

Άσκηση 14

Μέτρηση του λόγου e/m του ηλεκτρονίου

14.1. Σκοπός

Στην Άσκηση αυτή μελετάται η κίνηση δέσμης ηλεκτρονίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο και προσδιορίζεται ο λόγος e/m (φορτίο προς μάζα) του ηλεκτρονίου.

14.2. Εισαγωγή

Ένας απλός τρόπος μέτρησης του λόγου e/m βασίζεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα κάθετο μαγνητικό πεδίο B .

Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια διαγράφουν μία κυκλική τροχιά, η ακτίνα της οποίας μπορεί να υπολογιστεί εξισώνοντας τη δύναμη Lorentz με την κεντρομόλο, δηλαδή από τις σχέσεις

$$F_L = e v B \quad \text{και} \quad F_C = \frac{m v^2}{r} \quad (14.1\alpha, \beta)$$

όπου v είναι οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων με τις οποίες αυτά εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο.

Επειδή ο πειραματικός προσδιορισμός των ταχυτήτων είναι δύσκολος, στην πράξη προτιμάται οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων να προσδιορίζονται έμμεσα, από τη διαφορά δυναμικού U_a που τα επιτάχυνε έως την ταχύτητα v , αξιοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{m v^2}{2} = e U_a \quad (14.2)$$

Από τις παραπάνω τρεις σχέσεις ο λόγος e/m υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$\frac{e}{m} = \frac{2 U_a}{r^2 B^2} \quad (14.3)$$

Το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από ένα ζευγάρι πηνίων Helmholtz, όπου στον κεντρικό χώρο μεταξύ των πηνίων δημιουργείται ένα αρκετά ομογενές μαγνητικό πεδίο, η ένταση του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \times \frac{\mu_0 N I}{R} \quad (14.4)$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, N είναι ο αριθμός των σπειρών στα πηνία, R είναι η ακτίνα των πηνίων και I είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα δύο πηνία.

Από τις σχέσεις (14.3) και (14.4), για το λόγο e/m προκύπτει η σχέση:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 U_a}{r^2 B^2} = \frac{250 R^2 U_a}{64 \mu_0^2 N^2 r^2 I^2} \quad (14.5)$$

Από την Εξ. (14.5), ο λόγος e/m μπορεί να μετρηθεί μέσω μέτρησης της τάσης επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων U_a , της έντασης του ρεύματος I που διαρρέει τα πηνία Helmholtz και της ακτίνας της τροχιάς r που διαγράφουν τα ηλεκτρόνια μέσα στο κάθετο μαγνητικό πεδίο, αν οι τροχιές τους με κάποιον τρόπο γίνουν ορατές.

14.3. Πειραματική διάταξη.

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει μία βάση με την καθοδική λυχνία κενού, τρία τροφοδοτικά των 6,3, 15 και 300 V, όπως επίσης και ένα ζευγάρι πηνίων Helmholtz.

- Το τροφοδοτικό των 6,3 V χρησιμοποιείται για τη θέρμανση της καθόδου του τηλεβόλου ηλεκτρονίων.
- Το τροφοδοτικό των 15 V χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των πηνίων Helmholtz με ρεύματα της τάξης 1-1,5 A. Στο τροφοδοτικό αυτό η παραγόμενη τάση μπορεί να ρυθμίζεται από 0 έως 15 V.
- Το τροφοδοτικό των 300 V χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία της ανόδου του τηλεβόλου ηλεκτρονίων, προορισμός του οποίου είναι η δημιουργία μίας λεπτής δέσμης ηλεκτρονίων καθορισμένης ενέργειας.

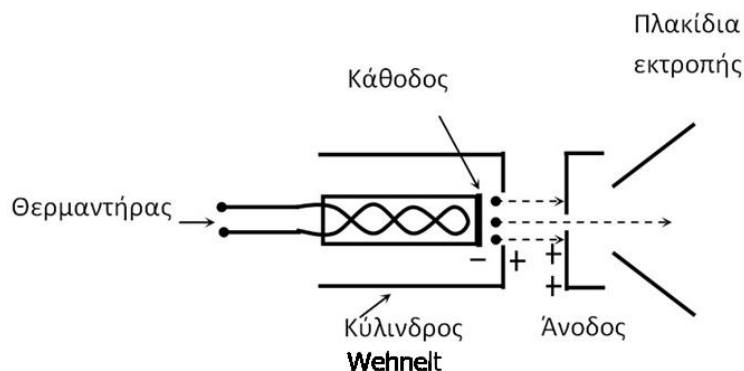
Στη λυχνία οι τροχιές των ηλεκτρονίων γίνονται ορατές μέσω γόμωσης της λυχνίας με Ήλιο, υπό πίεση 10 mTorr. Μέρος των ηλεκτρονίων συγκρούονται με τα άτομα του Ηλίου, τα διεγείρουν και καθώς αυτά στη συνέχεια αποδιεγείρονται, εκπέμπουν ορατό φως.

14.3.1. Τηλεβόλο ηλεκτρονίων της λυχνίας

Το τηλεβόλο ηλεκτρονίων της λυχνίας (Σχ.14.1) αποτελείται από 3 βασικά ηλεκτρόδια:

- Την κάθοδο έμμεσης θέρμανσης, δηλαδή την πηγή των ηλεκτρονίων
- Τον κύλινδρο Wehnelt, που περιβάλλει την κάθοδο και με το δυναμικό του παραλληλίζει τη δέσμη
- Την άνοδο, δηλαδή τον συλλέκτη των ηλεκτρονίων, με μία μικρή οπή, 0,5 mm, στο κέντρο.

