

# Άσκηση 16

## Ροπή αδράνειας στερεών σωμάτων

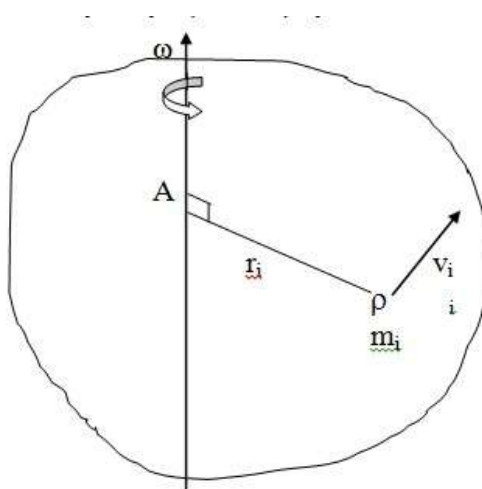
### 16.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή εξετάζεται η έννοια της ροπής αδράνειας και μετρούνται οι ροπές αδράνειας τεσσάρων στερεών σωμάτων: ενός δίσκου, μιας σφαίρας, ενός κυλινδρικού σωλήνα και ενός συμπαγούς κυλίνδρου.

### 16.2. Εισαγωγή

#### 16.2.1. Κινητική ενέργεια περιστρεφόμενου στερεού σώματος-Ροπή αδράνειας.

Ας εξετάσουμε ένα στερεό σώμα (Σχ. 16.1), το οποίο περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα A. Δεν είναι απαραίτητο ο άξονας να διαπερνά το σώμα.



Σχήμα 16.1

Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , ένα μικρό στοιχείο μάζας  $m_i$ , που απέχει απόσταση  $r_i$  από τον άξονα περιστροφής, θα έχει στιγμιαία ταχύτητα  $v_i = \omega r_i$ .

Η κινητική του ενέργεια θα είναι επομένως  $K_i = \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$ . Αθροίζοντας για όλα τα στοιχεία μάζας που αποτελούν το σώμα, έχουμε για την κινητική ενέργεια του σώματος, λόγω της περιστροφής του:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 \quad (16.1)$$

Το άθροισμα στην Εξ. (16.1) εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρική κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **ροπή αδράνειας του σώματος** ως προς τον άξονα  $I_A$ , και ορίζεται ως

$$I_A \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (16.2)$$

όπου ο δείκτης  $A$  υποδηλώνει τον άξονα ως προς τον οποίον υπολογίζεται η ροπή αδράνειας. Επομένως η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος, λόγω της περιστροφής του γύρω από

τον άξονα  $A$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , είναι

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \quad (16.3)$$

Η ομοιότητα της Εξ. (16.3) με τη γνωστή σχέση  $K = \frac{1}{2} m v^2$  για τη μεταφορική κίνηση, δείχνει ότι στην περιστροφική κίνηση, όπως η γωνιακή ταχύτητα παίζει το ρόλο που παίζει η ταχύτητα στη μεταφορική κίνηση, έτσι και η ροπή αδράνειας παίζει το ρόλο που παίζει η μάζα.

Οι ροπές αδράνειας πολλών στερεών σωμάτων ως προς κάποιους χαρακτηριστικούς άξονες υπολογίζονται εύκολα (βλ. Βιβλιογραφία, αναφορά 2). Στο όριο  $m_i \rightarrow dm$ , το άθροισμα στην Εξ. (16.2) μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα

$$I_A = \int_{\text{σώμα}} r^2 dm \quad (16.4)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας μερικών στερεών, ως προς διάφορους άξονες.

