυναμικού βήματος, θα ανακλαστεί τελικά, ωστόσο έχει

πεπερασμένη πιθανότητα να εισχωρήσει στην απαγορευμένη (ενεργειακά) περιοχή, πριν ανακλαστεί.

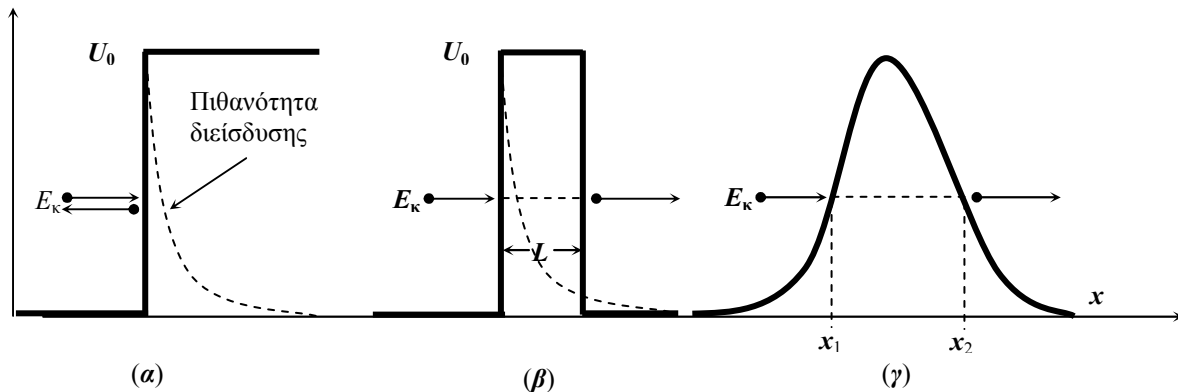
Όταν το ηλεκτρόνιο προσκρούει σε φράγμα δυναμικού «μικρού» πλάτους, το ηλεκτρόνιο ή θα ανακλαστεί ή θα το διαπεράσει, καθώς έχει μη μηδενική πιθανότητα να το διαπεράσει ακόμη και όταν η κινητική του ενέργεια είναι μικρότερη από το «ύψος» του φράγματος. Αυτοί είναι οι όροι με τους οποίους περιγράφεται το φαινόμενο σήραγγας και, όπως τονίσαμε, οφείλεται στις κυματικές ιδιότητες των ηλεκτρονίων.

Η προαναφερθείσα πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος αυξάνει σημαντικά, όταν το πλάτος του φράγματος έχει διαστάσεις ίδιας τάξης με το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου.

Στα μέταλλα, για παράδειγμα, ακόμη και σε θερμοκρασία  $0 \text{ K}$ , το μεγαλύτερο μέρος των ελεύθερων ηλεκτρονίων κινείται με τη λεγόμενη ενέργεια Fermi,  $E_f$ , που στο βολφράμιο είναι  $5,7 \text{ eV}$ . Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με τις ενέργειες αυτές έχουν μήκος κύματος de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_f}} = 5,13 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 5,1 \text{ \AA}$$

όπου  $h$  είναι η σταθερά του Πλάνκ και  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου ( $h = 6,625 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ). Επομένως, στο βολφράμιο, για να είναι σχετικά μεγάλη η πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος, το πλάτος του πρέπει να είναι της τάξης  $5 \times 10^{-10} \text{ m}$ .



Σχήμα 42.1. Βήμα (σκαλοπάτι) και φράγμα δυναμικού

Γενικότερα, υπό κανονικές συνθήκες και απουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εξέλθουν από το μέταλλο, καθώς στην επιφάνεια του μετάλλου αντιμετωπίζουν ένα βήμα δυναμικού (σκαλοπάτι), που είναι υψηλότερο από την ενέργεια Fermi.

Στο βολφράμιο, το ενεργειακό βήμα έχει “ύψος”  $10,2 \text{ eV}$ . Επομένως, για να προσπεράσουν το βήμα αυτό τα ηλεκτρόνια που κινούνται με την ενέργεια Fermi, δηλαδή με κινητικές ενέργειες  $5,7 \text{ eV}$ , πρέπει να απορροφήσουν άλλα  $4,5 \text{ eV}$ . Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η πρόσθετη αυτή ενέργεια ονομάζεται έργο εξόδου,  $\phi$ .

Σημειώνουμε, ότι στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο η πρόσθετη ενέργεια καταβάλλεται από τα φωτόνια, ενώ στη θερμοϊονική εκπομπή από τη θερμότητα κ.λ.π. Αλλά στο «σκοτάδι» και σε θερμοκρασία  $0 \text{ K}$ , το ηλεκτρόνιο μπορεί να εξέλθει από το μέταλλο μόνο μέσω φαινομένου σήραγγας.

Προκειμένου, όμως, να εκδηλωθεί το φαινόμενο σήραγγας, το βήμα δυναμικού πρέπει με κάποιον τρόπο να μετατραπεί σε φράγμα δυναμικού σχετικά μικρού «πλάτους», της τάξης  $5 \text{ \AA}$ . Η μετατροπή αυτή πραγματοποιείται μέσω εφαρμογής ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου, στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου.

Στα ζητήματα αυτού του είδους, στην Κβαντική Μηχανική εισάγεται η έννοια της διαπερατότητας του δυναμικού φράγματος  $D(E_k)$ , η οποία εξαρτάται από το «ύψος» και το πλάτος του, αλλά και την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Η διαπερατότητα του δυναμικού φράγματος ορίζεται ως

$$D(E_k) = \frac{I_\delta}{I_0}, \quad (42.3)$$

όπου  $I_0$  και  $I_\delta$  είναι οι εντάσεις των κυμάτων de Broglie, του προσπίπτοντος και αυτού που διαπέρασε το φράγμα, αντίστοιχα. Ουσιαστικά, η διαπερατότητα ορίζει το ποσοστό των ηλεκτρονίων που διαπερνά το φράγμα.

Για ένα ορθογώνιο φράγμα, όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχ. 42.1β, όταν  $E_k < U_0$ , η διαπερατότητα ορίζεται από τη σχέση

$$D(E_k) = \frac{16}{U_0} \left(1 - \frac{E_k}{U_0}\right) \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_k)}\right), \quad (42.4)$$

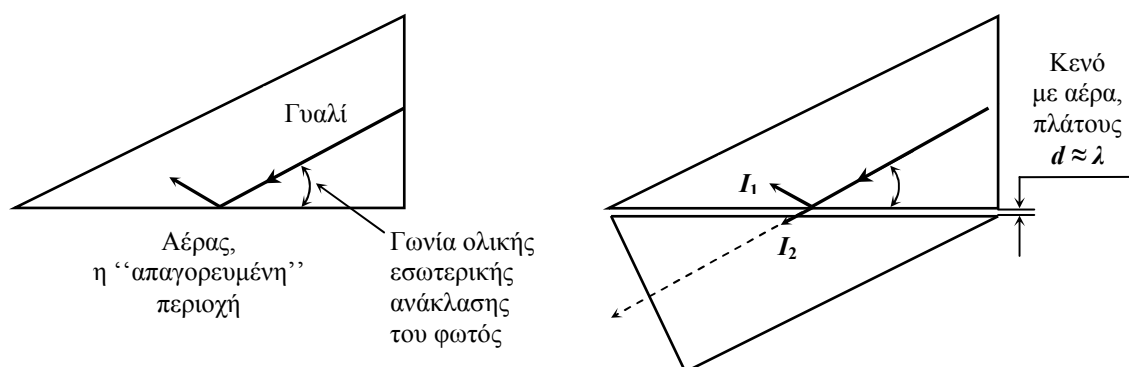
όπου  $L$  και  $U_0$  είναι το πλάτος και το ύψος του δυναμικού φράγματος, ενώ  $m$  και  $E_k$  είναι η μάζα και η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα.

Όταν το δυναμικό φράγμα έχει περιπλοκότερο σχήμα (Σχ. 42,1γ), οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν τη σχέση

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\{U(x) - E_k\}} dx\right), \quad (42.5)$$

όπου  $D_0$  είναι ο προεκθετικός παράγον της σχέσης (42.4).

Τονίζουμε, ότι η διείσδυση του ηλεκτρονίου στην ενεργειακά απαγορευμένη περιοχή οφείλεται στην κυματική του φύση. Παρόμοια διείσδυση παρατηρείται και στα κύματα του φωτός, στην ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας (Σχ.42.2).