Το θερμαντικό της καθόδου τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση 6,3 V και ρεύμα 0,3 A, ενώ η άνοδος τροφοδοτείται από την πηγή υψηλής τάσης. Μέρος της ανοδικής τάσης εφαρμόζεται στον κύλινδρο Wehnelt. Πίσω από την άνοδο υπάρχουν δύο πλακίδια εκτροπής, τα οποία δεν αξιοποιούνται στην Άσκηση αυτή.



Σχήμα 14.1. Το τηλεβόλο ηλεκτρονίων

Η κάθοδος του τηλεβόλου είναι έμμεσης θέρμανσης και αποτελείται από έναν κύλινδρο από νικέλιο που θερμαίνεται εσωτερικά. Στη βάση του κυλίνδρου βρίσκεται ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του βαρίου (BaO), το οποίο σε θερμοκρασίες 700-1000 K αποκτά ιδιότητες ημιαγωγού και εκπέμπει μεγάλο αριθμό ηλεκτρονίων στο κενό.

Έτσι όταν στην άνοδο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό, για παράδειγμα + 200 V (ως προς την κάθοδο ασφαλώς), τα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η κάθοδος επιταχύνονται και συγκρούονται με την άνοδο με ενέργειες 200 eV. Η δέσμη σχηματίζεται από τα ηλεκτρόνια που διαπερνάνε την οπή. Σημειώνουμε ότι τα δυναμικά των ενδιάμεσων ηλεκτροδίων δηλαδή του κυλίνδρου Wehnelt, δεν επηρεάζουν την τελική ενέργεια των ηλεκτρονίων.

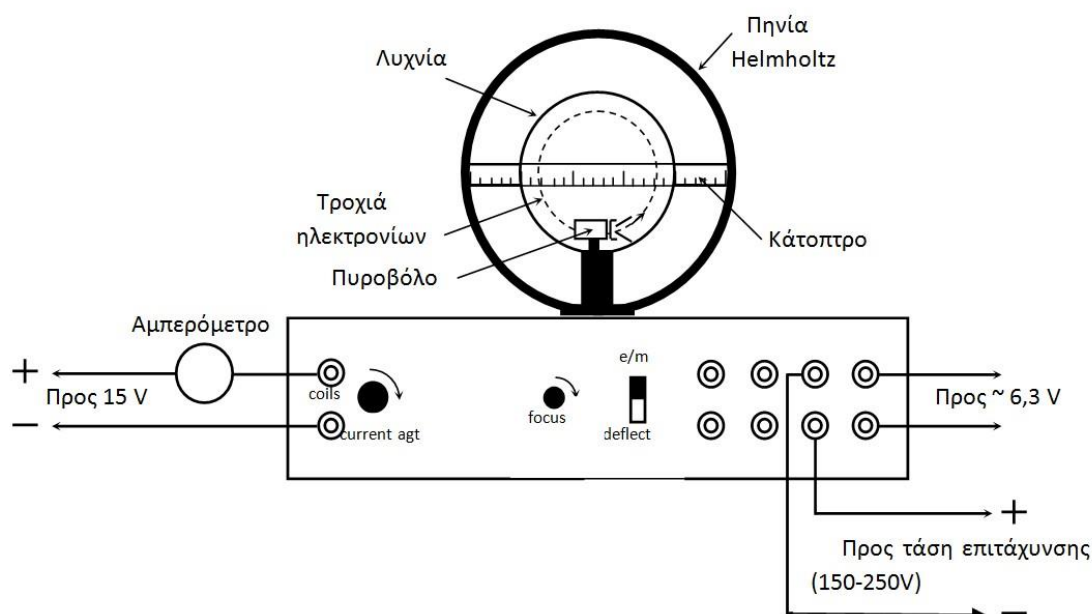
Η αποστολή του κυλίνδρου Wehnelt είναι να εστιάσει τη δέσμη προκειμένου αυτή να είναι παράλληλη, καθώς η οπή στην άνοδο έχει ιδιότητες αποκλίνοντα φακού ηλεκτρονίων (βλ. Παράρτημα 1).

Η διάταξη περιλαμβάνει ακόμη ένα ψηφιακό αμπερόμετρο για τη μέτρηση του ρεύματος που διαρρέει τα πηνία Helmholtz.

Στο τροφοδοτικό του τηλεβόλου η υψηλή τάση μπορεί να ρυθμίζεται από 0 έως 350 V. Η ρύθμιση της τάσης γίνεται με βήματα 50 V, ενώ οι ενδιάμεσες τιμές ρυθμίζονται με το κουμπί “FINE CONTROL”. Στο τροφοδοτικό αυτό υπάρχει και ένα ενσωματωμένο αναλογικό βολτόμετρο για την ένδειξη της παραγόμενης υψηλής τάσης.

Η βάση της λυχνίας αξιοποιείται ως στήριγμα των πηνίων και ως κιβώτιο συνδεσμολογίας, μέσω του οποίου τροφοδοτείται η λυχνία και τα πηνία Helmholtz. Το κιβώτιο της βάσης περιέχει 5 ζευγάρια ακροδεκτών, μέσω των οποίων τροφοδοτούνται τα πηνία Helmholtz, τα πλακίδια εκτροπής και τα βασικά ηλεκτρόδια του τηλεβόλου της λυχνίας.

