

Άσκηση 29

Μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στα υγρά

29.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση της ταχύτητας του ήχου v στην αιθυλική αλκοόλη, με τη μέθοδο ενός στάσιμου υπερηχητικού κύματος που γίνεται ορατό με οπτικές μεθόδους, καθώς και ο προσδιορισμός του συντελεστή συμπίεστικότητας του συγκεκριμένου υγρού.

29.2. Γενικά

Η ταχύτητα διάδοσης των **διαμήκων** κυμάτων v_l μέσα σε ένα υλικό με διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος, λ , των κυμάτων αυτών, δίνεται από τη σχέση:

$$v_l = \sqrt{\frac{\frac{1}{k} + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (29.1)$$

όπου το k είναι ο **συντελεστής συμπίεστικότητας** του υγρού, G το **μέτρο διάτμησης** και ρ η πυκνότητα του υλικού.

Αντιστοίχως, η ταχύτητα διάδοσης των **εγκάρσιων** κυμάτων v_s μέσα σε οποιοδήποτε υλικό δίνεται από τη σχέση:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (29.2)$$

Επειδή στα ρευστά (υγρά, αέρια) το μέτρο διάτμησης είναι μηδέν ($G = 0$), το αποτέλεσμα είναι ότι:

- δεν διαδίδονται εγκάρσια κύματα στα υγρά
- η Εξ. (29.1) για τα διαμήκη κύματα απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$v = \sqrt{\frac{1}{k_{ad}\rho}} \quad (29.3)$$

Το k_{ad} είναι, στην περίπτωση αυτή, ο **αδιαβατικός συντελεστής συμπίεστικότητας**¹.

Στην Εξ. (29.3) ο συντελεστής k_{ad} , καθώς και η πυκνότητα του υγρού ρ , εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, (θ σε $^{\circ}\text{C}$ ή T σε K), πράγμα που σημαίνει ότι και η ταχύτητα του ήχου μέσα στο υγρό εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

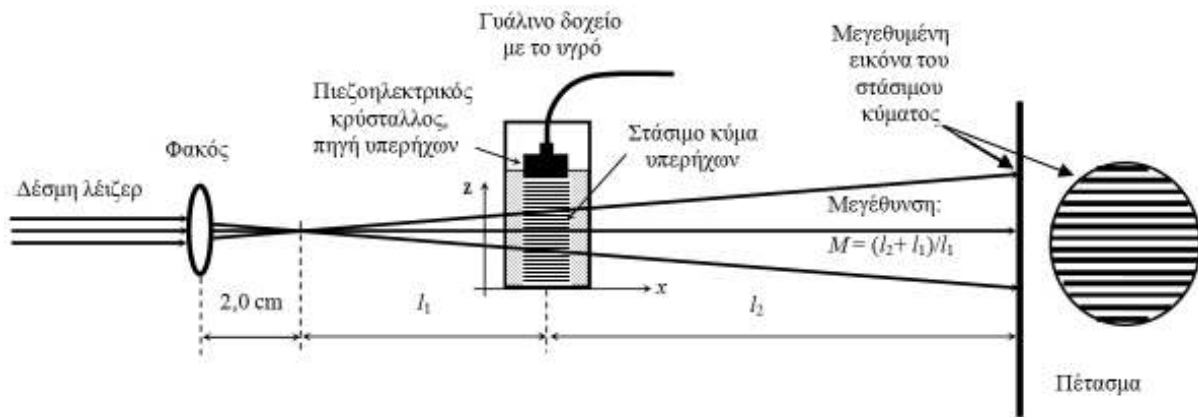
Σε όλα τα υγρά ο λόγος $\Delta v/\Delta\theta$ ή $\Delta v/\Delta T$, που δίνει τη μεταβολή της ταχύτητας του ήχου ανά βαθμό Κελσίου, έχει αρνητική τιμή (για παράδειγμα, για τη γλυκερίνη έχουμε $\Delta v/\Delta\theta = -1,8 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$ και για την αιθυλική αλκοόλη $\Delta v/\Delta\theta = -3,6 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$), εκτός από την περίπτωση του νερού όπου ο λόγος αυτός είναι θετικός, με τιμή $+2,5 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς η