**Σχήμα 42.2.** Διείσδυση του φωτός στην “απαγορευμένη” περιοχή

Θυμίζουμε, ότι στην ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός, στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας (Σχ.42.2), για την προσπίπτουσα ακτίνα ο αέρας είναι “απαγορευμένη” περιοχή. Παρά ταύτα, στο σημείο ανάκλασης, μέρος του προσπίπτοντος φωτός διεισδύει στον αέρα, σε

βάθος περίπου  $\lambda$ . Μπορούμε να φανταστούμε την εικόνα, όπου το φως εισέρχεται, για λίγο, στον αέρα και επιστρέφει στο γυαλί.

Η διείσδυση αυτή μπορεί να γίνει ορατή με το δεύτερο πρίσμα, όταν τοποθετείται σε μικρή απόσταση ( $d \approx \lambda$ ) από το πρώτο. Τότε στο σημείο ανάκλασης η προσπίπτουσα ακτίνα διασπάται σε 2 συνιστώσες, την ανακλώμενη  $I_1$  και τη  $I_2$ , που είχε διεισδύσει στον αέρα και στο δεύτερο πρίσμα διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση με αυτήν της προσπίπτουσας ακτίνας.

Ουσιώδες είναι το γεγονός, ότι η ένταση της ακτίνας  $I_2$  εξαρτάται από την απόσταση  $d$  και ενισχύεται σε βάρος της  $I_1$ , καθώς το άθροισμα  $I_1 + I_2$  είναι σταθερό. Στη δεκαετία του 60, την ιδιότητα αυτή τη χρησιμοποιούσαν για τη διαμόρφωση της έντασης της φωτεινής δέσμης με ακουστικές συχότητες, προκειμένου να αξιοποιηθεί στις συσκευές οπτικής τηλεπικοινωνίας.

Από τη σχέση (42.4) προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η διαπερατότητα του δυναμικού φράγματος είναι εκθετική συνάρτηση του πλάτους ή του «μήκους της ενεργειακής σήραγγας»  $L$ , αλλά και της διαφοράς  $U_0 - E_k$ , δηλαδή έντονα εξαρτάται και από τις κινητικές ενέργειες των ηλεκτρονίων. Συνεπώς, το φαινόμενο σήραγγας άμεσα συνδέεται με την ενεργειακή κατάσταση των ηλεκτρονίων μέσα στο μέταλλο, το «μήκος της σήραγγας» αλλά και το ύψος του δυναμικού φράγματος που αυτά αντιμετωπίζουν στην επιφάνεια του μετάλλου.

### 42.3. Ενεργειακή κατάσταση των ελεύθερων ηλεκτρονίων στα μέταλλα

#### 42.3.1. Κβαντομηχανική προσέγγιση

Καθώς το φαινόμενο σήραγγας δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία, η σχετική ανάλυση γίνεται σε θερμοκρασία  $0 \text{ K}$ . Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τις τυχόν διαφοροποιήσεις που δημιουργούνται σε θερμοκρασίες δωματίου.

Η κβαντική θεωρία των μετάλλων, στην απλούστερή της μορφή θεωρεί, ότι τα ηλεκτρόνια που προκαλούν την ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι ελεύθερα.

Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο περιγράφεται με ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται χωρίς σκέδαση και ανακλάται μόνο στην επιφάνεια του μετάλλου. Έτσι διαμορφώνεται ένα σύστημα στάσιμων κυμάτων με διακριτό φάσμα, όμοιο με αυτό των στάσιμων ακουστικών κυμάτων. Η μεγάλη πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων επιτρέπει την αντικατάσταση του διακριτού φάσματος με ένα συνεχές, όπου η σχετική μαθηματική ανάλυση είναι ευκολότερη.

Από την απαγορευτική αρχή του Pauli προκύπτει, ότι ακόμη και σε θερμοκρασία  $0 \text{ K}$ , τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν «παγώνουν» την κίνησή τους. Τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη μπορούν να καταλάβουν μόνο δύο ηλεκτρόνια. Τα υπόλοιπα θα κατανεμηθούν σε ενεργειακές στάθμες κατά ζεύγη, από τις χαμηλότερες προς τις υψηλότερες τιμές. Έτσι, είναι αναγκασμένα να καταλάβουν μια περιοχή ενεργειακών σταθμών που εκτείνεται από το μηδέν έως κάποια μέγιστη τιμή  $E_{\max}$ , που φέρει ειδική ονομασία και ονομάζεται ενέργεια Fermi,  $E_f$ .

Για την τιμή της ενέργειας Fermi,  $E_f$ , οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν:

$$E_f = \frac{h^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{8m_e \pi^2}, \quad (42.6)$$

όπου  $h$  είναι η σταθερά του Planck,  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και  $n$  είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου.

Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων, ανά μονάδα ενέργειας και ανά μονάδα όγκου, δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{8\pi}{h^3} (2m_e^3)^{1/2} \sqrt{E}, \quad (42.7)$$

ενώ ο αριθμός  $dN$  των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ  $E$  και  $E+dE$  είναι ανάλογος της πυκνότητας των ενεργειακών καταστάσεων και της πιθανότητας  $f(E)$  να είναι κατειλημμένη η κατάσταση με ενέργεια  $E$ . Η τελευταία προκύπτει από τη στατιστική Fermi-Dirac και είναι:

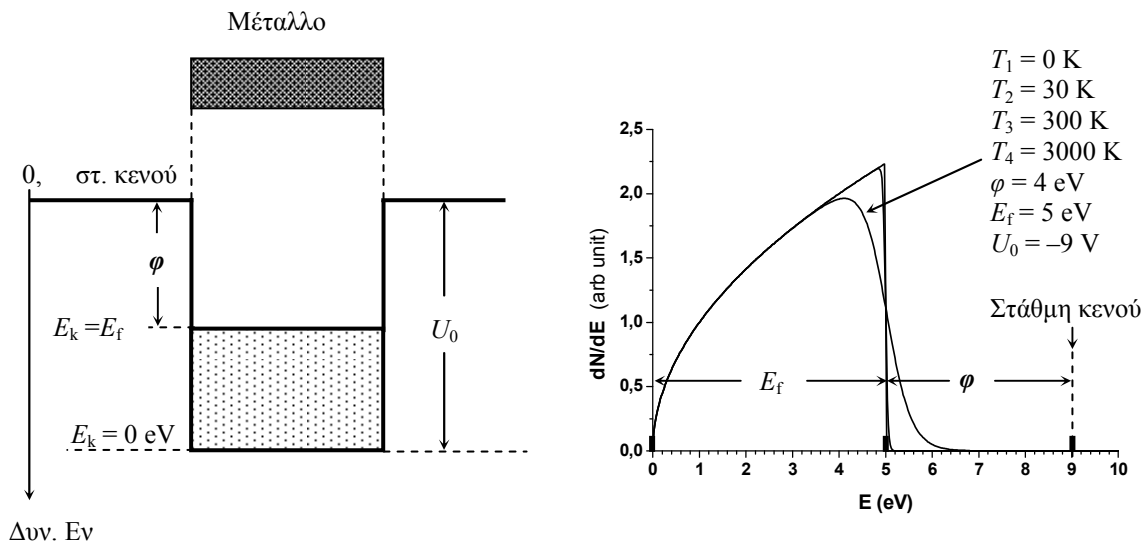
$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_f)/kT} + 1} \quad (42.8)$$

Έτσι, ο αριθμός  $dN$  είναι:

$$dN = \rho(E)f(E)dE = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \frac{\sqrt{E}dE}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}$$

Επομένως, η πυκνότητα των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ  $E$  και  $E+dE$  είναι

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E)f(E) = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-E_f)/kT} + 1} \quad (42.9)$$



**Σχήμα 42.3.** Ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων σε θερμοκρασίες 0, 30, 300 και 3000 K.

Στο Σχ.42.3β δίνεται η γραφική παράσταση της ενεργειακής κατανομής των ηλεκτρονίων σε διάφορες θερμοκρασίες, δηλαδή όταν αυτά διεγείρονται θερμικά. Προφανώς, στη θερμοϊονική εκπομπή συμμετέχουν μόνον τα ηλεκτρόνια της εκθετικής «ουράς», που κινούνται προς την επιφάνεια του στερεού και οι κινητικές τους ενέργειες ξεπερνούν το άθροισμα  $E_f + \phi$ , δηλαδή το ύψος του δυναμικού σκαλοπατιού  $U_0$ . Αντίθετα, στην ψυχρή εκπομπή τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο απευθείας από τη στάθμη Fermi, ακόμη και σε θερμοκρασία **0 K**.