Ένα βαθμονομημένο κάτοπτρο, τοποθετημένο στη μεγάλη διάμετρο της λυχνίας, πίσω της, χρησιμεύει για τη μέτρηση της διαμέτρου της κυκλικής τροχιάς των ηλεκτρονίων.



Σχήμα 14.2. Το κιβώτιο-βάση, τα πηνία και η τροφοδοσία του τηλεβόλου και των πηνίων

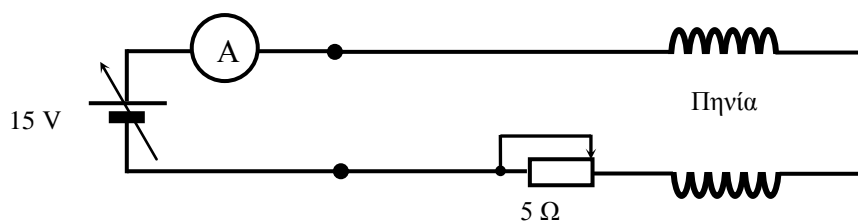
Βιβλιογραφία

1. *Μαθήματα Φυσικής Berkeley*. Τόμος 1: Μηχανική. Κεφ. 3 (Αθήνα 1978).
2. Alonso-Finn. *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική*. Τόμος II: Πεδία και Κύματα.
3. Κ. Αλεξόπουλος. *Γενική Φυσική*. Τόμος 3: Ατομική και Πυρηνική Φυσική. Κεφ. Α.
4. F. Lobkowich and A. Melissinos. *Physics for scientists and Engineers*. Vol. II, Ch. 10.
5. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος I, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα 2010).

14.4. Εκτέλεση

Προσοχή: Στην Άσκηση χρησιμοποιείται επικίνδυνη για τη ζωή τάση 300 V. Για τον λόγο αυτό η συναρμολόγηση του κυκλώματος πρέπει να γίνεται αυστηρά **μόνον όταν όλες οι πηγές τάσης είναι κλειστές**. Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι τα τροφοδοτικά τίθενται σε λειτουργία **μόνον** από τον επιβλέποντα της Άσκησης.

1. Αναγνωρίστε τα κύρια μέρη της πειραματικής διάταξης που βλέπετε στο Σχήμα 14.2 και στη συνέχεια συναρμολογήστε το κύκλωμα τροφοδοσίας των πηνίων Helmholtz, σύμφωνα με τα σχέδια που βλέπετε στα Σχήματα 14.2. και 14.3. Στο κιβώτιο-βάση ο διακόπτης “e/m:deflect” πρέπει να βρίσκεται στη θέση e/m.



Σχήμα 14.3.

2. Σημειώνουμε ότι στο κιβώτιο-βάση, εκ δεξιών:

- Πάνω από το πρώτο ζευγάρι ακροδεκτών που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση της καθόδου του τηλεβόλου αναγράφεται η λέξη HETER.
- Πάνω από το δεύτερο ζευγάρι που χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των δύο βασικών ηλεκτροδίων του τηλεβόλου αναγράφεται η λέξη ELECTRODES.
- Πάνω από το τρίτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη DEFLECT PLATES. Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της τάσης που εφαρμόζεται στα πλακίδια εκτροπής, όταν ο διακόπτης “e/m:deflect” βρίσκεται στη θέση “deflect” και η ακρίβεια του ενσωματωμένου στο τροφοδοτικό αναλογικού βολτόμετρου δεν είναι επαρκής.
- Πάνω από το τέταρτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη VOLTMETER(300V). Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της τάσης που εφαρμόζεται στην άνοδο του τηλεβόλου με όργανο μεγαλύτερης ακρίβειας, όταν ο διακόπτης “e/m:deflect” βρίσκεται στη θέση “e/m” και η ακρίβεια του ενσωματωμένου στο τροφοδοτικό αναλογικού βολτόμετρου δεν είναι επαρκής.
- Πάνω από το πέμπτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη HELMHOLTZ COILS. Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των πηνίων Helmholtz.

3. Θέσατε σε λειτουργία το τροφοδοτικό που τροφοδοτεί τα πηνία Helmholtz.

Σημείωση: Στο κιβώτιο-βάση, το κουμπί Current ADJ χρησιμεύει για τη μεταβολή του ρεύματος στα πηνία Helmholtz. Αλλά λόγω μακροχρόνιας χρήσης, η φθορά των επαφών στο ποτενσιόμετρο αυτό δημιουργεί ακανόνιστες μεταβολές στο ρεύμα των πηνίων. Για να παρακαμφτεί το πρόβλημα αυτό, στρίψτε το κουμπί “τέρμα δεξιά”, ή “τέρμα αριστερά” όπου οι επαφές είναι καλές. Η ρύθμιση αυτή δε δημιουργεί πρόβλημα στην τροφοδοσία των πηνίων, καθώς η ωμική αντίσταση των πηνίων είναι περίπου 5 Ω. Επομένως όταν το

ποτενσιόμετρο ήταν σε καλή κατάσταση η αντίσταση του κυκλώματος μεταβαλλόταν από 5 έως 10 Ω. Το τροφοδοτικό της Άσκησης μπορεί να τροφοδοτήσει άνετα τις δύο τιμές αντίστασης.