¹Επειδή στα ηχητικά κύματα (ιδιαίτερα στους υπερήχους) έχουμε γρήγορες εναλλαγές μεταξύ συμπίεσεων και εκτονώσεων, δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για τη μεταφορά της θερμότητας από τις συμπιεζόμενες περιοχές προς τις εκτονούμενες, με αποτέλεσμα οι διαδικασίες να είναι αδιαβατικές, και γι' αυτό και το k αντικαθίσταται στην περίπτωση αυτή από το k_{ad} .

θερμοκρασία του νερού αυξάνει, αυξάνει και η ταχύτητα του ήχου, αλλά μόνο μέχρι τους 74 °C, όπου η v έχει και τη μεγαλύτερη τιμή (1557 m/s). Στις υψηλότερες θερμοκρασίες η ταχύτητα του ήχου στο νερό αρχίζει να ελαττώνεται, καθώς η θερμοκρασία αυξάνει.

29.3 Μέθοδος

Στην παρούσα εργασία θα μετρηθεί η ταχύτητα του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη με τη μέθοδο του στάσιμου ηχητικού κύματος (βλ. Παράγρ Π29.2 και Άσκηση 28). Για την πραγματοποίηση της μεθόδου χρησιμοποιείται η διάταξη που απεικονίζεται στο Σχ. 29.1.



Σχήμα 29.1 Διάταξη για τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στα υγρά. Η δέσμη του λέιζερ, μετά τον συγκεντρωτικό φακό, διέρχεται μέσα από το γυάλινο δοχείο που περιέχει το μελετούμενο υγρό και κατευθύνεται προς το πέτασμα. Ο πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος, που τροφοδοτείται από μια γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης (μη εικονιζόμενη) στέλνει ένα υπερηχητικό κύμα το οποίο, ανακλώμενο στον πυθμένα του δοχείου, δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα κατά μήκος του άξονα z , το οποίο προβάλλεται πάνω στο πέτασμα με τη μορφή φωτεινών και σκοτεινών κροσσών. Δεξιά απεικονίζεται σχηματικά η εικόνα των κροσσών που βλέπουμε πάνω στο πέτασμα.

Ένα γυάλινο δοχείο είναι γεμάτο με το υγρό στο οποίο θέλουμε να μετρήσουμε την ταχύτητα του ήχου. Μία επίπεδη πιεζοηλεκτρική πηγή υπερήχων στέλνει ένα σχεδόν επίπεδο ηχητικό κύμα το οποίο, ανακλώμενο στον πυθμένα του δοχείου, δημιουργεί ένα στάσιμο ηχητικό πεδίο πίεσης κατά μήκος του άξονα z . Επειδή ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από την πίεση που ασκείται στο υγρό, θα διαμορφωθεί ελαφρώς κατά μήκος του άξονα z , ακολουθώντας την κατανομή της πίεσης μέσα στο υγρό.