#### 42.3.2. Μετατροπή του σκαλοπατιού δυναμικού σε φράγμα

Σύμφωνα με την απλουστευμένη εικόνα του φαινομένου, σε θερμοκρασία **0 K**, τα «ελεύθερα» ηλεκτρόνια του μετάλλου, κινούμενα με ενέργειες  $E_f$ , κάθετα προς την επιφάνεια, ανακλώνται πλήρως προς το εσωτερικό όταν αυτά προσκρούουν στο βήμα (σκαλοπάτι) δυναμικού, το ύψος του οποίου,  $U_0$ , είναι μεγαλύτερο από την ενέργεια Fermi,  $E_f$ .

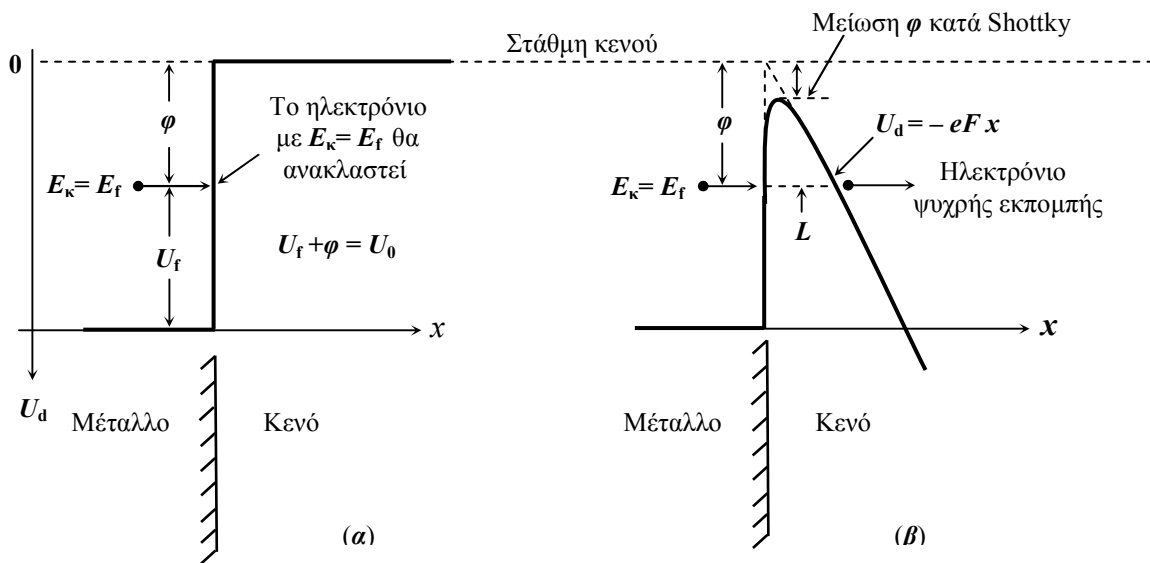
Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στο βολφράμιο, το έργο εξόδου είναι  $4,5 \text{ eV}$ , ενώ η ενέργεια Fermi είναι  $5,7 \text{ eV}$ . Επομένως, σε βολτ, στο μέταλλο αυτό το ύψος του δυναμικού σκαλοπατιού είναι

$$U_0 = (5,7+4,5) \text{ V} = 10,2 \text{ V}.$$

Βλέπουμε, ότι ακόμη και τα πιο ενεργά ελεύθερα ηλεκτρόνια που κινούνται με τις ενέργειες Fermi, δεν μπορούν να εξέλθουν στο κενό.

Στην εικόνα αυτή η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου, έξω από το μέταλλο, θεωρείται σταθερή και, συνήθως, η τιμή της επιλέγεται μηδέν (Σχ. 42.4α). Την τιμή αυτή την αποκαλούν συχνά στάθμη κενού ή στάθμη αναφοράς.

Έξω από το μέταλλο, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου διαφοροποιείται, όταν με ένα βοηθητικό ηλεκτρόδιο, στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο  $F$  (Σχ. 42.4β).



**Σχήμα 42.4.** Μετατροπή του βήματος σε φράγμα δυναμικού

Παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου έξω από το μέταλλο μειώνεται γραμμικά, υπακούοντας στη σχέση

$$U_d = -exF. \quad (42.10)$$

Η ένταση του φαινομένου σε μεγάλο βαθμό εξαρτάται από το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας»  $L$ , που «βλέπουν» τα ηλεκτρόνια όταν αυτά κινούνται με ενέργειες Fermi, καθώς στο μέταλλο, το μεγαλύτερο μέρος των ηλεκτρονίων κινείται με την ενέργεια αυτή. Προφανώς, το μήκος αυτό εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Το μήκος αυτό εύκολα υπολογίζεται από το «τριγωνικό φράγμα δυναμικού» που βλέπουμε στο Σχ. 42.4β, όπου σε απόσταση  $L$  (βάση του δυναμικού τριγώνου), έξω από το μέταλλο η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται κατά  $\phi$ :

$$-\phi = -eFL \quad \text{ή} \quad L = \frac{\phi}{eF}. \quad (42.11\alpha,\beta)$$



Συνεπώς, το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας»,  $L$ , εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $F$ , αλλά εξαρτάται και από το έργο εξόδου  $\phi$ .

Σημειώνουμε ότι στην ψυχρή εκπομπή συμμετέχουν και τα ηλεκτρόνια που οι ενέργειές τους είναι μικρότερες από την ενέργεια Fermi, αλλά η ποσοστιαία συμμετοχή των ηλεκτρονίων αυτών μειώνεται σημαντικά, καθώς αντιμετωπίζουν «σήραγγα» μεγαλύτερου μήκους (βλ. Σχ. 42.4β).

#### 42.4. Νόμος των Fowler-Nordheim

Το 1928, στο περιοδικό Proc. Roy. Soc. Lonson, Seriees A 119 (1928), 173, οι δύο ερευνητές δημοσίευσαν την εργασία «*Electron emission in intense electric fields*», στην οποία υπολόγισαν τη ροή των ηλεκτρονίων, ανά μονάδα επιφάνειας του μετάλλου, όταν αυτά διαπερνούν το φράγμα δυναμικού μέσω του φαινομένου σήραγγας και εξέρχονται στο κενό, δηλαδή μέσω μίας διαδικασίας που είναι απαγορευμένη στην Κλασσική Φυσική.

Οι ερευνητές υπολόγισαν την πυκνότητα του ρεύματος ηλεκτρονίων που εξέρχεται από το μέταλλο, όταν σε θερμοκρασία  $0\text{ K}$ , στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται ένα κάθετο ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο  $F$ . Οι σχετικοί υπολογισμοί οδήγησαν στη σχέση:

$$j_e = P \frac{e^2}{2\pi h} \frac{F^2}{\phi} \exp\left(-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{2\pi h e} \frac{\phi^{3/2}}{F}\right), \quad (42.12)$$

όπου  $e$  και  $m$  είναι το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου,  $h$  είναι η σταθερά Πλάνκ,  $\phi$  είναι το έργο εξόδου και  $P$  είναι μία σταθερά του μετάλλου:

$$P = \frac{\sqrt{\phi U_f}}{\sqrt{\phi} + \sqrt{U_f}}, \quad (42.13)$$

όπου το  $U_f$  παριστάνει το δυναμικό Fermi, σε V (Σχ. 43.3α).

Στο βολφράμιο, για παράδειγμα,  $\phi = 4,5$  και  $U_f = 5,7$  (V), επομένως η σταθερά αυτού του μετάλλου είναι

$$P = \frac{\sqrt{\phi U_f}}{\sqrt{\phi} + \sqrt{U_f}} = \frac{\sqrt{4,5 \times 5,7}}{\sqrt{4,5} + \sqrt{5,7}} = 1,12 \quad (\sqrt{V}),$$

και, όπως βλέπουμε, ελάχιστα διαφέρει από τη μονάδα.

