

## Άσκηση 3

### Μέτρηση της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης, $G$ , με την μέθοδο του Cavendish

#### 3.1. Σκοπός

Σκοπός του πειράματος είναι η μέτρηση της παγκόσμιας σταθεράς της βαρύτητας (παγκόσμιας έλξης),  $G$ , με την μέθοδο του Cavendish. Επίσης, χρησιμοποιώντας τις γνωστές τιμές για τη μέση ακτίνα της Γης,  $R$ , και την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g$ , στην επιφάνειά της, θα υπολογιστεί η μάζα και η μέση πυκνότητα της Γης.

#### 3.2. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη, η δύναμη,  $F$ , μεταξύ δύο σημειακών μαζών,  $m_1$ ,  $m_2$ , που βρίσκονται σε απόσταση  $r$ , είναι ελκτική, ασκείται κατά μήκος της ευθείας που τις ενώνει και έχει τιμή ίση με

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου  $G$  είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

Αν η Γη θεωρηθεί σφαίρα με ακτίνα  $R$  και μάζα  $M$ , τότε η δύναμη που ασκεί σε σημειακή μάζα,  $m$ , κοντά στην επιφάνειά της είναι

$$F = G \frac{M m}{R^2} = m g \quad (3.2)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Άρα

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (3.3)$$

Αν τα  $G$ ,  $g$ ,  $R$  είναι γνωστά, τότε η μάζα της Γης υπολογίζεται από τον τύπο

$$M = \frac{g}{G} R^2 \quad (3.4)$$

ενώ η μέση πυκνότητα της Γης, εάν θεωρηθεί σαν σφαίρα με όγκο

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3g}{4\pi G R} \quad (3.5).$$

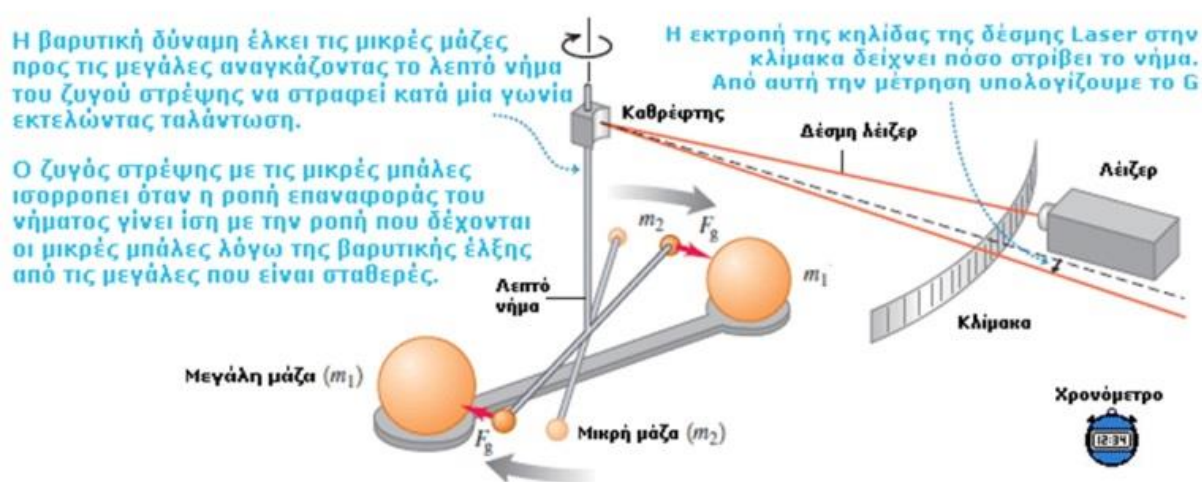
Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιείται σε αυτό το πείραμα είναι όμοια με αυτή που περιγράφεται στην εργασία για τον υπολογισμό της μέσης πυκνότητας της Γης από τον Cavendish, το 1798, η οποία κατέστησε δυνατή την «ζύγιση της Γής» σύμφωνα με την ορολογία της εποχής. Είναι αξιοσημείωτο ότι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης είναι γνωστή με την μικρότερη ακρίβεια συγκριτικά με άλλες σταθερές εξαιτίας της δυσκολίας μέτρησης των πολύ ασθενών βαρυτικών δυνάμεων.