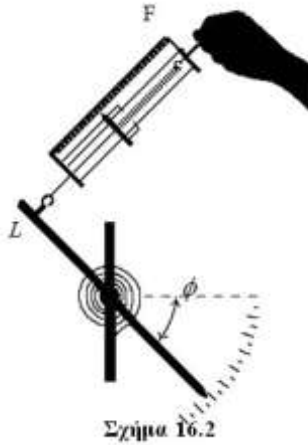
### ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

#### Ροπές αδράνειας μερικών κοινών στερεών σωμάτων

Ομογενές σώμα μάζας $M$	Άξονας	Ροπή αδράνειας
Ράβδος μήκους $L$	Κάθετος στη ράβδο, στο κέντρο της	$\frac{1}{12} ML^2$
	Κάθετος στη ράβδο, στο ένα της άκρο	$\frac{1}{3} ML^2$
Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας $R$	Κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου, στο κέντρο του	$MR^2$
	Μια διάμετρος του δακτυλίου	$\frac{1}{2} MR^2$
Κυκλικός δίσκος ακτίνας $R$	Κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, στο κέντρο του	$\frac{1}{2} MR^2$
	Μια διάμετρος του δίσκου	$\frac{1}{4} MR^2$
Συμπαγής σφαίρα ακτίνας $R$	Μια διάμετρος της σφαίρας	$\frac{2}{5} MR^2$
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας $R$	Ο άξονας του κυλίνδρου	$\frac{1}{2} MR^2$
Λεπτότοιχος σωλήνας ακτίνας $R$	Ο άξονας του σωλήνα	$MR^2$

#### 16.2.2. Δυναμική ενέργεια σπειροειδούς ελατηρίου

Αν το ένα άκρο ενός σπειροειδούς ελατηρίου διατηρείται ακίνητο, ενώ στο άλλο ασκείται μια δύναμη, το δεύτερο αυτό άκρο θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα του ελατηρίου. Έστω ότι το εξωτερικό άκρο του ελατηρίου διατηρείται ακίνητο, ενώ στο άλλο συνδέεται ένας μοχλοβραχίονας (ράβδος), ο οποίος μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του ελατηρίου και είναι κάθετος στο επίπεδό του (Σχ. 16.2). Αν μια δύναμη  $F$ , ασκηθεί κάθετα στο ελεύθερο άκρο του μοχλοβραχίονα, το οποίο απέχει απόσταση  $L$  από τον άξονα περιστροφής, ο μοχλοβραχίονας θα περιστραφεί κατά γωνία  $\varphi$ , ανάλογη της δύναμης.



Συγκεκριμένα,

$$\varphi = \frac{FL}{D} \quad (16.5)$$

όπου  $D$  είναι μια σταθερά του ελατηρίου, γνωστή ως κατευθύνουσα ροπή.

Ακριβέστερα, λέμε ότι η δύναμη  $F$  ασκεί στο ελατήριο ροπή η οποία έχει, ως προς το κέντρο του ελατηρίου, μέτρο ίσο με

$$N_F = FL \quad (16.6)$$

Το άκρο του ελατηρίου περιστρέφεται κατά γωνία  $\varphi$ , τόση ώστε το ελατήριο να αντιδράσει ασκώντας ίση και αντίθετη ροπή επαναφοράς,  $N = -N_F$ , όπου

$$N = -D\varphi \quad (16.7)$$

Αυτή η σχέση είναι ο νόμος του Hooke για το σπειροειδές ελατήριο.

Η Εξ. (16.5) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$F = \frac{D}{L}\varphi \quad (16.8)$$

Αν τώρα περιστρέψουμε το άκρο του ελατηρίου κατά ολική γωνία  $\varphi_0$ , μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το έργο που παράγουμε είναι ίσο με

$$W = \frac{1}{2}D\varphi_0^2 \quad (16.9)$$

Αυτή είναι και η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σπειροειδές ελατήριο (συγκρίνετε με τη δυναμική ενέργεια  $\frac{1}{2}kx^2$  του γραμμικού ελατηρίου).

### 16.3. Μέθοδος

Έστω ότι ένα στερεό σώμα μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα. Στην περιστροφή του σώματος αντιστέκεται σπειροειδές ελατήριο, το οποίο ασκεί ροπή επαναφοράς ανάλογη της γωνίας περιστροφής του σώματος από τη θέση ισορροπίας του (βλ. διάταξη του Σχ. 16.3). Το σύστημα αυτό αποτελεί έναν στροφικό αρμονικό ταλαντωτή, ο οποίος αν περιστραφεί κατά μία γωνία και αφεθεί ελεύθερος, θα εκτελέσει στροφικές ταλαντώσεις.