Με τη βοήθεια ενός λέιζερ και ενός συγκεντρωτικού φακού φωτίζουμε το γυάλινο δοχείο με μια αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη. Στο ηχητικό πεδίο υπάρχουν σημεία που δεν εκτρέπουν τις ακτίνες (κοιλίες πίεσης), οπότε αυτές συνεχίζουν την πορεία τους και αφήνουν, σε ένα πέτασμα πίσω από το δοχείο, ένα φωτεινό ίχνος με τη μεγαλύτερη λαμπρότητα. Όμως, στο ισχυρό ηχητικό πεδίο υπάρχουν και σημεία που εκτρέπουν έντονα το φως (δεσμοί πίεσης), οπότε το φωτεινό ίχνος των ακτίνων που διέρχονται από τα σημεία αυτά έχει την ελάχιστη λαμπρότητα. Με τον τρόπο αυτό, το ηχητικό πεδίο μέσα στο υγρό γίνεται ορατό στο πέτασμα με τη μορφή φωτεινών και σκοτεινών κροσσών, η απόσταση μεταξύ των οποίων μπορεί εύκολα να μετρηθεί. Γνωρίζουμε ότι σε ένα στάσιμο κύμα η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών ή δύο κοιλιών, και επομένως μεταξύ δύο φωτεινών ή σκοτεινών κροσσών, ισούται με $\lambda/2$, όπου λ το μήκος κύματος του διαδιδόμενου κύματος. Έτσι, από την εικόνα που παίρνουμε στο πέτασμα υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο φωτεινών κροσσών και, επομένως, το $\lambda/2$. Επειδή είναι γνωστή και η συχνότητα f της ηχητικής πηγής, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου v μέσα στο εξεταζόμενο υγρό από τη σχέση $v = \lambda f$.

Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ορατό το ηχητικό πεδίο εξηγείται λεπτομερώς στο Παράρτημα. Πιο συγκεκριμένα, στην Παράγρ. Π29.1 εξετάζουμε τις γενικότερες συνθήκες υπό τις οποίες παρατηρείται εκτροπή του φωτός, όταν αυτό διέρχεται μέσα από ένα οπτικώς ανομοιογενές μέσον, ενώ το πώς και το γιατί στο ακουστικό πεδίο δημιουργούνται συνθήκες που προκαλούν την εκτροπή του φωτός, περιγράφεται στην Παράγρ. Π29.3.

29.4 Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 29.1) που θα χρησιμοποιήσουμε περιλαμβάνει:

- Μια γεννήτρια υπερηχητικών συχνοτήτων (δεν απεικονίζεται). Η γεννήτρια αυτή παρέχει εναλλασσόμενη **υψηλή** τάση συχνότητας 800 kHz και, επιπλέον, προσφέρει τη δυνατότητα ελέγχου της τιμής της τάσης εξόδου.
- Μια επίπεδη πηγή υπερήχων από χαλαζία (πιεζοκρύσταλλο) που, όταν τροφοδοτηθεί από τη γεννήτρια, παράγει υπερήχους της ίδιας συχνότητας με εκείνη της πηγής (800 kHz).
- Ένα γυάλινο δοχείο που περιέχει το υγρό στο οποίο επιθυμούμε να μετρήσουμε την ταχύτητα του ήχου. Μέσα στο υγρό αυτό δημιουργείται το στάσιμο υπερηχητικό πεδίο από την πηγή υπερήχων.
- Ένα λέιζερ He-Ne ισχύος 2 – 3 mW (δεν απεικονίζεται).
- Έναν συγκεντρωτικό φακό εστιακής απόστασης $f = 2,0$ cm.
- Ένα πέτασμα από χαρτί μιλλιμετρέ, πάνω στο οποίο, με τη βοήθεια του φακού, προβάλλεται η εικόνα του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο υγρό.
- Μια μετροταινία για τη μέτρηση των διαφόρων αποστάσεων (δεν απεικονίζεται)
- Ένα θερμομέτρο για τη μέτρηση της θερμοκρασίας του υγρού (δεν απεικονίζεται)

