Άσκηση 6

Προσδιορισμός του συντελεστή αποκατάστασης και του χρόνου κρούσης δύο σφαιρών

6.1. Σκοπός

Σκοπός της Άσκησης αυτής είναι η μελέτη της κρούσης δύο σφαιρών, ο προσδιορισμός της κινητικής ενέργειας που χάνεται σε αυτήν, του συντελεστή αποκατάστασης του υλικού των σφαιρών, της χρονικής διάρκειας της κρούσης όπως και των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο όμοιων μεταλλικών σφαιρών.

6.2. Εισαγωγή

Θα ορίσουμε την κρούση σαν μία χρονικά σύντομη (100-200 μs) αλληλεπίδραση δύο σωμάτων, κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων μεταβάλλονται. Αν στα συγκρουόμενα σώματα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε η ενέργεια και ορμή του συστήματος διατηρούνται. Στην παρούσα ανάλυση περισσότερο θα στηριχθούμε στο νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, σύμφωνα με τον οποίο, το άθροισμα της κινητικής ενέργειας συν την δυναμική ενέργεια, διατηρείται.

Η διαφορά των κινητικών ενεργειών των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση, καθορίζει το μέρος της κινητικής ενέργειας που χάνεται και μετατρέπεται σε θερμότητα. Η κρούση λέγεται ***ελαστική*** όταν η απώλεια της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν και στις φυσικές διεργασίες πραγματοποιείται μόνο κατά προσέγγιση. Ο λόγος των σχετικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων μετά και πριν την κρούση ονομάζεται ***συντελεστής αποκατάστασης*** k:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \tag{6.1}$$

όπου u και υ είναι οι ταχύτητες των σωμάτων μετά και πριν την κρούση.

6.3. Μέθοδος

6.3.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης

Στο πείραμα μια μεταλλική σφαίρα B συγκρούεται με μια όμοια ακίνητη σφαίρα A (Σχ. 6.1).

Έστω ότι αγνοούνται οι απώλειες της κινητικής ενέργειας που οφείλονται στην επίδραση του αέρα και τις τριβές στο σύστημα ανάρτησης των δύο σφαιρών. Αν η κρούση είναι ελαστική, οι σφαίρες θα ανταλλάξουν τις ταχύτητές τους, δηλαδή η σφαίρα B θα ακινητοποιηθεί. Σε περίπτωση μη ελαστικής κρούσης η σφαίρα B δεν σταματά τελείως.

Πράγματι, αν οι ταχύτητες των σφαιρών λίγο πριν την κρούση είναι $\upsilon_A = 0$ και $\upsilon_B = V_0$ (βλ. Σχ. 6.1), τότε μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινούνται προς τα αριστερά με ταχύτητες u_A και u_B, αντίστοιχα.

Από το νόμο διατήρησης της ορμής και τηνΕξ. (6.1) έχουμε:

$$u_A + u_B = V_0 \tag{6.2}$$

$$u_A - u_B = kV_0 \tag{6.3}$$

Λύνοντας τις Εξ. (6.2) και (6.3) ως προς u_A και u_B έχουμε:

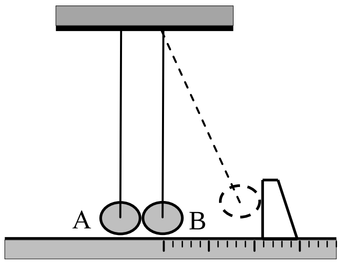
$$u_A = \frac{V_0}{2}(1+k) \tag{6.4}$$

$$u_B = \frac{V_0}{2}(1-k) \tag{6.5}$$

Μετρώντας τις ταχύτητες u_B και V_0, μπορούμε από την Εξ. (6.5) να υπολογίσουμε τον συντελεστή αποκατάστασης, *k*.

Για σφαίρες που συγκρούονται με μικρές απώλειες ($k \approx 1$), η ταχύτητα u_B είναι πολύ μικρή και συνεπώς δύσκολα μετρήσιμη με ικανοποιητική ακρίβεια.