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν πιο πάνω, αν το σώμα έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\varphi$  από τη θέση ισορροπίας του και έχει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον άξονα ίση

με  $\omega$ , θα έχει δυναμική ενέργεια  $U = \frac{1}{2}D\varphi^2$  υποθηκευμένη στο ελατήριο και κινητική ενέργεια  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$  λόγω της περιστροφής του σώματος. Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι ίση με

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}D\varphi^2 \quad (16.10)$$

Αν οι τριβές μπορούν να αγνοηθούν, η  $E$  θα παραμένει σταθερή. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της  $E$  ως προς το χρόνο θα είναι ίσος με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}D\varphi^2\right) = 0 \Rightarrow I\omega\frac{d\omega}{dt} + D\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (16.11)$$

Όμως η γωνία  $\varphi$  και η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} \quad (16.12)$$

Επομένως η Εξ. (16.11) γράφεται ως

$$I\frac{d\omega}{dt} + D\varphi = 0 \quad \text{ή} \quad I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0$$

ή ακόμη

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0 \quad \text{όπου} \quad k \equiv \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (16.13)$$

Αυτή είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή για ελεύθερες ταλαντώσεις, η γενική λύση της οποίας είναι

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(kt + \theta) \quad (16.14)$$

όπου  $\varphi_0$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης (σε ακτίνια) και  $\theta$  μια γωνιακή σταθερά (επίσης σε ακτίνια), γνωστή ως **σταθερά φάσης**. Η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων  $\omega$ , είναι προφανώς ίση με  $k$  (σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο, rad/s). Οι σταθερές  $\varphi_0$  και  $\theta$  καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ή κάποιες άλλες συνθήκες του προβλήματος.

Από τη γνωστή σχέση  $T = 2\pi/k$ , η περίοδος των στροφικών ταλαντώσεων βρίσκεται ίση με

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (16.15)$$

Επομένως η ροπή αδράνειας του σώματος μπορεί να υπολογιστεί από την περίοδο των ταλαντώσεών του ως

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (16.16)$$

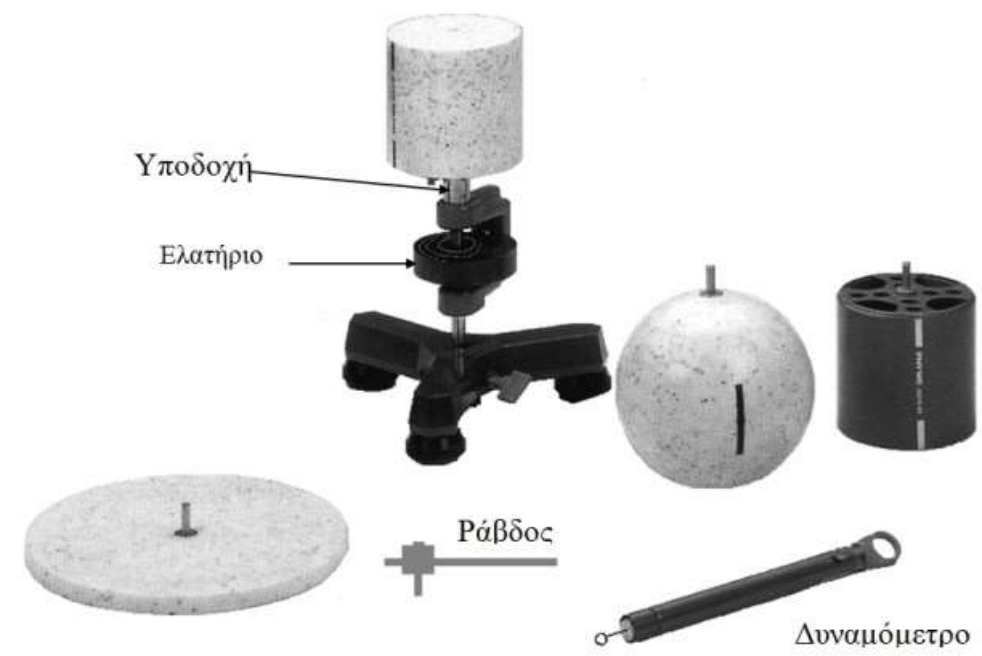
σχέση η οποία αποτελεί και τη βάση για τον προσδιορισμό των ροπών αδράνειας στην παρούσα άσκηση.