Στον Πίνακα I φαίνονται οι από το 1986 διεθνώς αποδεκτές τιμές για τα  $G$ ,  $M$ , και  $\rho$ .

**Πίνακας I**

Σταθερά της βαρύτητας	$G=(6,67259\pm 0,00085) \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{Kg}^2$
Μάζα της Γης	$M=(5,97418\pm 0,00075) \times 10^{24} \text{ Kg}$ .
Μέση πυκνότητα της Γης	$\rho=(5,5152\pm 0,0012) \text{ g/cm}^3$

### 3.3. Πειραματική Διάταξη



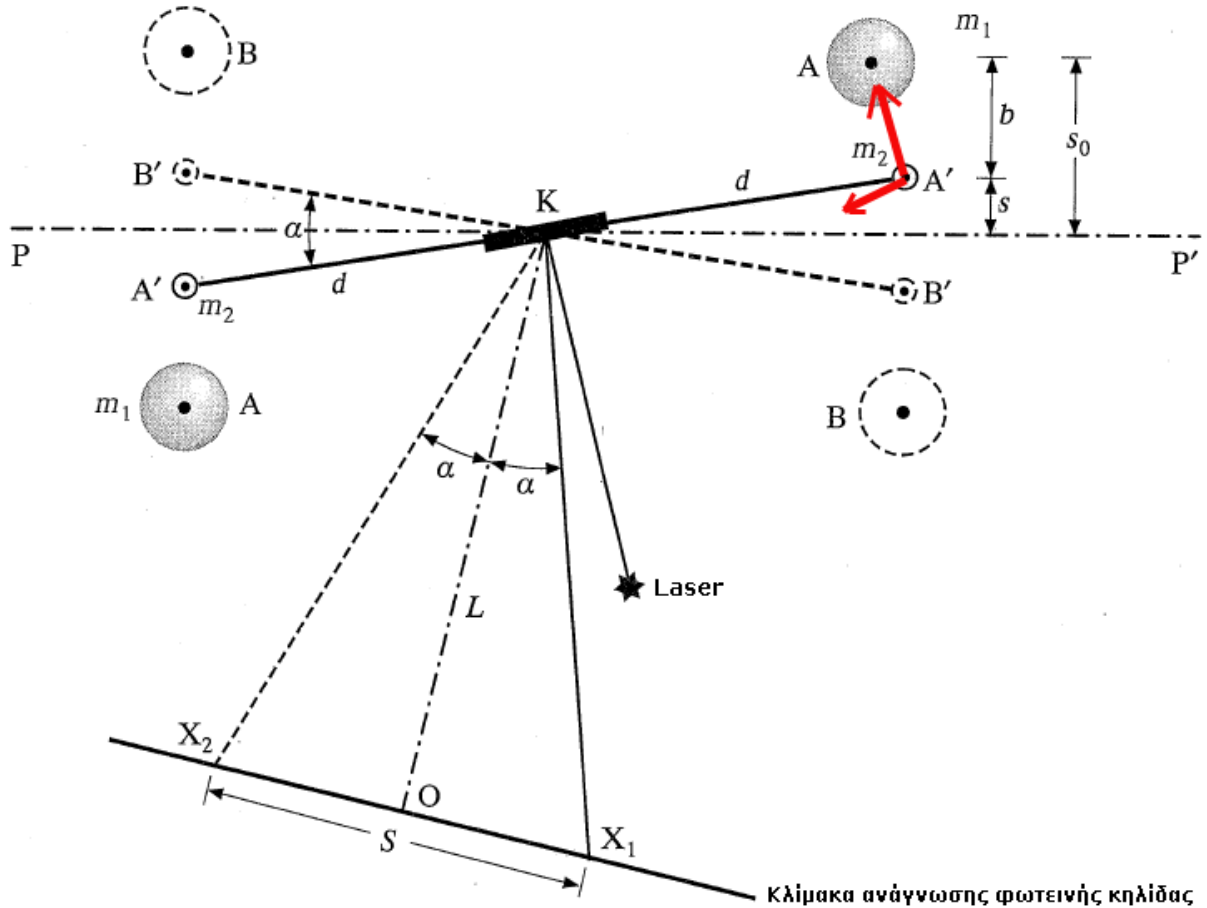
**Σχήμα 3.1.** Σχηματική αναπαράσταση της συσκευής Cavendish και η αρχή λειτουργίας