Η κατάσταση βελτιώνεται αν οι σφαίρες αφεθούν να συγκρουστούν *n* φορές, σε μία πειραματική διάταξη όπως αυτή που βλέπουμε στο Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός, *n*, πρέπει να είναι ζυγός, διότι έτσι μηδενίζεται η επίδραση της μικροδιαφοράς στις μάζες των σφαιρών που ενδεχομένως να υπάρχει. Μετά από *n* κρούσεις η ταχύτητα $u_A(n)$ της σφαίρας *A* θα είναι περίπου *n* φορές μεγαλύτερη από την ταχύτητα, u_B, που η σφαίρα *B* αποκτά μετά την πρώτη κρούση.

Μετά την πρώτη κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών είναι $u_A^{(1)}$ και $u_B^{(1)}$ (βλ. Εξ. (6.4) και (6.5)) και κατευθύνονται προς τα αριστερά. Μετά από μία ημιπερίοδο της ταλάντωσής τους οι σφαίρες θα βρεθούν στις θέσεις ισορροπίας τους σχεδόν ταυτόχρονα και θα συγκρουστούν με αρχικές ταχύτητες $u_A^{(1)}$ και $u_B^{(1)}$. Μετά τη δεύτερη κρούση οι σφαίρες θα κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητες $u_A^{(2)}$ και $u_B^{(2)}$.

Από το νόμο διατήρησης της ορμής και την Εξ. (6.1) έχουμε:

$$u_B^{(2)} + u_A^{(2)} = u_A + u_B \tag{6.6}$$

$$u_B^{(2)} - u_A^{(2)} = k(u_A - u_B) \tag{6.7}$$

Από τις Εξ. (6.6), (6.7) και (6.4), (6.5) έχουμε:

$$u_A^{(2)} = \frac{V_0}{2}(1-k^2) \tag{6.8}$$

$$u_B^{(2)} = \frac{V_0}{2}(1+k^2) \tag{6.9}$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία n φορές θα έχουμε για τη n-οστη κρούση:

$$u_A^{(n)} = \frac{V_0}{2}(1-k^n) \tag{6.10}$$

$$u_B^{(n)} = \frac{V_0}{2}(1+k^n), \tag{6.11}$$

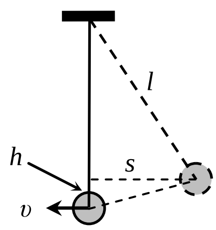
όπου $u_A(n)$ και $u_B(n)$ είναι οι ταχύτητες των σφαιρών A και B μετά από την n-οστη κρούση.

Μετρώντας την ταχύτητα $u_A(n)$ και την αρχική ταχύτητα V_0 της σφαίρας B, από την Εξ. (6.10) μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή αποκατάστασης, k:

$$k = \left(1 - \frac{2u_A^{(n)}}{V_0}\right)^{1/n} \tag{6.12}$$

6.3.2. Μέτρηση της ταχύτητας της σφαίρας

Στο πείραμα οι σφαίρες συγκρούονται όταν αυτές βρίσκονται στη θέση ισορροπίας, καθώς στη θέση αυτή η ταχύτητα της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την αρχική εκτροπή s (βλ. Σχ. 6.2).



Σχήμα 6.2

Στο Σχ. 6.2 φαίνονται η ανώτατη και η κατώτατη θέση της σφαίρας B όταν αυτή ταλαντώνεται σαν ένα εκκρεμές. Η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση ισορροπίας, δηλαδή λίγο πριν αυτή συγκρουστεί με τη σφαίρα A, βρίσκεται από το νόμο διατήρησης της ενέργειας και είναι:

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \tag{6.13}$$

Από τη γεωμετρία έχουμε

$$s^2 = l^2 - (l-h)^2 = 2lh - h^2$$

Επομένως

$$h = \frac{s^2}{2l} + \frac{h^2}{2l} \approx \frac{s^2}{2l} \tag{6.14}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω προσέγγιση δημιουργεί σφάλμα μικρότερο από 1 %, όταν ο δεύτερος όρος της Εξ. (6.14) είναι 100 φορές μικρότερος του πρώτου:

$$\frac{h^2}{2l} < 0{,}01\frac{s^2}{2l}$$

ή

$$\frac{h^2}{2l} \approx \frac{s^4}{8l^3} < 0{,}01\frac{s^2}{2l}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η ανισότητα:

$$s < 0{,}1\frac{l}{2}$$

Στον βαθμό που το μήκος ανάρτησης l είναι περίπου 60 cm, για να ισχύει η Εξ. (6.14) με σφάλμα μικρότερο από 1 %, η εκτροπή της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή:

$$s < 3 \text{ cm.} \tag{6.15}$$

Με τη χρήση της Εξ. (6.14), η Εξ. (6.13) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$\upsilon = s\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6.16}$$

ή

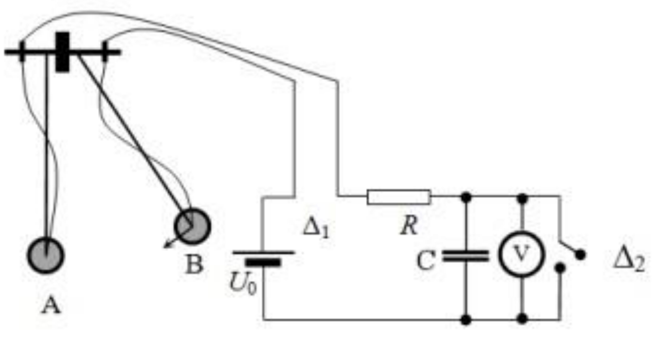
$$\upsilon = \frac{2\pi s}{T} \tag{6.17}$$

όπου T είναι η περίοδος ταλάντωσης της σφαίρας B, όταν αυτή εκτελεί ταλαντώσεις *μικρού πλάτους*.

6.3.3. Μέτρηση του χρόνου κρούσης δύο σφαιρών

Για τη μέτρηση του χρόνου κρούσης δύο μεταλλικών σφαιρών χρησιμοποιείται το κύκλωμα που φαίνεται στο Σχ. 6.3.

Η πηγή τάσης U_0 φορτίζει έναν πυκνωτή χωρητικότητας C(1 μF) μέσω μιας αντίστασης R (10 kΩ) και του διακόπτη Δ_1, ο οποίος είναι κλειστός μόνο όταν οι σφαίρες είναι σε επαφή.



Σχήμα 6.3

Παράλληλα με τον πυκνωτή είναι συνδεδεμένο ένα ψηφιακό βολτόμετρο που έχει πολύ μεγάλη αντίσταση εισόδου (> 10^9 Ω). Τον διακόπτη $Δ_2$ τον κλείνουμε μόνο όταν θέλουμε να εκφορτίσουμε τον πυκνωτή, διασφαλίζοντας έτσι μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης $Δ_1$. Τότε η τάση στον πυκνωτή θα αρχίσει να αυξάνει εκθετικά σύμφωνα με τον νόμο:

$$U_c = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{6.18}$$

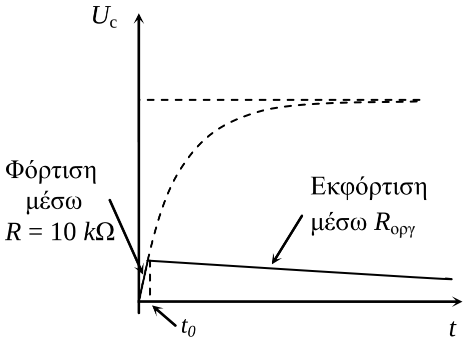
Αν η φόρτιση του πυκνωτή διακοπεί τη χρονική στιγμή t_0 και ο λόγος t_0/RC είναι μικρός (βλ. Σχ. 6.4), για παράδειγμα 10^{-2}, τότε η εκθετική συνάρτηση μπορεί να αντικατασταθεί με τους δύο πρώτους όρους της σειράς Taylor:

$$U_c = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) = U_0\left(1 - \left(1 - \frac{t_0}{RC} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t_0}{RC}\right)^2 - \ldots\right)\right) \tag{6.19}$$