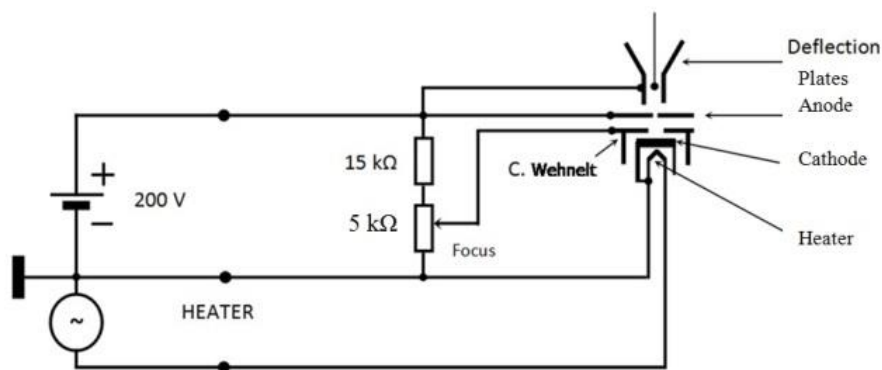
Όταν το ποτενσιόμετρο είναι απενεργοποιημένο, η μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα μπορεί να γίνει μέσω μεταβολής της τάσης που παράγει το τροφοδοτικό των 15 βολτ.

4. Συναρμολογήστε το κύκλωμα τροφοδοσίας του τηλεβόλου ηλεκτρονίων σύμφωνα με το σχέδιο που βλέπετε στο Σχ. 14.2.

5. Καλέστε τον επιβλέποντα της Άσκησης προκειμένου να ελέγξει το όλο κύκλωμα. Αν η συναρμολόγηση είναι επιτυχής, ο επιβλέπων θα θέσει σε λειτουργία τα δύο τροφοδοτικά και θα σας ενημερώσει σχετικά για τον έλεγχο και χρήση του τροφοδοτικού ανοδικής τάσης.

Σημειώνουμε ότι η διάρκεια ζωής της καθόδου μειώνεται αισθητά όταν η ανοδική τάση εφαρμόζεται σε ψυχρή κάθοδο. Επομένως πρώτα θερμαίνουμε την κάθοδο του τηλεβόλου (2-3 λεπτά αρκούν) και μόνο μετά εφαρμόζουμε στην άνοδο την ανοδική τάση! Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το τροφοδοτικό του τηλεβόλου διαθέτει και έναν πρόσθετο διακόπτη, με ενεργοποίηση του οποίου εφαρμόζεται η υψηλή τάση στην άνοδο του τηλεβόλου.

Σημείωση: Στο κιβώτιο-βάση οι εσωτερικές συνδέσεις δημιουργούν τη συνδεσμολογία που βλέπουμε στο Σχ. 14.4. Εδώ η υψηλή τάση εφαρμόζεται στην άνοδο με την οπή, ενώ η εστίαση της δέσμης επιτυγχάνεται μέσω ρύθμισης της τάσης στον κύλινδρο Wehnelt (Focus). Από τις τιμές των αντιστάσεων του διαιρέτη συμπεραίνουμε ότι η τάση αυτή μπορεί να μεταβάλλεται από 0 έως $U_a/4$.



Σχήμα 14.4. Τροφοδοσία του Τηλεβόλου

6. Ρυθμίστε την ανοδική τάση στα 200 V και θέσατε σε λειτουργία τον πρόσθετο διακόπτη. Θα εμφανιστεί μία οριζόντια ευθύγραμμη δέσμη ηλεκτρονίων που θα τερματίζει στην εσωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας. Στη συνέχεια, αυξάνοντας το ρεύμα στα πηνία έως περίπου 1,3 A, θα διαπιστώσετε καμπύλωση της δέσμης και εμφάνιση ενός κύκλου με διάμετρο περίπου 6-8 cm.

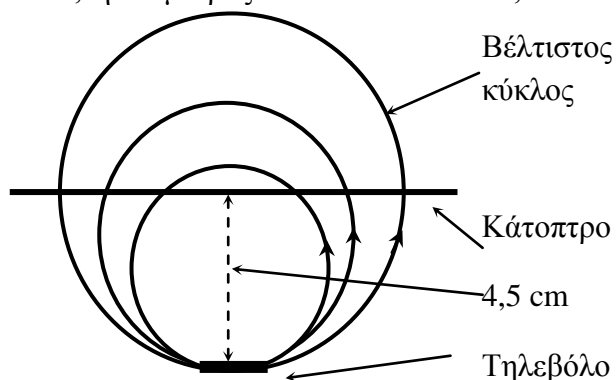
7. Ρυθμίστε το κουμπί Focus προκειμένου να λεπτύνετε τη δέσμη. Από το σημείο αυτό είστε έτοιμοι να κάνετε τα πειράματα.

Σημείωση: Μη χρησιμοποιείτε τάσεις άνω των 250 V. Επίσης μην αφήνετε τη λυχνία υπό τάση για μεγάλα χρονικά διαστήματα καθώς τα θετικά ιόντα του Ηλίου που δημιουργούνται από τα ηλεκτρόνια της δέσμης βομβαρδίζουν την κάθοδο με ενέργειες της τάξης 200 eV και προκαλούν τη φθορά της (φαινόμενο spattering).