Σημειώνουμε ότι στην ανάλυσή τους, οι δύο ερευνητές δεν έλαβαν υπόψη την ελαφρά μείωση του έργου εξόδου λόγω φαινομένου Shottky. Επομένως, στη σχέση (42.12), το  $\phi$  παριστάνει την τιμή του έργου εξόδου απουσία του ηλεκτρικού πεδίου. Με την έννοια αυτή, η σχέση (42.12) είναι προσεγγιστική, αλλά στις επόμενες εργασίες που ακολούθησαν διαπιστώθηκε, ότι σε γενικές γραμμές η σχέση αυτή σωστά αποδίδει την εξέλιξη του φαινομένου, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή υπακούει σε μία σχέση τύπου

$$j = AF^2 \exp\left(-\frac{B}{F}\right), \quad (42.14)$$

όπου  $A$  και  $B$  είναι σταθερές.

Στη σχέση (42.12), αντικαθιστώντας τα μεγέθη  $m$ ,  $e$ , και  $h$  με τις αντίστοιχες τιμές στο σύστημα μονάδων SI ( $m = 9,109 \times 10^{-31}$  kg,  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C,  $h = 6,6256 \times 10^{-34}$  Js) και, επίσης, επιλέγοντας για το έργο εξόδου τη μονάδα eV, η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$j = P \times 6,168 \times 10^{-2} \frac{F^2}{\varphi} \exp\left(-6,827 \times 10^9 \frac{\varphi^{3/2}}{F}\right), \text{ (A/m}^2\text{)}, \quad (42.15)$$

όπου η πυκνότητα του ρεύματος είναι σε μονάδες A/m<sup>2</sup>, το  $\varphi$  σε V, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε μονάδες V/m.

#### 42.4.1. Επίδραση της θερμοκρασίας στο φαινόμενο της ψυχρής εκπομπής

Στα πειράματα των ερευνητών παρατηρήθηκε μία ασθενής εξάρτηση του φαινομένου από τη θερμοκρασία, δηλαδή μία ελαφρά ενίσχυση της ψυχρής εκπομπής σε υψηλότερες θερμοκρασίες.

Η εξάρτηση αυτή *ερμηνεύεται* εύκολα αν λάβουμε υπόψη το γεγονός, ότι σε θερμοκρασίες  $T > 0$ , στην ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων, πάνω από την στάθμη Fermi εμφανίζεται μία εκθετική «ουρά». Τα ηλεκτρόνια της ουράς που έχουν κινητικές ενέργειες  $E_k > E_f + \varphi$ , είναι υπεύθυνα για τη θερμοϊονική εκπομπή.

Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με κινητικές ενέργειες  $E_f < E_k < E_f + \varphi$ , δεν μπορούν να εξέλθουν θερμοϊονικά και για το λόγο αυτό το μεγαλύτερο τους μέρος ανακλάται στο εσωτερικό του μετάλλου, ωστόσο ένα μέρος εξέρχεται από το μέταλλο μέσω φαινομένου σήραγγας, καθώς για τα ηλεκτρόνια αυτά το μήκος της σήραγγας είναι μικρότερο από αυτό στη στάθμη Fermi. Πλην όμως, το ποσοστό αυτών των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρό και ελάχιστα επηρεάζει το συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων που εξέρχεται από τη στάθμη Fermi.

#### 42.5. Έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim. Μέθοδος

Παρά τις πειραματικές δυσκολίες, ο νόμος των Fowler-Nordheim μελετήθηκε ποιοτικά, αλλά και ποσοτικά, όπου διαπιστώθηκε καλή συμφωνία θεωρίας-πειράματος. Τονίζουμε, ότι η επαλήθευση αυτού του νόμου συνιστά πειραματική απόδειξη ορθότητας της υπόθεσης περί κυματικών ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων.

Η δυσκολία των πειραμάτων αυτών πηγάζει από την ανάγκη χρησιμοποίησης ηλεκτρικών πεδίων της τάξης  $10^9$  V/m. Τα ισχυρά αυτά ηλεκτρικά πεδία δημιουργούνται συνήθως μέσα σε μία δίοδο υψηλού κενού, στα ηλεκτρόδια της οποίας εφαρμόζεται σχετικά μεγάλη τάση.

Το ηλεκτρόδιο που πολώνεται αρνητικά, κατασκευάζεται από μέταλλο που έχει πολύ μεγάλη καμπυλότητα (λεπτό σύρμα ή ακίδα). Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις και λειτουργεί ως συλλέκτης των ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής.

Η διάταξη αυτή συμπληρώνεται με έναν ευαίσθητο μετρητή ρεύματος.

Στις πειραματικές διατάξεις, τα αναγκαία ηλεκτρικά πεδία στην επιφάνεια του μετάλλου επιτυγχάνονται με τάσεις της τάξης **3-10 kV**.

Για παράδειγμα, σε έναν ομοαξονικό κυλινδρικό πυκνωτή, που αποτελείται από ένα λεπτό μεταλλικό σύρμα και έναν κοίλο μεταλλικό κύλινδρο που το περιβάλλει, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του σύρματος μπορεί να υπολογιστεί και είναι

$$F = \frac{U}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}. \quad (42.16)$$

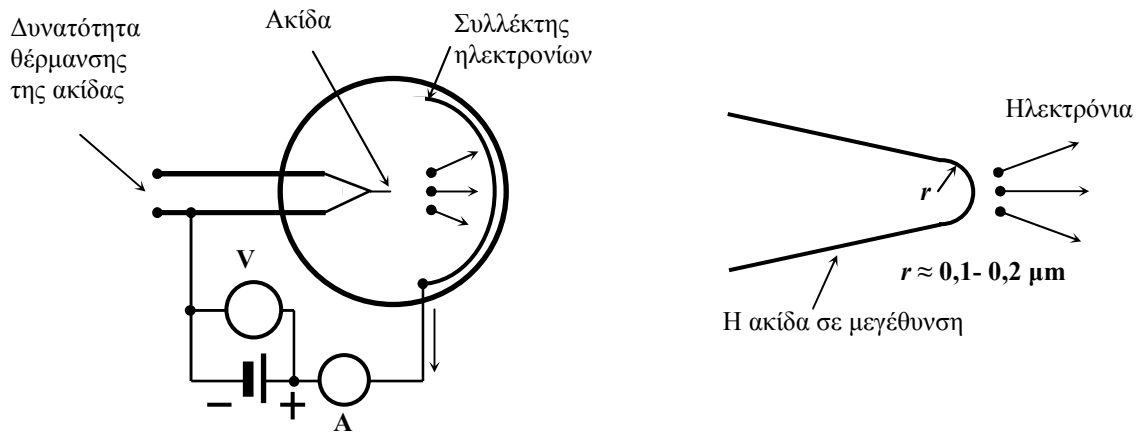
Έτσι, στο κυλινδρικό σύστημα ηλεκτροδίων, με  $r = 1 \mu\text{m}$  ( $10^{-6} \text{ m}$ ) και  $R = 10 \text{ cm}$ , στην επιφάνεια του λεπτού σύρματος το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $2 \times 10^9 \text{ V/m}$ , όταν η εφαρμοζόμενη τάση είναι  $11,5 \text{ kV}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να υπολογιστεί και στον ομόκεντρο σφαιρικό πυκνωτή, όπου η αντίστοιχη σχέση είναι

$$F = \frac{U}{r}, \quad (42.17)$$

ενώ στην κορυφή της ακίδας, που βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί.

Στην παρούσα Άσκηση χρησιμοποιείται μία λυχνία υψηλού κενού με δύο ηλεκτρόδια, τύπου ακίδα-σφαίρα (Σχ. 42.5). Η ακίδα, που λειτουργεί ως πηγή των ηλεκτρονίων, τοποθετείται στο κέντρο της σφαίρας και μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων εφαρμόζεται υψηλή τάση μερικών κιλοβόλτ, δηλαδή σχετικά μικρή τάση, καθώς η κορυφή της ακίδας κατασκευάζεται σκόπιμα με ακτίνα περίπου  $0,1-0,2 \mu\text{m}$ . Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις (μερικά εκατοστά) και λειτουργεί ως συλλέκτης των ηλεκτρονίων.