Η Εξ. (6.18) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$U_c = U_0\frac{t_0}{RC} \tag{6.20}$$

καθώς ο τρίτος όρος της σειράς Taylor είναι μικρότερος από 10^{-4} και μπορεί να αγνοηθεί.



Σχήμα 6.4

Από την Εξ. (6.20) προκύπτει ότι στο αρχικό στάδιο της φόρτισης η τάση στον πυκνωτή αυξάνει γραμμικά, ενώ ο χρόνος κρούσης των δύο μεταλλικών σφαιρών είναι

$$t_0 = \frac{U_C}{U_0}RC \tag{6.21}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που ο διακόπτης $Δ_1$ ανοίγει, η τάση στον πυκνωτή παύει να μεταβάλλεται και η ένδειξη του βολτόμετρου ‘‘παγώνει’’ στην τιμή U_c, που δίνεται από τον τύπο (6.20). Η περαιτέρω χρονική εξέλιξη της τάσης U_c εξαρτάται από τη σταθερά χρόνου εκφόρτισης του πυκνωτή. Η σταθερά αυτή στη διάταξη της Άσκησης είναι αρκετά μεγάλη (άνω των 100 s) ώστε η ανάγνωση της U_c να γίνεται άνετα με μικρό σφάλμα.

6.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από δύο επιχρυσωμένες μεταλλικές σφαίρες *Α* και *Β* (βλ. Σχ. 6.1 και 6.3). Είναι αναρτημένες με 4 νήματα η καθεμιά για την αποφυγή της περιστροφής τους γύρω από τον κατακόρυφο άξονα και για να διατηρείται σταθερό το επίπεδο ταλάντωσης.

Η μετατόπιση των σφαιρών από τη θέση ισορροπίας μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός κανόνα, ο οποίος βρίσκεται κάτω από τις σφαίρες.

Την ίδια αποστολή έχει και ένας μετακινούμενος κατακόρυφος ‘‘βραχίονας’’, ο οποίος βοηθά την ανάγνωση της μετατόπισης της σφαίρας *Β* όταν αυτή αφήνεται να συγκρουστεί με τη σφαίρα *Α*.

Στα πειράματα η σφαίρα *Α* είναι ακίνητη, ενώ η σφαίρα *Β* εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια αφήνετε να συγκρουστεί με τη σφαίρα *Α*.

Οι σφαίρες *Α* και *Β*, όπως και οι δύο λεπτοί αγωγοί που είναι ηλεκτρικά συνδεδεμένοι με τις σφαίρες (Σχ. 6.3), σχηματίζουν ένα είδος ηλεκτρικού διακόπτη, ο οποίος κλείνει όταν οι σφαίρες έρχονται σε επαφή.

Επειδή οι σφαίρες είναι όμοιες, στη θέση ισορροπίας, όταν οι σφαίρες μόλις εφάπτονται, η απόσταση των κέντρων τους είναι ίση με δύο ακτίνες. Επιπλέον οι δύο σφαίρες κρέμονται από νήματα που έχουν ίδιο μήκος.

Βιβλιογραφία

1. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010).

6.5. Εκτέλεση

6.5.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης

1. Απομακρύνετε τη σφαίρα *Β* και προκαλέστε ταλαντώσεις *μικρού* πλάτους στη σφαίρα *Α*. Μετρήστε τον χρόνο 20 ταλαντώσεων και βρείτε την περίοδο, *Τ*, αυτών των ταλαντώσεων.