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ζυγός στρέψης με δύο μικρές μολύβδινες σφαίρες με μάζα  $m_2$  στα άκρα λεπτής ράβδου μήκους  $2d$ . Το σύστημα ράβδου και μικρών σφαιρών κρέμεται από σταθερό σημείο με πολύ λεπτό νήμα στο οποίο είναι στερεωμένος ένας κοίλος καθρέφτης,  $K$ , ο οποίος περιστρέφεται μαζί με το νήμα. Υπάρχουν επίσης δύο μεγάλες σφαίρες με μάζα  $m_1$  σε βάση που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του ζυγού στρέψης, πηγή δέσμης λέιζερ, η οποία ανακλώμενη στον καθρέφτη σχηματίζει φωτεινή κηλίδα στην κλίμακα που βρίσκεται σε απόσταση  $L$  και, τέλος, ψηφιακό χρονόμετρο, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1.

### 3.4. Μέθοδος

Όταν στο σύστημα του ζυγού στρέψης των μαζών  $m_2$  δεν ασκείται ροπή, αυτό ισορροπεί πάνω στην ευθεία  $PP'$ , με την κηλίδα του λέιζερ στη θέση  $O$  (Σχ. 3.2). Όταν οι μεγάλες μάζες  $m_1$  είναι στις θέσεις  $A$ , η δύναμη της παγκόσμιας έλξης,  $F_g$ , ασκεί ροπή στο σύστημα του ζυγού στρέψης με τις μικρές σφαίρες,  $m_2$ , το οποίο στη μεταβατική περίοδο εκτελεί αποσβενούμενη στροφική ταλάντωση σαν στροφικό εκκρεμές και ισορροπεί στις θέσεις  $A'$  με την κηλίδα στη θέση  $X_1$ .

Όταν οι μεγάλες μάζες,  $m_1$ , μεταφέρονται στις συμμετρικές θέσεις  $B$ , μετά το πέρας της μεταβατικής περιόδου οι νέες θέσεις ισορροπίας του ζυγού στρέψης και των μικρών μαζών  $m_2$  είναι οι  $B'$ , ενώ της κηλίδας η  $X_2$ . Η γεωμετρία των δύο αυτών συμμετρικών καταστάσεων των μικρών και μεγάλων σφαιρών, σε ισορροπία, φαίνεται στο Σχ. 3.2 που παρουσιάζει την κάτοψη της πειραματικής διάταξης.



Σχήμα 3.2. Κάτοψη της πειραματικής διάταξης

Σε κατάσταση ισορροπίας, η συνισταμένη δύναμη λόγω της βαρυτικής έλξης που ασκείται στις μικρές σφαίρες,  $m_2$ , από τις μεγάλες,  $m_1$ , (διανύσματα με αρχή το σημείο  $A'$  στο Σχ.3.2) αποδεικνύεται ότι ισούται με

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{b^2} \left(1 - \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{3/2}}\right) = G \frac{m_1 m_2}{b^2} \beta \quad (3.6)$$

όπου  $b$  είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των μικρών και μεγάλων σφαιρών,  $d$  είναι η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής του ζυγού στρέψης, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2, ενώ με  $\beta$  συμβολίζουμε, για συντομία, την αλγεβρική έκφραση στην παρένθεση.