Βιβλιογραφία

1. H. C. Ohanian, *Φυσική*, Τόμος Α': *Μηχανική-Θερμοδυναμική*, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα 1991), Κεφ.14: Παράγρ. 14.4, Κεφ.16: Παράγρ. 16.6, Κεφ.17: Παράγρ.17.2.
2. H. C. Ohanian, *Φυσική*, Τόμος Β': *Ηλεκτρομαγνητισμός-Οπτική*, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα 1991), Κεφ. 37: Παράγρ. 37.3.
3. H. D. Young, *Πανεπιστημιακή Φυσική*, Τόμος Α': *Μηχανική-Θερμοδυναμική*, Εκδόσεις Παπαζήση (Αθήνα 1994), Κεφ. 11: Παράγρ. 11.6, 11.7, Κεφ. 19: Παράγρ. 19.5, Κεφ. 20: Παράγρ. 20.4, Κεφ. 21: Παράγρ. 21.1.
4. H. D. Young, *Πανεπιστημιακή Φυσική*, Τόμος Β': *Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*, Εκδόσεις Παπαζήση (Αθήνα 1994), Κεφ. 34: Παράγρ. 34.2.
5. H. D. Young και R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική Sears and Zemansky*, Τόμος Α': *Μηχανική-Κύματα*, Εκδόσεις Παπαζήση (Αθήνα 2009), Κεφ. 11: Παράγρ. 11.4, Κεφ. 16: Παράγρ. 16.1, 16.2, 16.4.

29.5 Εκτέλεση

1. Γεμίστε το γυάλινο δοχείο με αιθυλική αλκοόλη, έως 1 cm κάτω από το χείλος του.
2. Βυθίστε την πηγή των υπερήχων κατά 2 mm μέσα στο νερό.
3. Θέστε σε λειτουργία το λέιζερ και φροντίστε ώστε η φωτεινή δέσμη να περνάει μέσα από το κέντρο του φακού και, στη συνέχεια, 1 – 2 cm κάτω από την πηγή υπερήχων και να καταλήγει στο πέτασμα.
4. Θέστε σε λειτουργία την πηγή υπερήχων και ρυθμίστε την τάση εξόδου με το κουμπί «Amplitude».

ΠΡΟΣΟΧΗ: Να μην υπερβείτε την ένδειξη που σημειώνεται με ένα (!) στο τέλος της μαύρης ζώνης.

5. Εάν όλα έχουν γίνει σωστά, με κατάλληλη ρύθμιση του πλάτους της ταλάντωσης, θα παρατηρήσετε πάνω στο πέτασμα έναν αριθμό εναλλασσόμενων φωτεινών και σκοτεινών κροσσών. Η εικόνα αυτή είναι η προβολή (υπό μεγέθυνση) του στάσιμου υπερηχητικού πεδίου, που δημιουργείται από τη δέσμη των υπερήχων καθώς αυτή ανακλάται στον πυθμένα του γυάλινου δοχείου. Αν η εικόνα δεν είναι ικανοποιητικά καθαρή, ανεβάστε λίγο τη βάση του δοχείου (με τη βοήθεια του πλευρικού κοχλίου), ωστόσο πετύχετε μια καθαρή εικόνα.
6. Μετρήστε έναν αριθμό, n , φωτεινών κροσσών (π.χ. 10 – 15) και την απόσταση a μεταξύ του πρώτου και του n -στού κροσσού και εκτιμήστε το σφάλμα δa .
7. Μετρήστε τη θερμοκρασία θ του υγρού.
8. Μετρήστε την απόσταση l_1 , από την εστία του φακού (η εστία του φακού βρίσκεται στα 2 cm από τον φακό) μέχρι το μέσον του γυάλινου δοχείου, και την απόσταση l_2 , από το μέσον του γυάλινου δοχείου μέχρι το πέτασμα (βλ. Σχ. 29.1). Εκτιμήστε τα αντίστοιχα σφάλματα δl_1 και δl_2 .
9. Κλείστε όλα τα όργανα και αδειάστε το γυάλινο δοχείο, μεταφέροντας την αιθυλική αλκοόλη πίσω στο αρχικό της δοχείο.