#### 16.4. Πειραματική διάταξη

Όπως είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο, στην περιστροφική κίνηση η ροπή αδράνειας του σώματος παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση. Έτσι η γνώση του μεγέθους αυτού αποκτά ιδιαίτερη σημασία όταν το σώμα περιστρέφεται ή εκτελεί ταλαντώσεις. Στα σώματα που έχουν απλή γεωμετρία, ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας

δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Αντίθετα, στα σώματα με περίπλοκο σχήμα, είναι προτιμότερο η ροπή αδράνειας να μετρηθεί πειραματικά.

Μία από τις συσκευές που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τη μέτρηση της ροπής αδράνειας των σωμάτων είναι ο στροφικός ταλαντωτής, ο οποίος εικονίζεται στο Σχ. 16.3.



Σχήμα 16.3 Στροφικός ταλαντωτής

Στη συσκευή αυτή το σώμα εκτελεί στροφικές ταλαντώσεις γύρω από κατακόρυφο άξονα. Η ροπή επαναφοράς παρέχεται από ένα σπειροειδές ελατήριο. Η σταθερά αυτού του ελατηρίου (η κατευθύνουσα ροπή  $D$ ), μπορεί να μετρηθεί με ένα δυναμόμετρο και ένα μογλοβραχίονα (Ράβδος), το μήκος του οποίου (εγκοπή-άξονας περιστροφής) πρέπει να μετρηθεί. Η ράβδος αυτή τοποθετείται κάθετα στον άξονα περιστροφής του συστήματος και έτσι μετατρέπεται σε ένα μοχλό που μπορεί να ασκήσει μετρήσιμη ροπή στο ελατήριο και να το περιστρέψει. Οι περίοδοι των στροφικών ταλαντώσεων των σωμάτων μετρούνται με τη βοήθεια ενός ψηφιακού χρονομέτρου χειρός. Στη διάταξη που χρησιμοποιούμε οι μάζες και οι χαρακτηριστικές διαστάσεις των σωμάτων αναγράφονται επάνω στις επιφάνειές τους.

### Βιβλιογραφία

1. Κ.Δ. Αλεξόπουλος, *Γενική Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική - Ακουστική* (Αθήνα, 1953), Κεφ. 5, 7, 10.
2. *Μαθήματα Φυσικής Berkeley*, Τόμος 1 (C. Kittel κ.ά.), *Μηχανική* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1998). Κεφ. 8.
3. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα 2010).

### 16.5. Εκτέλεση

### 16.5.1. Μέτρηση της σταθεράς επαναφοράς

1. Εισάγετε στην υποδοχή τη λεπτή ράβδο, που θα είναι έτσι κάθετη στον άξονα περιστροφής του συστήματος, και σφίξτε τη βίδα που βρίσκεται στο πλευρό της υποδοχής.
2. Πάρτε το δυναμόμετρο και με προσοχή φορέστε τη θηλιά του στη ράβδο, στο σημείο εγκοπής. Το δυναμόμετρο και η ράβδος πρέπει σε κάθε μέτρηση να σχηματίζουν ορθή γωνία.
3. Τραβήξτε το δυναμόμετρο κάθετα προς τη ράβδο, έως ότου η ράβδος περιστραφεί κατά γωνία  $\varphi$ , ίση με 45 μοίρες. Σημειώστε την ένδειξη του δυναμόμετρου (σε Newton, N).
4. Επαναλάβετε το βήμα 3 για τις γωνίες 90, 135, 180, 225, 270, 315 και 360 μοίρες και συμπληρώστε τον Πίνακα II.