Η ροπή λόγω των δυνάμεων  $F_g$  ισούται με

$$M_g = 2F_g d \quad (3.7).$$

Λόγω της περιστροφή του λεπτού νήματος, στο σύστημα ασκείται και ροπή επαναφοράς που είναι ανάλογη της γωνίας κατά την οποία έχει στραφεί το σύστημα από την αρχική θέση  $PP'$  και ισούται με

$$M = -D \frac{\alpha}{2} \quad (3.8)$$

όπου  $D$  είναι ο συντελεστής στρέψης του νήματος (σταθερός για μικρές γωνίες) και  $\alpha$  η γωνία κατά την οποία έχει στραφεί το νήμα και ο καθρέφτης, άρα και η ράβδος με τις μικρές σφαίρες μεταξύ των δύο θέσεων ισορροπίας:  $A'$  και  $B'$ . Η περιστροφή του καθρέφτη κατά γωνία  $\alpha$  προκαλεί περιστροφή της ανακλώμενης δέσμης κατά  $2\alpha$ , και η γωνία αυτή μπορεί να υπολογιστεί από τη γεωμετρία, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2. Έτσι, για μικρές γωνίες ισχύει ότι

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{S/2}{L} = \frac{S}{2L} \quad (3.9)$$

όπου  $S = |X_1 - X_2|$  είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων  $X_1$  και  $X_2$  πάνω στην κλίμακα, στα οποία ισορροπεί η κηλίδα για τις δύο θέσεις των μεγάλων μαζών και,  $L$ , είναι η απόσταση της κλίμακας από τον άξονα του ζυγού στρέψης.

Σε κατάσταση ισορροπίας ισχύει ότι

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M_g + M = 0 \Rightarrow M_g = -M \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. 3.10 τις Εξ.(3.6), (3.7), (3.8), (3.9) και λύνοντας ως προς  $G$ , βρίσκουμε τη βασική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε για τον προσδιορισμό του  $G$ :

$$G = \frac{DSb^2}{8Ldm_1m_2\beta} \quad (3.11)$$

όπου άγνωστη είναι μόνο η σταθερά  $D$ .

Η τιμή της σταθεράς  $D$  εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και υπολογίζεται από τα χαρακτηριστικά του στροφικού εκκρεμούς, δηλαδή από την περίοδο ταλάντωσης και τη ροπή αδράνειας του.

Στη μεταβατική περίοδο, η κίνηση που εκτελεί ο ζυγός στρέψης γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας είναι φθίνουσα στροφική ταλάντωση και περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K \frac{d\theta}{dt} - D\theta + 2dF_g \quad (3.12)$$

όπου ο παράγοντας  $2dF_g$  καθορίζει τη νέα θέση ισορροπίας,  $\theta$  είναι η γωνία στροφής,  $I=2m_2d^2$  είναι η **ροπή αδράνειας** του ζυγού (εάν θεωρήσουμε αμελητέα τη μάζα της ράβδου

που ενώνει τις δύο σφαίρες  $m_2$ ) και  $K$  είναι η σταθερά απόσβεσης, υπεύθυνη για την μείωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης.