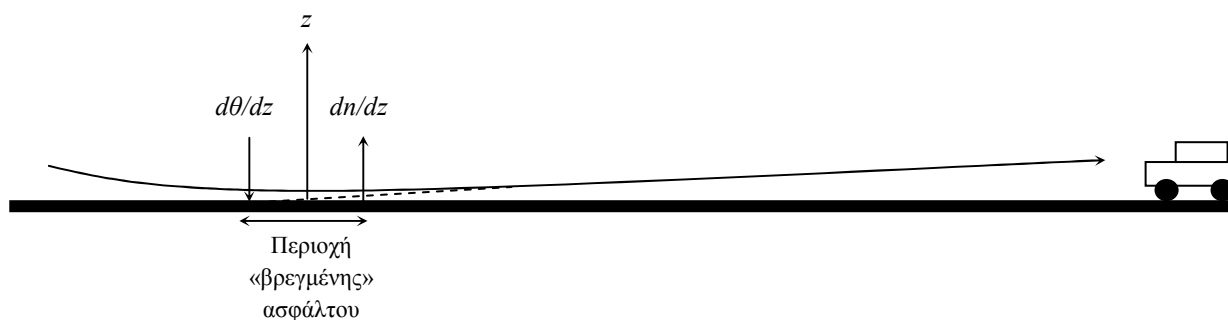
29.6 Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών φωτεινών κροσσών στο πέτασμα.
2. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εικόνα του στάσιμου κύματος που βλέπετε στο πέτασμα είναι $(l_1 + l_2)/l_1$ φορές μεγαλύτερη από την αληθινή εικόνα, υπολογίστε το $\lambda/2$ του στάσιμου υπερηχητικού κύματος και, από αυτό, την ταχύτητα του ήχου v , καθώς και το σχετικό σφάλμα $\delta v/v$. Η συχνότητα του ηχητικού κύματος είναι γνωστή και ίση με $f = 800$ kHz. Θεωρήστε ότι το σφάλμα στη συχνότητα είναι μηδέν.
3. Από την Εξ. (29.3) υπολογίστε τον αδιαβατικό συντελεστή συμπίεστότητας, k_{ad} , του υγρού και συγκρίνετε με την τιμή που δίνεται στη βιβλιογραφία.
4. Συγκρίνετε την τιμή της ταχύτητας του ήχου που μετρήσατε στην αιθυλική αλκοόλη με την τιμή που δίνεται στη βιβλιογραφία. Αν η τιμή δεν αναφέρεται στη ίδια θερμοκρασία, να συγκρίνετε τις δύο τιμές αφού γίνουν οι σχετικές διορθώσεις (βλ. Παράγρ. 29.2).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π29)

Π29.1 Διάδοση του φωτός σε οπτικώς ανομοιογενή μέσα

Αν ένα φωτεινό κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο ο δείκτης διάθλασης, n , του οποίου μεταβάλλεται, π.χ., κατά τη διεύθυνση z , όπου υπάρχει δηλαδή μια βαθμίδα dn/dz , τότε οι ακτίνες του φωτός καμπυλώνονται και το φως οδεύει προς την περιοχή όπου ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται (αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν κατά μήκος του άξονα z ελαττώνεται η θερμοκρασία). Έτσι δημιουργείται το γνωστό φαινόμενο του αντικατοπτρισμού (*mirage*), της οπτικής απάτης δηλαδή που παρατηρείται συνήθως το καλοκαίρι πάνω από την άμμο της ερήμου ή από ασφαλτοστρωμένους δρόμους. Πράγματι, σε μεγάλη απόσταση από τον παρατηρητή («ξυστή» γωνία παρατήρησης), η άσφαλτος φαίνεται να είναι βρεγμένη, ενώ στην πραγματικότητα ο οδηγός βλέπει ένα τμήμα του ουρανού. Το φαινόμενο οφείλεται ακριβώς στην καμπύλωση των φωτεινών ακτίνων, που διαθλώνται σε στρώματα αέρα με αυξανόμενο προς τα πάνω δείκτη διάθλασης, επειδή η θερμοκρασία του αέρα ελαττώνεται με την απομάκρυνση από το έδαφος (Σχ. Π29.1).