14.4.1. Μέθοδος βέλτιστου κύκλου

Στην πειραματική διάταξη η δέσμη των ηλεκτρονίων σχηματίζει έναν κύκλο, η διάμετρος του οποίου πρέπει να μετρηθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς η κύρια συνιστώσα του σφάλματος προέρχεται από την τιμή αυτή. Η μέτρηση της διαμέτρου γίνεται με μία κατοπτρική κλίμακα που έχει οριζόντιο προσανατολισμό και βρίσκεται (δυστυχώς) στην οριζόντια διάμετρο της γυάλινης σφαίρας (θα έπρεπε να βρίσκεται στην κάθετη διάμετρο) πίσω της, σε απόσταση 10 cm από το κέντρο της σφαίρας (βλ. σχήμα). Το γεγονός αυτό δημιουργεί μεγάλη παράλλαξη κατά τη μέτρηση της διαμέτρου, η οποία μειώνεται αισθητά αν καταφύγουμε στον βέλτιστο κύκλο, η διάμετρος του οποίου είναι 9,0 cm. Τον κύκλο αυτόν τον αποκαλούμε βέλτιστο για δύο λόγους.

- Είναι μικρότερος από τη διάμετρο της γυάλινης σφαίρας (13 cm) και επομένως τα ηλεκτρόνια δε συγκρούονται με αυτή και δεν τη φορτίζουν με ηλεκτρικό φορτίο. Επίσης, ο κύκλος αυτός είναι αρκετά μεγάλος και επομένως η διάμετρός του μπορεί να μετρηθεί με μικρό σχετικό σφάλμα.

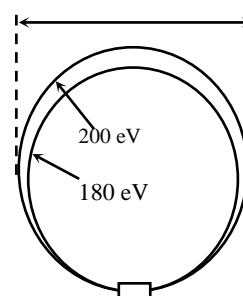


- Λόγω του ότι το τηλεβόλο βρίσκεται στην κατακόρυφο και χαμηλότερα κατά 4,5 cm από το κέντρο της σφαίρας (βλ. παραπ σχήμα), αλλά και λόγω ατυχούς προσανατολισμού της κατοπτρικής κλίμακας για τη μέτρηση της διαμέτρου στη διάταξη αυτή, αντί να μετρείται η διάμετρος του κύκλου, ουσιαστικά μετρείται η χορδή του. Επειδή μόνο ο κύκλος με ακτίνα 4,5 cm είναι ομόκεντρος με τη σφαίρα, μόνο σε αυτόν τον κύκλο η κατοπτρική κλίμακα του μετρητή συμπίπτει με τη διάμετρό του. Επομένως, λόγω μεγάλης παράλλαξης, στον βέλτιστο κύκλο τα σφάλματα μέτρησης της διαμέτρου μειώνονται σημαντικά.

14.4.2. Πείραμα 1

1. Με σταθερή ανοδική τάση 200 V, ρυθμίστε το ρεύμα των πηνίων έως ότου ο κύκλος αποκτήσει διάμετρο 9,0 cm. Σημειώστε τη διάμετρο, την τιμή του ρεύματος όπως και τα σφάλματα στη διάμετρο και το ρεύμα.

2. Επαναλάβετε το προηγούμενο βήμα άλλες 6 φορές. Επομένως στο πείραμα ο λόγος e/m θα υπολογιστεί από την τιμή της διαμέτρου (9 cm), της μέσης τιμής του ρεύματος και της τάσης 200 V. Το σφάλμα της τάσης το αντλείτε από το σφάλμα του οργάνου, ενώ το σφάλμα της διαμέτρου το εκτιμάτε ανάλογα με τη δυσκολία μέτρησης της διαμέτρου του βέλτιστου κύκλου.



Σημείωση: Λόγω διασποράς στις ενέργειες των ηλεκτρονίων της δέσμης (βλ. Παράρτημα 1), παρά τις ρυθμίσεις με το κουμπί FOCUS, η γραμμή του κύκλου δεν είναι λεπτή παντού. Η δέσμη παραμένει πλατιά στο πάνω μέρος του κύκλου, ενώ λεπταίνει μόνο στην περιοχή του τηλεβόλου (βλ. πλαϊνό σχήμα). Έτσι, όταν μετράμε τη διάμετρο του κύκλου που αντιστοιχεί σε ανοδική τάση 200 V, τις ενέργειες 200 eV έχουν τα ηλεκτρόνια που σχηματίζουν την εξωτερική πλευρά της δέσμης. Επομένως σωστό είναι να σημειώνουμε τις θέσεις της εξωτερικής γραμμής του κύκλου και όχι του κέντρου της δέσμης, όπως συνηθίζεται.

14.4.3. Πείραμα 2

Εδώ ο λόγος e/m θα υπολογιστεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Στο πείραμα αυτό τα μετρούμενα μεγέθη είναι η ανοδική τάση και το ρεύμα των πηνίων, ενώ η διάμετρος του κύκλου είναι *παράμετρος* του πειράματος και φροντίζουμε να είναι πάντα 9,0 cm.

Για την εκτέλεση:

1. Εφαρμόστε στην άνοδο του τηλεβόλου τάση 160 V και ρυθμίστε το ρεύμα των πηνίων έως ότου στη λυχνία σχηματιστεί κύκλος με διάμετρο 9,0 cm. Σημειώστε την τιμή αυτού του ρεύματος.
2. Επαναλάβετε το παραπάνω βήμα για τις τάσεις 180, 200, 220, 240, 260 και 280 V.
3. Κλείστε τα όργανα με την εξής σειρά: διακόπτης υψηλής τάσης “HT” σε θέση OFF, γενικός διακόπτης του τροφοδοτικού σε θέση OFF. Επίσης κλείστε και τους γενικούς διακόπτες του τροφοδοτικού των πηνίων και του ψηφιακού αμπερόμετρου.