**Σχήμα 42.5.** Βασική διάταξη μελέτης της ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων

Έξω από τη λυχνία, στη διαδρομή του ρεύματος ηλεκτρονίων συνδέεται ένας ευαίσθητος μετρητής ρεύματος, καθώς τα μετρούμενα ρεύματα είναι της τάξης  $10^{-6} - 10^{-9} \text{ A}$ .

Προφανώς, στη λυχνία αυτή, η σχέση (42.17) μόνο κατά προσέγγιση αποδίδει το ηλεκτρικό πεδίο στην κορυφή της ακίδας, καθώς ισχύει για διαφορετική (σφαιρική) γεωμετρία ηλεκτροδίων.

Λόγω μικρών γεωμετρικών διαστάσεων της ακίδας, το ρεύμα των ηλεκτρονίων αποκτά μετρήσιμες τιμές σε σχετικά μικρές τάσεις, γεγονός που συνιστά μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των συσκευών. Στο κυλινδρικό σύστημα οι εφαρμοζόμενες τάσεις είναι πολύ υψηλότερες, αλλά και σύρμα με διάμετρο  $1 \mu\text{m}$  δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί.

Στα μειονεκτήματα των συσκευών τύπου ακίδα-σφαίρα, πρέπει να αναφέρουμε την αβεβαιότητα της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας. Η αβεβαιότητα αυτή προέρχεται από την αβεβαιότητα στην τιμή της διαμέτρου της κορυφής της ακίδας, καθώς είναι δύσκολο να μετρηθεί με ακρίβεια, όπως, επίσης, και του ακαθορίστου γεωμετρικού σχήματός της.

Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι, ότι στην κορυφή της ακίδας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης και, κατ' εκτίμηση, είναι της τάξης  $U/r$ .

Συνεπώς, στις διατάξεις αυτές, είναι σχετικά δύσκολος ο ποσοτικός έλεγχος του νόμου, ωστόσο προσφέρονται για τον έλεγχο τον ποιοτικό.

#### 42,5.1. Ποιοτικός έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim

Ο ακριβής προσδιορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι απαραίτητος όταν ο νόμος ελέγχεται ποιοτικά.

Για τον ποιοτικό έλεγχο, την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας μπορούμε να την ορίσουμε ως

$$F = \omega U, \quad (42.18)$$

όπου  $\omega$  είναι ο γεωμετρικός παράγον της ακίδας ( $\omega \approx 1/r$ ), ενώ  $U$  είναι η τάση που εφαρμόζεται μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων.

Η σχέση (42.12), που παρήχθη από τους Fowler-Nordheim, μπορεί να γραφτεί ως

$$I_{\psi} = AU^2 \exp\left(-\frac{B}{U}\right), \quad (42.19)$$

όπου  $I_{\psi}$  είναι το συνολικό ρεύμα της ψυχρής εκπομπής,  $S$  είναι το “μέσο” εμβαδόν της ακίδας, ενώ οι σταθερές  $A$  και  $B$  είναι:

$$A = \frac{SP\omega^2 \times 10^{-2}}{\varphi}, \quad (42.20)$$

και

$$B = \frac{6,83 \times 10^9 \varphi^{3/2}}{\omega}, \quad (42.21)$$

αντίστοιχα.

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (42.19), προκύπτει τελικά:

$$\ln\left(\frac{I_{\psi}}{U^2}\right) = \ln A - \frac{B}{U}. \quad (42.22)$$

Σε τιμές  $x = 1/U$  και  $y = \ln(I_{\psi}/U^2)$ , η γραφική παράσταση της σχέσης (42.22) παριστάνει μία ευθεία που τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $\ln A$ , ενώ η κλίση της είναι  $-B$ .

Μετρώντας το ρεύμα της ακίδας συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης, στο βαθμό που ο νόμος *Fowler-Nordheim* ισχύει, τα επεξεργασμένα πειραματικά σημεία αναμένεται να πέσουν πάνω σε μία ευθεία με αρνητική κλίση  $B$ , από την οποία μπορεί να υπολογιστεί ο γεωμετρικός παράγον  $\omega$  της ακίδας και, στη συνέχεια, να εκτιμηθεί η ακτίνα καμπυλότητας της κορυφής της ακίδας.

#### 42.6. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μία βάση, πάνω στην οποία στηρίζεται μία γυάλινη λυχνία-δίοδος υψηλού κενού. Η διάταξη περιλαμβάνει, επίσης, την πηγή υψηλής τάσης, με τον ψηφιακό μετρητή της, όπως επίσης και ένα υποτυπώδες ηλεκτρόμετρο.

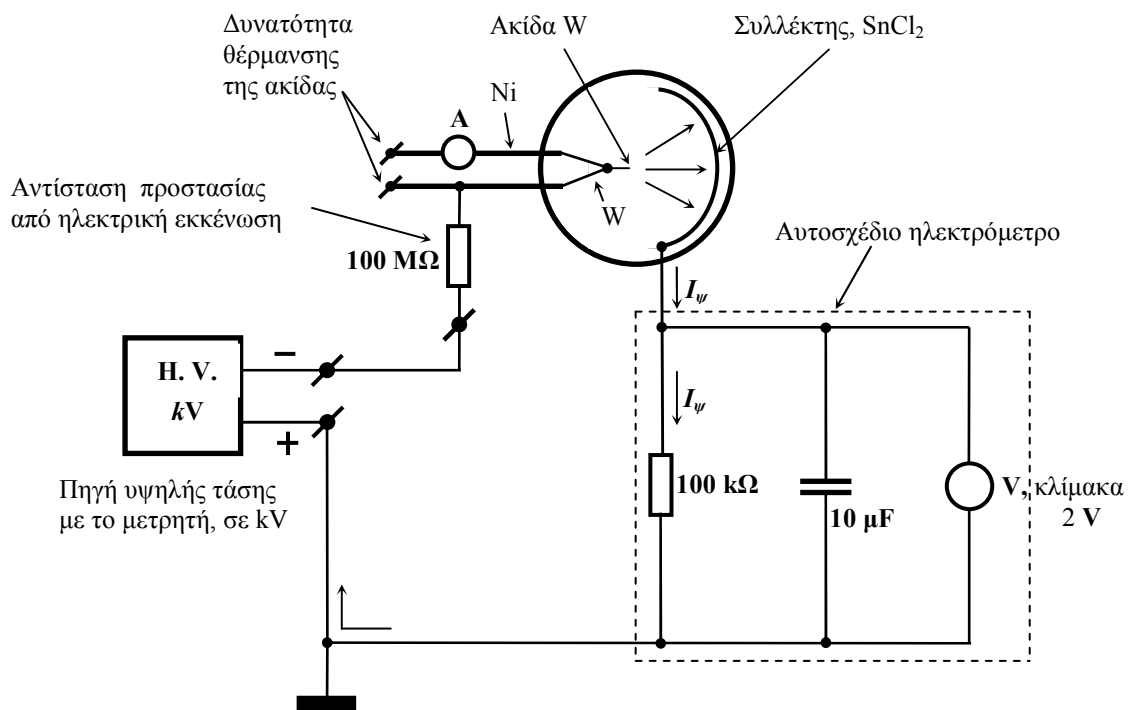
Η ακίδα βρίσκεται στο δεξί άκρο ενός λεπτού ευθύγραμμου σύρματος από βολφράμιο, μήκους περίπου **4 mm** (Σχ. 42.6). Το σύρμα αυτό είναι κολλημένο στο κέντρο άλλου σύρματος, από βολφράμιο και αυτό, σε σχήμα **V**, που δύναται να θερμανθεί με ρεύματα της τάξης **1-2 A**.

Η διάμετρος του ευθύγραμμου σύρματος είναι σχετικά μεγάλη (**50 μm**), αλλά με μία ειδική ηλεκτροχημική κατεργασία το δεξί άκρο αποκτά σχήμα κώνου, στην κορυφή του οποίου βρίσκεται ένα μικρό ημισφαίριο με ακτίνα περίπου **0,1-0,2 μm**.

Η ακίδα βρίσκεται στο κέντρο της γυάλινης σφαίρας και δύναται να θερμανθεί, μέσω θέρμανσης του βολφραμίου που έχει σχήμα **V**.