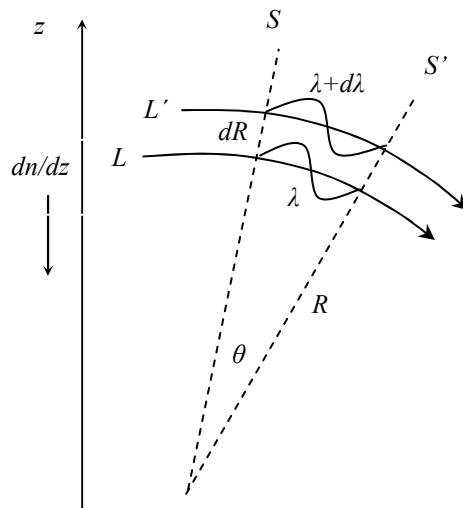
Σχήμα Π29.1 Καμπύλωση φωτεινής ακτίνας πάνω από την πυρακτωμένη άσφαλτο.

Ας εξετάσουμε μια απλή απόδειξη που αναφέρεται στον υπολογισμό της ακτίνας καμπυλότητας ενός φωτεινού κύματος, το οποίο διαδίδεται μέσα σε οπτικό μέσο, ο δείκτης διάθλασης του οποίου μεταβάλλεται κατά την κατεύθυνση z .

Έστω ότι δύο πολύ κοντινές φωτεινές ακτίνες L και L' κινούνται σε χώρο όπου ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται προς τις αρνητικές τιμές του z (Σχ. Π29.2). Αν θεωρήσουμε δύο ισοφασικές επιφάνειες S και S' (δηλαδή τις δύο κοντινότερες επιφάνειες στις οποίες το κύμα έχει την ίδια φάση), τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με το μήκος κύματος. Εφόσον ο δείκτης διάθλασης, n , του μέσου μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση z , θα μεταβάλλεται και η ταχύτητα διάδοσης του φωτός, c , μέσα στο μέσον κατά τη διεύθυνση αυτή και, επομένως, και το μήκος κύματος, λ , του φωτός, δοθέντος ότι

$$\lambda(n) = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{nf} \quad (\text{Π29.1})$$

όπου c_0 είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n η συχνότητά του φωτεινού κύματος.



Σχήμα Π29.2 Διάδοση φωτεινού κύματος σε ανομοιογενές μέσον.

Έστω ότι λ και $\lambda + d\lambda$ είναι τα μήκη κύματος των δύο ακτίνων L και L' , αντιστοίχως. Από το Σχ. Π29.2 παρατηρούμε ότι

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (\text{Π29.2})$$

ή

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dR} = \frac{d \ln \lambda}{dR} \quad (\text{Π29.3})$$

Αν λογαριθμίσουμε την Εξ. (Π29.1), παίρνουμε:

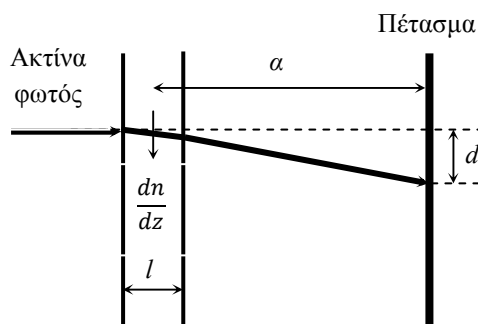
$$\ln \lambda = \ln c_0 - \ln n - \ln f \quad (\text{Π29.4})$$

που, σε συνδυασμό με την Εξ. (Π29.3), δίνει

$$\frac{1}{R} = -\frac{d \ln n}{dR} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dR} \quad (\text{Π29.5})$$

δοθέντος ότι $d \ln c_0 = 0$ και $d \ln f = 0$, αφού τα c_0 και f είναι μεγέθη σταθερά, ανεξάρτητα από το δείκτη διάθλασης.

Ας θεωρήσουμε τώρα (Σχ. Π29.3) έναν διαφανή κύλινδρο διαμέτρου l , κατασκευασμένο από ένα υλικό με ανομοιογένεια dn/dz στο δείκτη διάθλασης.