14.5. Επεξεργασία των μετρήσεων

14.5.1. Πείραμα 1

Υπολογίστε τον λόγο e/m με βάση τη σχέση

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_a}{r^2 B^2} = \frac{2 \times 125}{64} \frac{R^2}{\mu_0^2 N^2} \frac{U_a}{r^2 I^2} \quad (14.5)$$

όπου $R = 0,15$ m, $N = 130$ και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Η ακτίνα, r , είναι 4,5 cm, ενώ το I είναι η μέση τιμή του ρεύματος στα 7 πειράματα. Υπολογίστε το σφάλμα του λόγου συναρτήσει των δU_a , δr και δI . Στο πείραμα αυτό, καθώς η διασπορά του I είναι πολύ μεγαλύτερη από το σφάλμα του ψηφιακού οργάνου, το δI το υπολογίζετε ως τυπική απόκλιση της μέσης τιμής.

14.5.2. Πείραμα 2

Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τον λόγο e/m όπως και το σφάλμα του, από την κλίση της ευθείας

$$I = c \times \sqrt{U_a} \quad (14.6)$$

όπου $y = I$ και $x = \sqrt{U_a}$. Στην Εξ. (14.6),

$$c^2 = \frac{m}{e} \times \frac{250 R^2}{64 r^2 \mu_0^2 N^2} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{1}{c^2} \times \frac{250 R^2}{64 r^2 \mu_0^2 N^2} \quad (14.7\alpha, \beta)$$

Σημείωση

Σε συναρτήσεις τύπου $y = bx$, όπου η διασπορά των τιμών x είναι μηδέν ($\sigma_x = 0$), η κλίση της βέλτιστης ευθείας υπολογίζεται από τη σχέση (Παράρτημα 2):

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

ενώ το σφάλμα της κλίσης, δηλαδή το σ_b , υπολογίζεται από τον τύπο

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

όπου

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)}$$

(Παράρτημα 2).

Στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων δεν είναι αδιάφορο ποιο από τα δύο μεγέθη θα οριστεί ως x και ποιο ως y . Στη θεωρία της μεθόδου, διασπαρμένες με σταθερή διασπορά θεωρούνται μόνο οι τιμές του y , ενώ η διασπορά των x θεωρείται μηδενική (αμελητέα). Ο όρος αυτός επιβάλλει για x να επιλέγεται η μεταβλητή που μετρήθηκε με *πολύ μεγαλύτερη* ακρίβεια και μηδενική διασπορά. **Προσοχή στον όρο ίδια (σταθερή) διασπορά των y_i !** Αν, για παράδειγμα, στις τιμές των I_i η διασπορά είναι ίδια, τότε στις τιμές $(I_i)^2$ η διασπορά παύει να είναι ίδια (σταθερή) και είναι ανάλογη των I_i . Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο για μεταβλητή y επιλέξαμε τις τιμές I_i και όχι τις $(I_i)^2$, που θα ήταν πιο βολικό!

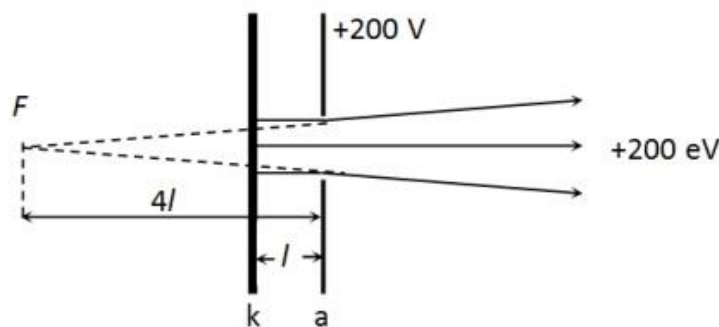
Στο πείραμα της Άσκησης, με μεγαλύτερη ακρίβεια και μηδενική διασπορά μετρήθηκαν οι τιμές U_a . Παρότι ο ψηφιακός μετρητής ρεύματος είναι όργανο ακριβείας, λόγω δυσκολίας να αποφανθεί κανείς πότε (σε ποια τιμή του ρεύματος) η διάμετρος του κύκλου είναι 9 cm, οι τιμές I_i εμφανίζονται έντονα διασπαρμένες.

Από τη σκοπιά αυτή τα σφάλματα των οργάνων θεωρούνται αμελητέα. Αμελητέα επίσης θεωρούνται και τα σφάλματα των μεγεθών R , r , N , και μ_0 (η διασπορά της r εκδηλώνεται ως διασπορά του I). Επομένως στο δεύτερο πείραμα το σφάλμα του λόγου θα υπολογιστεί από το σφάλμα της κλίσης \sqrt{b} , το οποίο συνδέεται και προκαλείται από τη μεγάλη διασπορά των τιμών I_i .

14.6 Παράρτημα 1

14.6.1. Ηλεκτροοπτικές ιδιότητες της οπής

Η δέσμη ηλεκτρονίων σχηματίζεται από τα ηλεκτρόνια που διαπερνούν την οπή της ανόδου και κινούνται ευθύγραμμα λόγω αδράνειας με ενέργειες “περίπου” 200 eV, αρκεί στο χώρο δεξιότερα της ανόδου να μην υπάρχουν ηλεκτρικά πεδία. Ο προορισμός του κυλίνδρου Wehnelt γίνεται κατανοητός αν εξετάσουμε τις αδυναμίες του απλού τηλεβόλου που αποτελείται *μόνο από δύο* ηλεκτροδία, δηλαδή την κάθοδο και την άνοδο με οπή. Στο σύστημα των δύο ηλεκτροδίων, που θα το αποκαλούμε δίοδο, η δέσμη των ηλεκτρονίων είναι *πάντα αποκλίνουσα*, δηλαδή η οπή της ανόδου έχει ιδιότητες ενός αποκλίνοντος οπτικού φακού (βλ. Σχ 14.5).