Ο συλλέκτης των ηλεκτρονίων έχει σχήμα ημισφαιρίου και βρίσκεται απέναντι από την ακίδα, στην εσωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας, υπό μορφή ενός λεπτού και διαφανούς αγώγιμου στρώματος από χλωριούχο κασσίτερο  $\text{SnCl}_2$ .

Το λεπτό στρώμα  $\text{SnCl}_2$  βρίσκεται σε ηλεκτρική επαφή με τα ηλεκτρόδια τροφοδοσίας ενός φούρνου, που προορίζεται για την εξαχνωση των ατόμων βαρίου στην επιφάνεια της ακίδας. Μέσω των ηλεκτροδίων ατού του φούρνου, τα ηλεκτρόνια της ψυχρής εκπομπής οδηγούνται έξω από τη γυάλινη σφαίρα και μέσω της μετρητικής αντίστασης **100 kΩ** καταλήγουν τελικά στο θετικό πόλο της πηγής υψηλής τάσης.



**Σχήμα 42.6.** Πειραματική διάταξη της Άσκησης.

Για λόγους ασφαλείας, ο μετρητής ρεύματος προτιμάται να βρίσκεται στο δυναμικό της Γης, δηλαδή στο δυναμικό που βρίσκεται και ο πειραματιστής. Ουσιαστικά, μέσω της μετρητικής αντίστασης **100 kΩ** (Σχ. 42.6), το δυναμικό του συλλέκτη ( $\text{SnCl}_2$ ) βρίσκεται πρακτικά στο δυναμικό της Γης, ενώ η μεγάλη αρνητική τάση εφαρμόζεται στην ακίδα, μέσω της προστατευτικής αντίστασης **100 MΩ** ( $10^8 \Omega$ ).

**Προσοχή (!!!).** Η τυχόν παράκαμψη της προστατευτικής αντίστασης των **100 MΩ** θα προκαλέσει άμεση καταστροφή της ακίδας, καθώς η παρουσία της αποτρέπει τη δημιουργία ηλεκτρικού τόξου μεταξύ της ακίδας και του συλλέκτη. Σημειώνουμε, ότι λόγω πολύ μεγάλης

έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή της ακίδας, το ηλεκτρικό τόξο δημιουργείται ακόμη και σε συνθήκες υψηλού κενού.

Στο τόξο υψηλού κενού, τα θετικά ιόντα που βομβαρδίζουν την ακίδα με ενέργειες μερικών χιλιάδων eV, θα προκαλέσουν εξάχνωση του υλικού της (spattering), με αναπόφευκτη σημαντική αύξηση της διαμέτρου της. Αυτό θα προκαλέσει μείωση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας, επομένως και μείωση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής, σε επίπεδα μικρότερα από τη διακριτική ικανότητα του μετρητή ρεύματος. Η κατάσταση αυτή, με τη δεδομένη πηγή υψηλής τάσης, ισοδυναμεί με καταστροφή της ακίδας!

Σημειώνουμε, ότι μικρή και αργή αποδόμηση της ακίδας γίνεται και δίχως το ηλεκτρικό τόξο, λόγω κίνησης των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό της λυχνίας, η οποία προκαλεί παραγωγή θετικών ιόντων που βομβαρδίζουν την ακίδα. Η παραγωγή αυτών των ιόντων εξαρτάται από την πίεση των αερίων στο εσωτερικό της λυχνίας, που δεν την ελέγχουμε, αλλά και από τον αριθμό των ηλεκτρονίων που συμμετέχουν στην κίνηση, δηλαδή από την ένταση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής, που μπορούμε να την ελέγξουμε.

Έτσι, προκειμένου να παραταθεί η διάρκεια ζωής της ακίδας, είναι σκόπιμο, το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής να μην υπερβαίνει τα **1000 nA**. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, πρέπει να συντομεύουμε τη χρονική διάρκεια των καταστάσεων, όπου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι μεγάλο.

Στην πηγή υψηλής τάσης, η τάση εξόδου ρυθμίζεται με ένα ποτενσιόμετρο 10 στροφών, ο άξονας του οποίου βρίσκεται στην πρόσοψη του οργάνου. Στην πηγή, επίσης, είναι ενσωματωμένος ένας ψηφιακός μετρητής της παραγόμενης υψηλής τάσης, η ακρίβεια του οποίου είναι μικρή (2 ψηφίων).

Σύμφωνα με τα μετρολογικά χαρακτηριστικά του μετρητή, οι παράμετροι ακρίβειας του ενσωματωμένου στην πηγή βολτόμετρου είναι:

Accuracy:  $\pm 3 \%$

Resolution: 0,1 kV,

ενώ την ολίσθησης του μηδενός ( $h_{ur}$  - ο σταθερός όρος του σφάλματος), η κατασκευάστρια εταιρεία δεν την αναφέρει.

#### **42.6.1. Το αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο**

Για τις ανάγκες του πειράματος είναι απαραίτητος ένας ευαίσθητός μετρητής ρεύματος στην κλίμακα **1-1000 nA**.

Μικρά ρεύματα, της τάξης **1  $\mu$ A – 1 pA**, τα μετράνε, συνήθως, με ηλεκτρόμετρα, το κόστος των οποίων είναι πολύ μεγάλο. Εντωμεταξύ, η μέτρηση των ρευμάτων της συγκεκριμένης Άσκησης (**1-1000 nA**) με ικανοποιητική ακρίβεια μπορεί να γίνει και με ένα κοινό πολύμετρο **4,5** ψηφίων, που χρησιμοποιείται στην εργαστηριακή πρακτική.

Αν το πολύμετρο των **4,5** ψηφίων χρησιμοποιηθεί κανονικά, δηλαδή ως μετρητής ρεύματος, τότε στην πιο ευαίσθητη κλίμακα, η ευαισθησία ή η διακριτική ικανότητα (resolution) του οργάνου είναι **0,1  $\mu$ A** ή **100 nA**, η οποία δεν επαρκεί, καθώς η ζητούμενη διακριτική ικανότητα είναι **1 nA**.

Το ζήτημα είναι ότι με το ψηφιακό πολύμετρο μπορούμε να μετρήσουμε ρεύματα ακόμη και **0,1 nA**. (**1000** φορές μικρότερα !!!), αν το όργανο μετατραπεί σε ένα υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο. Για τη μετατροπή αυτή, το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να αλλάξουμε τον τρόπο χρήσης του οργάνου.

Όπως γνωρίζουμε, στο ηλεκτρόμετρο, το μετρούμενο ρεύμα οδηγείται σε μία μετρητική αντίσταση  **$R_w$** , μεγάλης ακρίβειας, προκαλώντας πτώση τάσης στην αντίσταση αυτή. Στο επόμενο βήμα, γίνεται μέτρηση αυτής της τάσης με ένα βολτόμετρο, η αντίσταση εισόδου του

οποίου είναι πολύ μεγαλύτερη της μετρητικής. Στη μέθοδο αυτή, το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση

$$I = \frac{u}{R_{\mu}}$$

και είναι ανάλογο της μετρούμενης τάσης  $u$ .

Στην πράξη, προκειμένου να διευκολυνθεί η χρήση του οργάνου, ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ ρεύματος και τάσης,  $1/R_{\mu}$ , ενσωματώνεται συνήθως στην κλίμακα του οργάνου.

Συνεπώς, για να συναρμολογήσουμε ένα ηλεκτρόμετρο, μας είναι απαραίτητη μία μετρητική αντίσταση  $R_{\mu}$ , όπως επίσης και ένα ευαίσθητο βολτόμετρο, η αντίσταση εισόδου του οποίου, κατά προτίμηση, είναι εκατοντάδες ή ακόμη και χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από αυτή της μετρητικής ( $R_{imp} \gg R_{\mu}$ ), προκειμένου να μην αλλοιώνει την τιμή της.

Είναι άξιο προσοχής το γεγονός, ότι το κοινό πολύμετρο **4,5** ψηφίων διαθέτει αυτά τα **2** σημαντικά στοιχεία, αρκεί αυτό να χρησιμοποιηθεί ως μετρητής τάσης και όχι ρεύματος. Σημειώνουμε, ότι για μετρητική αντίσταση μπορεί να αξιοποιηθεί η ωμική αντίσταση εισόδου του ίδιου του οργάνου, η οποία είναι μεγάλης ακρίβειας και η τιμή της είναι **10 MΩ** ή **10<sup>7</sup> Ω**.