2. Μετατοπίστε τη σφαίρα *Β* σε κάποια συγκεκριμένη απόσταση s_B (περίπου 10 cm) και αφήστε τη να συγκρουστεί με την ακίνητη σφαίρα *Α*.

3. Μετά την εικοστή κρούση συγκρατήστε τη σφαίρα *Β* μακριά από την *Α* για να σταματήσουν οι συγκρούσεις.

4. Η σφαίρα *Α* θα ταλαντώνεται. Μετρήστε το πλάτος s_A αυτών των ταλαντώσεων.

5. Επαναλάβατε το βήμα 2 τρεις φορές.

6.5.2. Μέτρηση του χρόνου κρούσης των σφαιρών

1. Συναρμολογήστε το κύκλωμα που φαίνεται στο Σχ. 6.3.

2. Μετατοπίστε τη σφαίρα *Β* σε αποστάσεις s_B από 2 έως 20 cm (6-8 μετρήσεις λαμβάνοντας υπ’ όψη την ακρίβεια του χάρακα).

3. Λίγο πριν ελευθερώσετε τη σφαίρα *B*, μηδενίστε την ένδειξη του ψηφιακού βολτομέτρου, εκφορτίζοντας τον πυκνωτή *C* με τη βοήθεια του διακόπτη Δ_2.

4. Ελευθερώστε τη σφαίρα *B* και μετά την κρούση συγκρατήστε τη σφαίρα *A* για να μην ξανασυγκρουστούν οι σφαίρες. Αμέσως πατήστε το κουμπί ‘‘DATA-H’’ του οργάνου και στη συνέχεια σημειώστε την τιμή της τάσης στον πυκνωτή. Με το πάτημα αυτού του κουμπιού το βολτόμετρο ‘‘παγώνει’’ την τιμή της τάσης που είχε εκείνη τη στιγμή ο πυκνωτής.

5. Επαναλάβατε το βήμα 4 τρεις φορές για κάθε s_B

6. Με τη βοήθεια του ψηφιακού πολυμέτρου μετρήστε τις τιμές U_0 και *R* του κυκλώματος που φαίνεται στο Σχ. 6.3.

Η τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή, *C*, αναγράφεται πάνω στην κάθε συσκευή.

6.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

6.6.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης k

1. Από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

και από την περίοδο ταλαντώσεων της σφαίρας *A*, υπολογίστε το ισοδύναμο μήκος *l* του απλού (μαθηματικού) εκκρεμούς.

2. Από την Εξ. (6.17), βρείτε τις ταχύτητες V_0 της σφαίρας *B* και $u_A^{(20)}$ της σφαίρας *A*.

3. Υπολογίστε τον συντελεστή αποκατάστασης *k*.

4. Υπολογίστε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάνεται σε μία κρούση συναρτήσει του *k*. Για την τιμή του *k* που βρήκατε υπολογίστε το ποσοστό αυτό.

6.6.2. Μέτρηση του χρόνου κρούσης των σφαιρών

1. Υπολογίστε τις ταχύτητες της σφαίρας *B* (V_0) την ώρα της κρούσης, για τα αντίστοιχα s_B.

2. Από την Εξ. (6.21), υπολογίστε τον χρόνο κρούσης t_0 των σφαιρών για κάθε s_B.

3. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του t_0 συναρτήσει της ταχύτητας V_0, η σχετική θεωρητική ανάλυση της οποίας δίνει μία σχέση τύπου $(V_0)^{-1/5}$.

4. Από τη σχέση

$$\overline{F} = \frac{\Delta(m\upsilon)}{\Delta t}$$

βρείτε τη μέση δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας σε χρόνο $\Delta t = t_0$ για τα διάφορα s_B που έχετε μετρήσει. Η μάζα της κάθε σφαίρας θεωρείται γνωστή και είναι 0,268 kg.

5. Συμπληρώστε τον παρακάτω Πίνακα:

s_B (cm)	U_C(mV)	$\overline{U_C}$ (mV)	$V_0 = u_B$(m/s)	t_0 (μs)	$\overline{F}$ (N)