Σχήμα 14.5.

Τα θέματα αυτά αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Ηλεκτρονικής Οπτικής, όπου για την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος ηλεκτρονικού φακού οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν

$$F = 4l$$

όπου l είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων.

Η ιδιότητα αυτή πηγάζει από την παρουσία εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της οπής. Η σχετική ανάλυση δείχνει ότι στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι μικρότερο κατά ένα παράγοντα που εξαρτάται από τον λόγο d/l , όπου d είναι η διάμετρος της οπής:

$$\Phi_c = \Phi_a \left(1 - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{l} \right)$$

(Στο τηλεβόλο της Άσκησης, $d = 0,5 \text{ mm}$ και $l = 1 \text{ mm}$)

Επίσης, στο επίπεδο της ανοδικής οπής, το εγκάρσιο αυτό πεδίο έχει κυκλική συμμετρία και με καλή προσέγγιση είναι παραβολικό:

$$\Phi(r) = \Phi_c + br^2,$$

όπου ο συντελεστής b ορίζεται από την οριακή συνθήκη

$$\Phi(d) = \Phi_a.$$

Στο παραβολικό πεδίο η ένταση του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E(r) = -\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = -2br$$

δηλαδή είναι γραμμική συνάρτηση ακτίνας r .

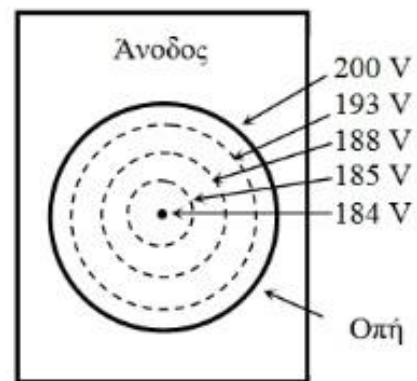
Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι στο επίπεδο της οπής, στα ηλεκτρόνια ασκείται μία εγκάρσια δύναμη που είναι ανάλογη του r , δηλαδή το πεδίο αυτό δρα με τον ίδιο τρόπο που ο οπτικός φακός επιδρά στο φως. Βλέπουμε ακόμη ότι η εγκάρσια δύναμη που δρα στο ηλεκτρόνιο είναι μηδέν στο κέντρο και μεγιστοποιείται στην περιφέρεια της οπής.

Η οπή θα αποκτήσει ιδιότητες συγκλίνοντος φακού αν αναστραφεί το εγκάρσιο πεδίο της οπής. Αυτό επιτυγχάνεται όταν στο κέντρο της οπής το δυναμικό γίνει υψηλότερο από αυτό της περιφέρειας. Πιο κάτω θα δούμε ένα δυνατό τρόπο υλοποίησης τέτοιας κατάστασης.

14.6.2. Διασπορά στις ενέργειες των ηλεκτρονίων της δέσμης

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα ηλεκτρόνια που διαπερνάνε την οπή της ανόδου δεν έχουν ίδιες κινητικές ενέργειες. Για παράδειγμα, αυτά που διαπερνάνε το κέντρο της οπής έχουν ενέργειες όσο είναι το δυναμικό στο κέντρο, δηλαδή $200(1 - d/2\pi l)$, ενώ αυτά που κινούνται κοντά στην περιφέρεια της οπής “ξυστά”, έχουν ενέργειες σχεδόν 200 eV . Έτσι, όταν ο λόγος $d/l = 1/2$, όπως στη λυχνία της Άσκησης, η διαφορά στα δυναμικά και επομένως στις ενέργειες είναι της τάξης $1/4\pi$ ή περίπου $\sim 8 \%$. Επομένως στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι 184 και όχι 200 V !

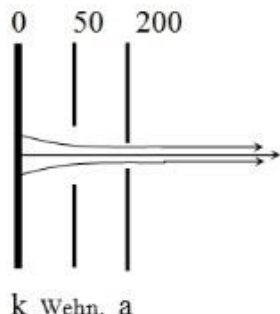
Τονίζουμε ότι η διασπορά στις ενέργειες της δέσμης άμεσα επηρεάζει την ακρίβεια του πειράματος στην Άσκηση αυτή, καθώς στο μαγνητικό πεδίο, κύκλο άλλης διαμέτρου θα



διαγράψουν τα ηλεκτρόνια με ενέργειες 184 eV, ενώ κύκλο άλλης διαμέτρου (μεγαλύτερης) θα διαγράψουν τα ηλεκτρόνια με ενέργειες 200 eV.

14.6.3. Αναστροφή του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου. Διάφραγμα Wehnelt

Η αποστολή του διαφράγματος αυτού είναι να εξουδετερώσει τις αποκλίνουσες ιδιότητες της οπής και με τον τρόπο αυτό να κάνει τη δέσμη ηλεκτρονίων παράλληλη.



Αυτό επιτυγχάνεται με ένα τρίτο ηλεκτρόδιο, το διάφραγμα Wehnelt, που τοποθετείται ανάμεσα στην κάθοδο και άνοδο με την οπή. Η οπή του διαφράγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από αυτή της ανόδου, για παράδειγμα 5 φορές.