Στη μέθοδο αυτή, το πολύμετρο τίθεται σε λειτουργία βολτόμετρου, ενώ το μετρούμενο ρεύμα εισάγεται στην είσοδο του οργάνου, προκειμένου να μετρηθεί η πτώση τάσης που το ρεύμα δημιουργεί στη μετρητική αντίσταση.

Στο πολύμετρο της Άσκηση, στην πιο ευαίσθητη κλίμακα η διακριτική ικανότητα είναι **0,01 mV** ή **10<sup>-5</sup> V**. Έτσι, αν στην οθόνη του οργάνου το τελευταίο ψηφίο μεταβληθεί κατά 1 μονάδα, τη μεταβολή **10<sup>-5</sup> V** την προκαλεί συνεχές ρεύμα  $\Delta I$ , η τιμή του οποίου είναι:

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R_{\mu}} = \frac{0,01 \text{ mV}}{10 \text{ M}\Omega} = \frac{10^{-5} \text{ V}}{10^7 \Omega} = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA!}$$

Στο πείραμα της Άσκησης τόσο μεγάλη ευαισθησία είναι περιττή, καθώς για τις ανάγκες του πειράματος είναι αρκετή η διακριτική ικανότητα **1 nA**. Για το λόγο αυτό, η ευαισθησία του ηλεκτρόμετρου μειώνεται 1000 φορές:

- **10** φορές, μέσω αλλαγής της κλίμακας μέτρησης από **200 mV** σε **2 V**, όπου η διακριτική ικανότητα είναι **0,0001 V** ή **0,1 mV**.
- **100** φορές, μέσω μείωσης της μετρητικής αντίστασης από **10 MΩ** σε **100 kΩ**.

Η δεύτερη αλλαγή γίνεται με τη βοηθητική αντίσταση των **100 kΩ** ( $\pm 2 \%$ ), που συνδέεται παράλληλα στην είσοδο του οργάνου.

Με τις αλλαγές αυτές, η διακριτική ικανότητα **0,1 mV**, κατά τάση, και η μετρητική αντίσταση **10<sup>5</sup> Ω**, παράγουν τη διακριτική ικανότητα (resolution), κατά ρεύμα, που είναι:

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R_{\mu}} = \frac{0,1 \text{ mV}}{100 \text{ k}\Omega} = \frac{10^{-4} \text{ V}}{10^5 \Omega} = 10^{-9} \text{ A} = 1 \text{ nA},$$

γεγονός που διευκολύνει την ανάγνωση της τιμής του ρεύματος, σε **nA**, δίχως την εμπλοκή πρόσθετου πολλαπλασιαστικού παράγοντα στις μετρήσεις. Έτσι, η ένδειξη **0,0251 V**, διαβάζεται και σημειώνεται ως **251 nA**.

#### 42.6.2. Ζητήματα ακρίβειας στη μέτρηση του ρεύματος

Καθώς το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση

$$I = \frac{u}{R_\mu},$$

το σφάλμα στο ρεύμα εξαρτάται από τα σφάλματα στην τάση και στη μετρητική αντίσταση, η οποία στην Άσκηση δεν είναι ακριβείας και ανήκει στην κατηγορία **2 %**.

Στο πηλίκο, για τα σχετικά σφάλματα ισχύει η σχέση (βλ. Συμπληρωματικές σημειώσεις)

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\delta R_\mu}{R_\mu} + \frac{\delta u}{u} = 0,02 + \frac{\delta u}{u},$$

όπου το σφάλμα στην τάση  $\delta u$  υπολογίζεται από το σφάλμα του βολτόμετρου.

Συμφωνά με τη δήλωση της κατασκευάστριας εταιρείας, στην κλίμακα **2 V**, οι παράμετροι ακριβείας του οργάνου είναι

$$\text{Accuracy: } \pm (0,05 \% \text{ rdg} + 3 \text{ digits}) \rightarrow \pm (\gamma_u + h_u r_u),$$

όπου  $\gamma_u = 0,05 \%$  είναι η ποσοστιαία συνιστώσα του σφάλματος,  $h_u = 3$  και  $r_u$  είναι η διακριτική ικανότητα στην τάση, που όπως είδαμε είναι  $r_u = 0,0001 \text{ V}$  ή  $10^{-4} \text{ V}$ .

Επομένως, στο βολτόμετρο, κατά τάση, το σφάλμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\delta u = u\gamma_u + h_u r_u,$$

ωστόσο λόγω μικρής τιμής του  $\gamma_u$  ακόμη και στη μέγιστη τιμή του σήματος, το γινόμενο  $u\gamma_u$  μπορεί να αγνοηθεί:

$$u\gamma_u |_{\max} = R_\mu i_{\max} \gamma = 10^5 \cdot 1000 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-4} (\Omega \text{A}) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 0,00005 \text{ V} \ll h_u r_u = 0,0003 \text{ V}.$$

Συνεπώς, με καλή προσέγγιση, το σφάλμα στην τάση είναι:

$$\delta u = u\gamma_u + h_u r_u \approx 0 + h_u r_u = 3 \cdot 0,0001 \text{ V} = 0,0003 \text{ V}.$$

Από την παρατήρηση αυτή, για το σφάλμα στο ρεύμα προκύπτει η σχέση

$$\delta I = I \left( 0,02 + \frac{\delta u}{u} \right) = I \left( 0,02 + \frac{0,3 \times 10^{-3} \text{ V}}{IR_\mu} \right) = 0,02I + \frac{0,3 \times 10^{-3} \text{ V}}{R_\mu} = 0,02I + 3 \times 10^{-9} (\text{A})$$

Τελικά, το σφάλμα στο ρεύμα του ηλεκτρόμετρου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta I = 0,02I + 3 \times 10^{-9} (\text{A}),$$

όπου στην παράσταση  $\delta I = I\gamma_i + h_i r_i$ :  $\gamma_i = 2 \%$ ,  $h_i = 3$  και  $r_i = 1 \text{ nA}$ .

Για παράδειγμα, στην ένδειξη **0,0251 V**, που σημειώνεται ως **251 nA**, το σφάλμα δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\delta I = I\gamma_i + h_i r_i = 251 \cdot 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 1 (\text{nA}) \approx 5 + 3 (\text{nA}) = 8 (\text{nA}).$$

Επομένως, η σωστή παράσταση του ρεύματος είναι:  $I = 251 \pm 8 (\text{nA})$ .



### 42.6.3. Προστασία του ηλεκτρόμετρου από τις ηλεκτρικές παρεμβολές

Το υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο είναι ευάλωτο στις ηλεκτρικές παρεμβολές, καθότι τα καλώδια συναρμολόγησης του ηλεκτρικού κυκλώματος έχουν μεγάλο μήκος και δεν είναι θωρακισμένα.

Σημειώνουμε, ότι τα θωρακισμένα καλώδια περιβάλλονται από μία εύκαμπτη χάλκινη πλεξούδα, το λεγόμενο μπλεντάζ, το οποίο συνήθως το συνδέουν με τη Γη (το γειώνουν).

Οι ηλεκτρικές παρεμβολές στα καλώδια συναρμολόγησης προκαλούν γρήγορες και άτακτες μεταβολές του τελευταίου ψηφίου κατά μερικές μονάδες, γεγονός που δυσκολεύει τις μετρήσεις. Οι άτακτες αυτές μεταβολές μειώνονται δεκάδες φορές, αν στη μετρητική αντίσταση συνδεθεί παράλληλα ένας πυκνωτής των **10 μF**, ο οποίος «βραχυκυκλώνει» και εξουδετερώνει τις γρήγορες μεταβολές της τάσης και του ρεύματος, αλλά δεν επηρεάζει τη μέση τιμή, την οποία μετράμε τελικά. Η μόνη αρνητική επίπτωση της παρουσίας του είναι η μεγάλη αδράνεια του μετρητή, η οποία χαρακτηρίζεται από τη σταθερά χρόνου  $\tau$ :

$$\tau = RC = 10^5 (\Omega) \times 10^{-5} (\text{F}) = 1 \text{ s.}$$

Συνεπώς, στο προστατευμένο ηλεκτρόμετρο, κάθε νέα ένδειξη της τιμής θα σταθεροποιείται μετά από παρέλευση  $3\tau$  ή περίπου **3** δευτερολέπτων, γεγονός που επιβάλλει η νέα ένδειξη του οργάνου να σημειώνεται μετά από παρέλευση **3** δευτερολέπτων.