Πίνακας II

$\varphi$ (μοίρες)	$F$ (N)

### 16.5.2. Μέτρηση των περιόδων των ταλαντώσεων

1. Αφαιρέστε τη ράβδο από την υποδοχή και στη θέση της τοποθετήστε τον δίσκο. Σφίξτε τη βίδα που βρίσκεται στο πλευρό της υποδοχής.
2. Στρέψτε τον δίσκο κατά περίπου 45 μοίρες και αφήστε τον να εκτελέσει στροφικές ταλαντώσεις. Μετρήστε το συνολικό χρόνο για 20 ταλαντώσεις, 6 φορές διαδοχικά.
3. Επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή για τον συμπαγή κύλινδρο, τον κυλινδρικό σωλήνα και τη σφαίρα, συμπληρώνοντας τον Πίνακα III.
4. Σημειώστε τις μάζες και τις διαστάσεις των σωμάτων αυτών.

Πίνακας III

	Δίσκος	Συμπαγής κύλινδρος	Κυλινδρικός σωλήνας	Σφαίρα
A/A Μέτρησης	Χρόνος για 20 πλήρεις ταλαντώσεις, $T_{20}$ (s)			
1				
2				
3				
....				
Μέση τιμή	$\overline{T_{20}} =$ s $\overline{T} =$ s	$\overline{T_{20}} =$ s $\overline{T} =$ s	$\overline{T_{20}} =$ s $\overline{T} =$ s	$\overline{T_{20}} =$ s $\overline{T} =$ s

## 16.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

### 16.6.1. Έλεγχος της γραμμικότητας και βαθμονόμηση του ελατηρίου

1. Από τις τιμές του Πίνακα II, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς  $F$  (σε N), συναρτήσει της γωνίας περιστροφής  $\varphi$  του ελατηρίου (σε ακτίνια, rad).
2. Διαπιστώστε αν η σχέση  $F = f(\varphi)$  είναι γραμμική Εξ. (16.8), προσδιορίστε, γραφικά, την κλίση της ευθείας  $D/L$ , και το σφάλμα της (Παράγρ. Γ.7) και από αυτήν υπολογίστε την κατευθύνουσα ροπή  $D$ , και το σφάλμα της  $\delta D$ .

### 16.6.2. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας των σωμάτων

1. Από τις τιμές της μέσης περιόδου  $\bar{T} = \bar{T}_{20}/20$ , που προκύπτουν από τον Πίνακα III, την τιμή  $D$  που μετρήσατε και την Εξ. (16.16), υπολογίστε την πειραματική τιμή της ροπής αδράνειας  $I$ : του δίσκου, του συμπαγούς κυλίνδρου, του κυλινδρικού σωλήνα και της σφαίρας, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα  $\delta I$ , και συμπληρώστε την πρώτη γραμμή του Πίνακα IV.
2. Από τις σχέσεις που δίνονται στον Πίνακα I, υπολογίστε τις θεωρητικές τιμές των ροπών αδράνειας των σωμάτων αυτών με βάση τις μάζες τους και τις διαστάσεις τους και συμπληρώστε τη δεύτερη γραμμή του Πίνακα IV.
3. Υπολογίστε τις σχετικές διαφορές  $\delta I/I = (I_{\theta} - I_{\pi})/I_{\theta}$ , ανάμεσα στις θεωρητικές και τις πειραματικές τιμές της ροπής αδράνειας για τις διάφορες περιπτώσεις και καταγράψτε τις στην τρίτη γραμμή του Πίνακα IV. Είναι οι διαφορές αυτές σημαντικές; Αν ναι, σε τι κατά τη γνώμη σας μπορεί να οφείλονται; Βρίσκονται μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος;

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

	Δίσκος	Συμπαγής κύλινδρος	Κυλινδρικός σωλήνας	Σφαίρα
$I_{\pi}$ (πειραματική) ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )				
$I_{\theta}$ (θεωρητική) ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )				
$\delta I/I_{\theta}$ (%)				