Σχήμα Π29.3 Εκτροπή της ακτίνας πάνω στο πέτασμα, εξαιτίας της μεταβολής του δείκτη διάθλασης κατά την κατεύθυνση z .

Όταν μια ακτίνα φωτός διαπερνά τον κύλινδρο διαμετρικά, η εκτροπή d του ίχνους της ακτίνας πάνω σε ένα πέτασμα που απέχει απόσταση a από τον κύλινδρο, αποδεικνύεται ότι είναι, με καλή προσέγγιση:

$$d = \alpha l \frac{dn}{dz} \quad (\text{Π29.6})$$

όταν οι γωνίες είναι μικρές και $a \gg l$. Σημειώνουμε ότι η αλλαγή του προσήμου της dn/dz συνεπάγεται και αλλαγή του προσήμου της εκτροπής.

Π29.2. Κοιλίες και δεσμοί της ακουστικής πίεσης

Όταν οι ακουστικές αντιστάσεις ($Z = \rho c$) του υγρού Z_1 και του γυαλιού Z_2 διαφέρουν πολύ, δηλαδή όταν $Z_1 \ll Z_2$, ο συντελεστής ανάκλαση της πίεσης ($G_p = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$) είναι σχεδόν 1, οπότε το στάσιμο κύμα της πίεσης δημιουργείται από τη συμβολή δύο κυμάτων που έχουν σχεδόν το ίδιο πλάτος. Έστω ότι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τις αρνητικές τιμές του z είναι $p_1(z, t) = p_o \sin(\omega t + kz + \alpha)$ και του ανακλώμενου είναι $p_2(z, t) = p_o \sin(\omega t - kz + \alpha)$, όπου $k = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματικός αριθμός, p_o είναι το πλάτος της εναλλασσόμενης πίεσης, ω είναι η κυκλική συχνότητα και α είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης στο σημείο $z = 0$. Η συμβολή των δύο κυμάτων δίνει

$$\begin{aligned} P(z, t) &= p_1 + p_2 \\ &= p_o \sin(\omega t + kz + \alpha) + p_o \sin(\omega t - kz + \alpha) \\ &= 2p_o \cos(kz) \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (\text{Π29.7})$$

Η Εξ. (Π29.7) είναι η γνωστή εξίσωση στάσιμου κύματος. Όπως βλέπουμε, πάνω στον ανακλαστήρα ($z = 0$ άρα $\cos kz = 1$) και σε μερικά άλλα σημεία, η ακουστική πίεση έχει τιμή διπλάσια από το πλάτος p_o (κοιλίες πίεσης), ενώ υπάρχουν σημεία όπου η ακουστική πίεση είναι πάντα μηδέν ($\cos kz = 0$, δεσμοί πίεσης). Οι δεσμοί και οι κοιλίες ορίζονται, προφανώς, από τα μηδενικά και τα ακρότατα της συνάρτησης $2p_o \cos kz$.

Επομένως, οι **κοιλίες της πίεσης** βρίσκονται στα σημεία για τα οποία ισχύει

$$kz_k = n\pi \quad \text{ή} \quad z_k = \frac{\lambda}{2} n \quad (\text{Π29.8α})$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, ενώ οι **δεσμοί της πίεσης** βρίσκονται στα σημεία, για τα οποία ισχύει

$$kz_\delta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{ή} \quad z_\delta = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad (\text{Π29.8β})$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Π29.3 Πως γίνεται ορατό το ηχητικό πεδίο

Όπως είδαμε, η εναλλασσόμενη πίεση στο στάσιμο ηχητικό πεδίο ορίζεται από την Εξ. (Π29.7), δηλαδή $P(z, t) = 2p_o \cos(kz) \sin(\omega t + \alpha)$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η βαθμίδα της πίεσης ως προς τον άξονα z είναι:

$$\frac{dP}{dz} = -k \sin(kz) \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{Π29.9})$$