Η πειραματική διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα πειράματα, καθώς παρέχει τη δυνατότητα θέρμανσης της ακίδας, επικάλυψης της ακίδας με άτομα του βαρίου, όπως επίσης και λειτουργία της συσκευής ως ηλεκτρονικό μικροσκόπιο με μεγέθυνση  $R_{\text{συλλέκτη}}/r_{\text{ακίδας}} \approx 10^6$ . Για τον σκοπό αυτό η εσωτερική επιφάνεια του συλλέκτη είναι καλυμμένη με λεπτό στρώμα φθορίζουσας ουσίας (ZnS), η οποία εκπέμπει φως, όταν τη βομβαρδίζουν ηλεκτρόνια με ενέργειες **5-10 keV**. Η δυνατότητες αυτές δεν αξιοποιούνται στην Άσκηση αυτή και παραμένουν ανενεργές.

### Βιβλιογραφία

Σ. Τραχανάς, *KBANTOMΗΧΑΝΙΚΗ I*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.

### 42.7. Εκτέλεση

Προσοχή. Στην Άσκηση αυτή χρησιμοποιούνται υψηλές τάσεις (έως **10 kV**), που είναι επικίνδυνες για τη ζωή. Για το λόγο αυτό:

(α) δεν επιτρέπεται στον σπουδαστή να θέτει σε λειτουργία την πηγή της υψηλής τάσης.

(β) η συναρμολόγηση του ηλεκτρικού κυκλώματος της Άσκησης πρέπει να γίνεται αυστηρά με κλειστή την πηγή υψηλής τάσης και μόνο με ειδικά καλώδια ασφαλείας.

(γ) την πηγή της υψηλής τάσης τη θέτει σε λειτουργία μόνο ο επιβλέπων καθηγητής της Άσκησης, εφόσον βεβαιωθεί πρώτα, ότι το ηλεκτρικό κύκλωμα είναι συναρμολογημένο σωστά.

Η εκτέλεση της Άσκησης περιλαμβάνει **2** πειράματα: ένα *δοκιμαστικό* και το *κύριο*.

Στο δοκιμαστικό πείραμα γίνεται η μέτρηση του ρεύματος συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάση, καθώς η τάση αυξάνει με βήμα **400 V**. Στο *κύριο* πείραμα το βήμα είναι **100 V**.

Καθώς στις μικρές τάσεις (**0 - 3 kV**) το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό, η αποστολή του δοκιμαστικού πειράματος είναι να εντοπιστεί η τάση  $U_a$  (**3-4 kV**), στην οποία το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής αρχίζει να αυξάνει απότομα, ακολουθώντας μία εκθετική συνάρτηση τάσης.

1. Συναρμολογήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχ. 42.6.
2. Όταν ο επιβλέπων της Άσκησης θέσει σε λειτουργία την πηγή υψηλής τάσης, ρυθμίστε την τάση εξόδου στο μηδέν.

Το ψηφιακό πολύμετρο του ηλεκτρόμετρου πρέπει να λειτουργεί ως μετρητής τάσης στην κλίμακα **2 V**.

Τονίζουμε, ότι προκειμένου η ακίδα να μην καταστραφεί, το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής πρέπει να είναι πάντα μικρότερο από **1000 nA**!

### 3. Στο δοκιμαστικό πείραμα

Αυξάνοντας σταδιακά την τάση της πηγής, με βήμα **400 V**, εντοπίστε εκείνη την τάση  $U_a$ , στην οποία το ρεύμα αρχίζει να αυξάνει απότομα. Το μικρό ρεύμα (μερικά nA) που παρατηρείται πριν την απότομη άνοδο – δεν είναι της ψυχρής εκπομπής και οφείλεται στη επιφανειακή διαρροή του ρεύματος στην εξωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας της λυχνίας κενού. Κύριο γνώρισμα του ρεύματος διαρροής,  $I_\delta$ , είναι ο ωμικός του χαρακτήρας, δηλαδή ακολουθεί το νόμο του Ωμ και αυξάνει γραμμικά συναρτήσει τάσης.

Στην επεξεργασία των μετρήσεων, το ρεύμα διαρροής πρέπει να αφαιρεθεί.

### 4. Στο κύριο πείραμα

Στο κύριο πείραμα, το ρεύμα θα μετρηθεί 2 φορές: στην άνοδο και στην κάθοδο της τάσης. Η τάση εκκίνησης είναι η τάση  $U_a$ .

Αρχίστε να αυξάνετε την τάση με βήμα **100 V**, σημειώνοντας το ρεύμα συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης. Η άνοδος της τάσης πρέπει να γίνεται έως ότου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής γίνει λήγω μικρότερο από **1000 nA**.

Καθώς τα μεγάλα ρεύματα φθείρουν την ακίδα, δίχως καθυστέρηση και χρονοτριβή, για τις ίδιες τιμές τάσης, μετρήστε το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, αλλά στην «κάθοδο» της τάσης, έως την τιμή  $U_a$ .

Στις μετρήσεις αυτές, το ρεύμα που μετράτε είναι συνολικό,  $I_\sigma$ , το οποίο αποτελεί άθροισμα δύο ρευμάτων: του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής και του ρεύματος διαρροής, που στην επεξεργασία θα αφαιρεθεί. Για το σκοπό αυτό, μετρήστε το ρεύμα διαρροής, σημειώνοντας το ρεύμα στην τάση κατά **300 V** μικρότερη από την  $U_a$ . Στην τάση αυτή, το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό και μπορεί να αγνοηθεί και, επομένως, το ρεύμα που μετράτε αποτελείται ουσιαστικά μόνο από το ρεύμα διαρροής.

Συμπληρώστε τον Πίνακα 1.

**Πίνακας 1**

$U_1$ (V)	$I_{\sigma 1}$ (nA)	$U_2$ (V)	$I_{\sigma 2}$ (nA)	$I_{\sigma\text{-μέσο}}$ (nA)	$I_\psi = I_{\sigma\mu} - I_\delta$ (nA)
$U_a + 100$		$U_a + 100$			
$U_a + 200$		$U_a + 200$			
$U_a + 300$		$U_a + 300$			
-----	-----	-----	-----	-----	
$U_{\max}$		$U_{\max}$			

#### 42.8. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Σε ένα χαρτί μιλιμετρέ, στο διάστημα  $U_a - U_{\max}$ , σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της σχέσης  $I_{\psi} = f(U)$ .
2. Για το διάστημα  $U_a - U_{\max}$ , υπολογίστε τις τιμές  $1/U$  και  $\text{Ln}(I_{\psi}/U^2)$  και συμπληρώστε τις στήλες του πίνακα 2.

Πίνακας 2

$U$ (V)	$I_{\psi}$ (nA)	$1/U$ (V <sup>-1</sup> )	$\text{Ln}(I_{\psi}/U^2)$
$U_a + 100$			
$U_a + 200$			
$U_a + 300$			
-----			
$U_{\max}$			

3. Σε δεύτερο χαρτί μιλιμετρέ, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση  $\text{Ln}(I_{\psi}/U^2) = f(1/U)$ .
4. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, υπολογίστε την κλίση  $B$  (τιμή και σφάλμα) της πειραματικής ευθείας.
5. Από τη σχέση (42.21), υπολογίστε, επίσης, και το γεωμετρικό παράγοντα της ακίδας  $\omega$  (τιμή και σφάλμα), θεωρώντας, ότι το έργο εξόδου  $\phi$  του βολφραμίου δεν επηρεάστηκε από το υψηλό ηλεκτρικό πεδίο και ήταν **4,5 eV**.
6. Υπολογίστε, κατ' εκτίμηση, την ακτίνα του ημισφαιρίου στην κορυφή της ακίδας και συγκρίνετε την τιμή που υπολογίσατε με αυτή που δηλώνει η κατασκευάστρια εταιρεία της λυχνίας κενού.
7. Επηρεάστηκε ή δεν επηρεάστηκε αισθητά το έργο εξόδου του βολφραμίου στο πείραμά σας;
8. Σχολιάστε το αποτέλεσμα του πειράματος.