Η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης που περιγράφεται από την Εξ. (3.12) δεν διαφέρει σημαντικά από την περίοδο της ελεύθερης και μη φθίνουσας ταλάντωσης ενός στροφικού εκκρεμούς (δηλαδή χωρίς τριβή, με  $K = 0$  και, σταθερή ροπή  $2F_g d$ , που δεν επηρεάζει την περίοδο), η οποία (όπως προκύπτει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης) δίνεται από τη σχέση

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (3.13)$$

Από την Εξ. (3.13) και με χρήση της  $I = 2m_2d^2$ , βρίσκουμε

$$D = 8\pi^2\frac{m_2d^2}{T^2} \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας, από τις Εξ.(3.11) και (3.14) προκύπτει

$$G = \frac{\pi^2 d S b^2}{m_1 L T^2 \beta} \quad (3.15)$$

όπου

$$\beta = \left(1 - \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (3.16)$$

και

$$b = s_0 - s = s_0 - d\frac{\alpha}{2} = s_0 - \frac{dS}{4L} \quad (3.17)$$

Στην τελευταία σχέση  $s_0$  είναι η απόσταση των κέντρων των σφαιρών  $m_1$  από την ευθεία  $PP'$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2.

Από την Εξ.(3.14), για  $\beta \approx 1$  και με αντικατάσταση του  $b$  από την Εξ. 3.17, έχουμε:

$$G = \frac{\pi^2 d S}{m_1 L T^2} \left(s_0 - \frac{dS}{4L}\right)^2 \quad (3.18)$$

Στην τελική αυτή έκφραση για το  $G$ , τα μεγέθη  $m_1$ ,  $d$ ,  $s_0$  είναι γνωστά χαρακτηριστικά του ζυγού, ενώ τα μεγέθη  $S$ ,  $T$  και  $L$  προσδιορίζονται μέσω της πειραματικής διαδικασίας.

## Βιβλιογραφία

1. *Μαθήματα Φυσικής Berkeley*. Τόμος I:Μηχανική, Κεφ. 9 (Αθήνα, 1978).
2. R.A. Serway. *Physics for Scientists and Engineers*. Τόμος I: *Μηχανική*, Κεφ. 14 (Αθήνα, 1900).
3. M. Alonso και E.J.Finn. *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική*. Τόμος I: *Μηχανική και Θερμοδυναμική*, Κεφ. 13 (Αθήνα, 1981).
4. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 1: Ch. 7, Addison-Wesley (Reading Mass, 1965).

5. H.D. Young. *Πανεπιστημιακή Φυσική*. Τόμος Α: *Μηχανική - Θερμοδυναμική*, Κεφ. 12. (Αθήνα, 1994).
6. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010)

### 3.5. Εκτέλεση

#### *Παρατήρηση - Προσοχή*

*Ο ζυγός στρέψης είναι πολύ ευαίσθητη διάταξη και γι' αυτό δεν πρέπει να τον αγγίζετε. Η μετατόπιση των μεγάλων μαζών πρέπει να γίνεται αργά με πολύ προσοχή. Κάθε χτύπημα εκτός από την ζημιά που μπορεί να προκαλέσει διαταράσσει την ισορροπία η οποία χρειάζεται πολύ χρόνο να αποκατασταθεί.*

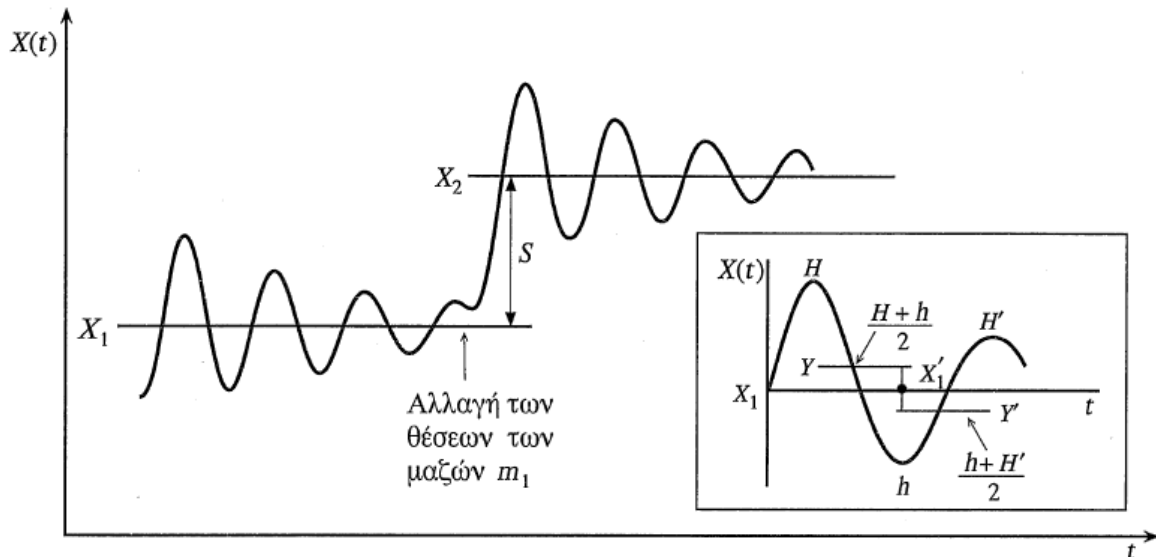
Εφόσον πρώτα αναγνωρίσετε τη διάταξη που περιγράφεται στο Σχ. 3.1, συνεχίστε στα ακόλουθα:

1. Τροφοδοτήστε το λέιζερ με τάση 12 V και βεβαιωθείτε ότι η φωτεινή κηλίδα ανακλάται από τον καθρέφτη του ζυγού στρέψης και βρίσκεται πάνω στην κλίμακα. Επειδή η φωτεινή κηλίδα είναι σχετικά πλατιά, αποφασίστε ποιο χαρακτηριστικό σημείο της κηλίδας θα θεωρήσετε ότι καθορίζει την θέση της  $X$ , πάνω στην κλίμακα. Εκτιμήστε πόσο είναι το σφάλμα ανάγνωσης (αβεβαιότητα) της θέσης της κηλίδας.
2. Περιστρέψτε το σύστημα των μεγάλων μαζών (με την βοήθεια του επιβλέποντα) ώστε να τις τοποθετήσετε στη θέση Α, θέστε σε λειτουργία το χρονόμετρο και αρχίστε να καταγράφετε τη θέση της κηλίδας κάθε 0,5 λεπτά χωρίς να σταματάτε το χρονόμετρο. Παρατηρήστε ότι η κηλίδα κάνει φθίνουσα ταλάντωση, όπως περιμένουμε θεωρητικά. Συνεχίστε τις μετρήσεις έως ότου να έχετε 4 ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα). Αυτό διαρκεί περίπου 45 λεπτά. Μη σταματάτε το χρονόμετρο.
3. Μετατοπίστε τις μεγάλες μάζες στις θέσεις Β, (με τη βοήθεια του επιβλέποντα) και επαναλάβετε την καταγραφή της θέσης της κηλίδας στην κλίμακα μέχρι οι μετρήσεις να περιέχουν τέσσερα ακρότατα.
4. Σημειώστε την απόσταση  $L \pm \delta L$  μεταξύ του άξονα περιστροφής του ζυγού και του κεντρικού σημείου στη κλίμακα. (Η απόσταση αυτή αναγράφεται στην κλίμακα σε κάθε πειραματική διάταξη, μαζί με το σφάλμα της  $\delta L$ ).

### 3.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Σχεδιάστε (σε μιλιμετρέ χαρτί Α4) την γραφική παράσταση της θέσης της κηλίδας  $X(t)$  σαν συνάρτηση του χρόνου (αναμένετε δύο φθίνουσες ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3).
2. Εκτιμήστε τις θέσεις ισορροπίας,  $X_1$  και  $X_2$ , καθώς και τα σφάλματά τους, όπως φαίνεται στην ένθετη γραφική παράσταση του Σχ. 3.3. Πιο συγκεκριμένα, αν  $H$  και  $H'$  είναι δύο διαδοχικά μέγιστα της  $X(t)$  και  $h$  είναι το μεταξύ τους ελάχιστο, τότε η  $X_1$  προσδιορίζεται από το ημίθροισμα των μέσων τιμών  $Y$  και  $Y'$ , ενώ το σφάλμα της προσδιορίζεται από την ημιδιαφορά τους. Επομένως για την πιθανή θέση ισορροπίας έχουμε