Η πίεση στο υγρό επηρεάζει και μεταβάλλει την τιμή του δείκτη διάθλασης, εφόσον μεταβάλλει την πυκνότητά του. Εξαιτίας, επομένως, της βαθμίδας πίεσης, δημιουργείται μια βαθμίδα στον δείκτη διάθλασης του υγρού η οποία, σύμφωνα με την εξίσωση Lorentz, είναι:

$$\frac{dn}{dz} = \frac{1}{6n} k_{ad}(n^2 - 1)(n^2 + 2) \frac{dP}{dz} \quad (\text{Π29.10})$$

Από τις Εξ. (Π29.9) και (Π29.10) έχουμε

$$\frac{dn}{dz} = A(n)k_{ad} \sin(kz) \sin(\omega t + a) \quad (\text{Π29.11})$$

οπότε οι κοιλίες της βαθμίδας dn/dz βρίσκονται εκεί όπου η συνάρτηση $\sin(kz)$ μεγιστοποιείται, δηλαδή στα σημεία, για τα οποία ισχύει

$$kz_k = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{ή} \quad z_k = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad (\text{Π29.12})$$

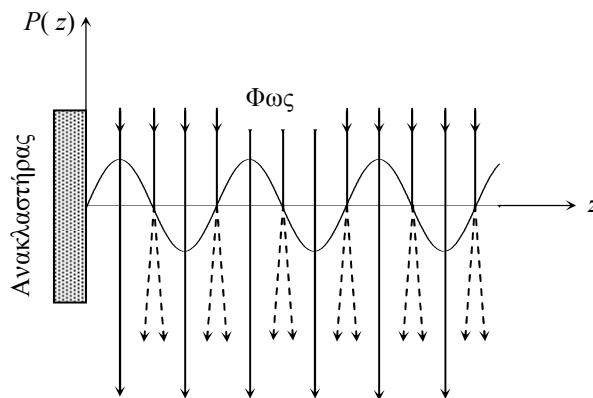
όπου $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Με άλλα λόγια οι κοιλίες της βαθμίδας του δείκτη διάθλασης αντιστοιχούν στους δεσμούς της πίεσης (βλ. Εξ. Π29.8β). Συνεπώς, στους δεσμούς της πίεσης η βαθμίδα dn/dz μεταβάλλεται με το χρόνο και εναλλάσσει το πρόσημό της με πλάτος

$$\frac{1}{6n} k_{ad}(n^2 - 1)(n^2 + 2)P_0 \quad (\text{Π29.13})$$

Αντίθετα, στις κοιλίες της πίεσης (βλ. Εξ. Π29.8α) η βαθμίδα dn/dz μηδενίζεται και ο δείκτης διάθλασης παραμένει σταθερός με το χρόνο.

Έτσι, οι κοιλίες πίεσης του στάσιμου κύματος, που δεν εκτρέπουν το φως, παρουσιάζονται στο λευκό πέτασμα ως φωτεινοί κροσσοί, ενώ οι δεσμοί πίεσης, που εκτρέπουν το φως πάνω κάτω (εδώ δεξιά-αριστερά), εικονίζονται ως σκοτεινοί κροσσοί (Σχ. Π29.4).



Σχήμα Π29.4. Όταν μια φωτεινή δέσμη διασχίζει το γυάλινο δοχείο γεμάτο με υγρό, μέσα στο οποίο έχει σχηματιστεί ένα στάσιμο κύμα, οι φωτεινές ακτίνες δεν εκτρέπονται από την πορεία τους στις κοιλίες της πίεσης, δημιουργώντας έτσι φωτεινούς κροσσοί πάνω στο πέτασμα, ενώ εκτρέπονται πάνω κάτω (εδώ δεξιά-αριστερά) στους δεσμούς της πίεσης, σχηματίζοντας έτσι σκοτεινούς κροσσοί.