Η δράση του ενδιάμεσου διαφράγματος εξαρτάται από το δυναμικό που αυτό φέρει.

Πράγματι έστω ότι το διάφραγμα βρίσκεται στο μέσο της απόστασης ανόδου-κάθόδου. Αν εφαρμόσουμε στο διάφραγμα το δυναμικό που θα είχε η ισοδυναμική επιφάνεια στο σύστημα των δύο ηλεκτροδίων, δηλαδή 100 V, τότε η παρουσία του διαφράγματος δε θα επιφέρει καμία επίδραση στα κινούμενα ηλεκτρόνια.

Η κατάσταση διαφοροποιείται όταν στο διάφραγμα εφαρμόσουμε τάση μικρότερη από την *ισοδυναμική* των δύο ηλεκτροδίων, για παράδειγμα 50 V. Καθώς η οπή του διαφράγματος είναι μεγάλη, στο κέντρο της το δυναμικό λίγο θα μειωθεί, αλλά θα παραμείνει στα επίπεδα του 100 V, ενώ το δυναμικό της επιφάνειας του διαφράγματος θα είναι 50 V. Βλέπουμε ότι εδώ έχουμε μία κατάσταση όπου στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι υψηλότερο από ό,τι στην περιφέρειά του. Με άλλα λόγια, το εγκάρσιο πεδίο του διαφράγματος τώρα έχει αντίθετη φορά από αυτό της ανόδου. Επομένως το πεδίο του πιέζει τα ηλεκτρόνια προς τον άξονα συμμετρίας των δύο οπών. Με την έννοια αυτή το διάφραγμα έχει ιδιότητες ενός συγκλίνοντος φακού, η εστιακή απόσταση του οποίου εξαρτάται από το δυναμικό που αυτό φέρει. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι:

- Όταν το δυναμικό του διαφράγματος είναι υψηλότερο από την ισοδυναμική των δύο ηλεκτροδίων, π.χ. είναι 150 V, στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι χαμηλότερο (είναι περίπου 100 V) της περιφέρειας και το διάφραγμα έχει ιδιότητες αποκλίνοντος φακού. Συνεπώς το όλο σύστημα αποτελείται από δύο αποκλίνοντες φακούς,
- Όταν το δυναμικό του διαφράγματος είναι χαμηλότερο από την ισοδυναμική των δύο ηλεκτροδίων, π.χ. είναι 50 V, στο κέντρο του διαφράγματος το δυναμικό αναμένεται να είναι περίπου όσο το δυναμικό της ισοδυναμικής, δηλαδή περίπου 100 V, δηλαδή υψηλότερο από το δυναμικό της περιφέρειας. Εδώ το διάφραγμα αποκτά ιδιότητες συγκλίνοντος φακού και το όλο σύστημα αποτελείται από ένα συγκλίνοντα και έναν αποκλίνοντα φακό. Ρυθμίζοντας το δυναμικό του διαφράγματος Wehnelt μπορούμε να εξουδετερώσουμε την εγκάρσια δράση της οπής της ανόδου και με τον τρόπο αυτό να κάνουμε τη δέσμη παράλληλη.

Οι ηλεκτροοπτικές ιδιότητες των διαφραγμάτων και οπών βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στους καθοδικούς σωλήνες των παλμογράφων, των τηλεοράσεων, των υπολογιστών, στην ηλεκτρονική μικροσκοπία, στις πηγές ακτίνων X κ.λπ.

14.7 Παράρτημα 2

14.7.1. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε συναρτήσεις τύπου $Y = bX$

Σε μερικές περιπτώσεις η σχετική θεωρητική ανάλυση της πειραματικής μεθόδου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ελεύθερος όρος a είναι μηδέν στη σχέση $y = a + bx$. Επομένως η πραγματική σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι τύπου

$$Y = bX \quad (14.7.1)$$

Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής. Από τα n πειραματικά ζεύγη x_i, y_i , να υπολογιστεί η κλίση b της ευθείας $y = bx$, η οποία με τον καλύτερο τρόπο προσομοιώνει τα πειραματικά σημεία.

Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί στον όρο

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 = \text{ελάχιστο}, \quad (14.7.2)$$

όπου η αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο S είναι

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

ή

$$2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)x_i = 0 \quad (14.7.3)$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = b \sum_{i=1}^n x_i^2$$

και επομένως

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (14.7.4)$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς $(\sigma_b)^2$, θα λάβουμε υπόψη τις συνθήκες:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \dots = \sigma_{y_n} = \sigma_y \text{ (σταθερή διασπορά των } y_i), \quad (14.7.5)$$

όπως επίσης και τις σχέσεις

$$b = b(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \quad \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial y_n} \right)^2 \sigma_{y_n}^2 \quad (14.7.6)$$

Αντικαθιστώντας, για την $(\sigma_b)^2$ προκύπτει:

$$\sigma_b^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \sigma_y^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (14.7.7)$$

όπου το $(\sigma_y)^2$ υπολογίζεται κανονικά από τη σχέση για τα $(d_i)^2$, δηλαδή:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{(n-1)} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)} \quad (14.7.8.)$$

Η διαίρεση εδώ γίνεται δια $n - 1$ και όχι $n - 2$, καθότι στο πρόβλημα αυτό ο ελάχιστος αριθμός των πειραματικών ζευγών x_i, y_i δεν είναι 3, αλλά 2. Έχουμε τελικά:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)} \quad (14.7.9\alpha, \beta, \gamma)$$