$$X_1 = \frac{1}{4}(H + 2h + H') \pm \frac{1}{4}(H - H')$$



**Σχήμα 3.3** Γραφική παράσταση της θέσης της κηλίδας και ένθετη μέθοδος προσδιορισμού της θέσης ισορροπίας της κηλίδας, όταν δεν της παρέχεται επαρκής χρόνος για να αποσβέσουν οι ταλαντώσεις.

3. Σημειώνουμε ότι τα σφάλματα των  $X_1, X_2$  δεν μπορεί να είναι μικρότερα από το σφάλμα ανάγνωσης της θέσης της κηλίδας στην κλίμακα.
4. Υπολογίστε τη διαφορά  $S = |X_1 - X_2| \pm \delta S$ .
5. Χαράξτε στο σχήμα 2 ευθείες που να αντιστοιχούν στις τιμές των  $X_1$  και  $X_2$  και προσδιορίστε επίσης την περίοδο ταλάντωσης,  $T$ , αξιοποιώντας τουλάχιστον 5 τιμές από το σχήμα. Η μέση τιμή των 5 περιόδων όπως και το σφάλμα τους μας δίνουν τα μεγέθη  $T \pm \delta T$ .
6. Με αντικατάσταση στην Εξ. (3.18), υπολογίστε την τιμή του  $G$  και του σφάλματός του,  $\delta G$ . Δίνονται, ως γνωστά, τα μεγέθη:  $m_1 = 1,500 \pm 0,001 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 15,0 \pm 0,1 \text{ g}$ ,  $d = 50,0 \pm 0,2 \text{ mm}$ ,  $s_0 = 46,5 \pm 0,2 \text{ mm}$ , ενώ τα υπόλοιπα τα έχετε μετρήσει.

**Σημαντική Παρατήρηση:** Στον υπολογισμό του  $\delta G$ , αποφασίστε ποια είναι τα τρία μεγέθη που συνεισφέρουν περισσότερο στο τελικό σφάλμα (υπολογίστε το σχετικό σφάλμα των μεγεθών που χρησιμοποιήσατε στον υπολογισμό του  $G$  και αυτά με το μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα συνεισφέρουν περισσότερο στο σφάλμα του  $G$ ) και θεωρήστε ότι τα υπόλοιπα είναι γνωστά με αμελητέα σφάλματα.

7. Έχοντας την τιμή του  $G$  και με δεδομένες τις τιμές για την ακτίνα της Γης,  $R = 6370 \text{ Km}$ , και την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , με αμελητέα σφάλματα σε σύγκριση με αυτό του  $G$ , υπολογίστε τη μάζα της Γης  $M \pm \delta M$  (Εξ. 3.4) και τη μέση πυκνότητά της,  $\rho \pm \delta \rho$  (Εξ. 3.5).
8. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του Πίνακα 3.1. Υπάρχουν μεγάλες διαφορές; Σχολιάστε. Ποιες είναι κατά την γνώμη σας οι πιθανές πηγές σφάλματος στις μετρήσεις σας.
9. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται μεταξύ των μαζών  $m_1$  και  $m_2$  σε απόσταση  $s_0$ . Τι κλάσμα αυτής της δύναμης θα ασκούσε πάνω στις μάζες  $m_2$  ο άνθρωπος, με μάζα  $M=75 \text{ Kg}$ , θεωρούμενη ως σημειακή, σε απόσταση  $0,5 \text{ m}$  από τις  $m_2$ ; Από το αποτέλεσμα, τι συμπεραίνετε για την επίδραση που είχε στα αποτελέσματά η παρουσία σας κοντά στη συσκευή κατά τη διάρκεια της Άσκησης;