Άσκηση 2

Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο του φυσικού εκκρεμούς

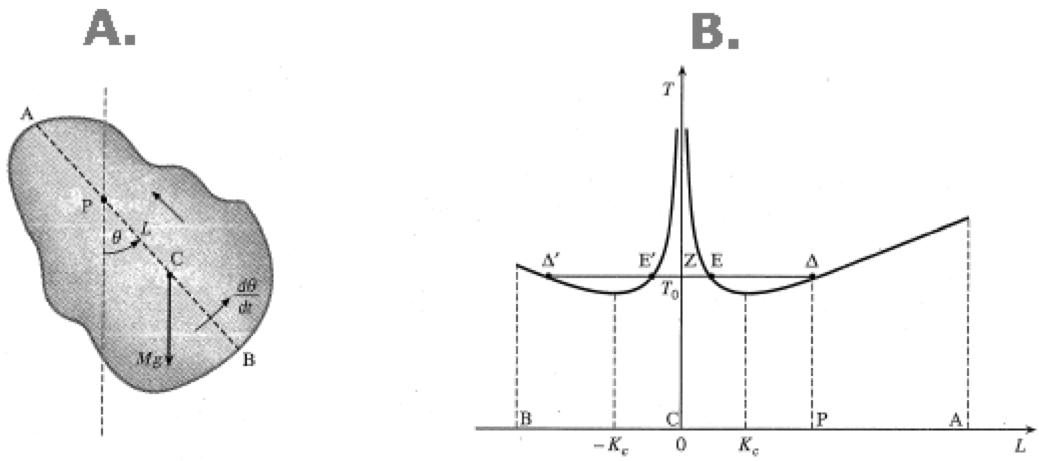
2.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι ο προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας από μετρήσεις της περιόδου των ταλαντώσεων ενός φυσικού εκκρεμούς ως συνάρτησης της θέσης του άξονα περιστροφής του.

2.2. Θεωρία

Φυσικό εκκρεμές είναι κάθε στερεό σώμα που είναι ελεύθερο να περιστρέφεται και να ταλαντώνεται γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, με τον οποίο το σώμα είναι σταθερά συνδεδεμένο (Σχ. 2.1Α). Αν M είναι η μάζα του σώματος, C το κέντρο μάζας του που βρίσκεται σε απόσταση L από τον άξονα περιστροφής P και η ευθεία PC σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, τότε η ροπή του βάρους Mg γύρω από τον άξονα περιστροφής είναι

$$N = -MgLsin\theta \tag{2.1}$$



Σχήμα 2.1. (Α) Το φυσικό εκκρεμές. (Β) Μεταβολή της περιόδου του φυσικού εκκρεμούς σαν συνάρτηση της απόστασης L του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας C κατά μήκος μιας ευθείας AB (βλέπε Σχήμα 2.1Α). Το L θεωρείται θετικό προς μια κατεύθυνση πάνω στην ευθεία και αρνητικό προς την αντίθετη κατεύθυνση.

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ροπή, N, είναι αντίθετη από τη γωνιακή μετατόπιση, θ.

Αν I_p είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα P τότε, εάν αγνοήσουμε τις δυνάμεις τριβής, η εξίσωση κίνησης του σώματος δίνεται από την σχέση

$$I_P \frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgLsin\theta \tag{2.2}$$

η οποία είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση.

Για μικρές τιμές της θ, έχουμε $\sin\theta = \theta$, οπότε η Εξ. (2.2) γίνεται γραμμική διαφορική εξίσωση και η λύση της είναι

$$\theta = \theta_0 sin(2\pi \frac{t}{T} + \phi) \tag{2.3}$$

με περίοδο

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{MgL}} \tag{2.4}$$

Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, αν I_c είναι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα παράλληλο του P που διέρχεται από το κέντρο μάζας, τότε

$$I_p = I_c + ML^2 \tag{2.5}$$

οπότε η Εξ.(2.4) γίνεται

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_c^2 + L^2}{gL}} \tag{2.6}$$

όπου το μήκος

$$K_c = \sqrt{\frac{I_c}{M}} \tag{2.7}$$

είναι η ακτίνα αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι παράλληλος προς τον P. Αν θεωρήσουμε

$$L_0 = L + \frac{K_c^2}{L} \tag{2.8}$$

ως το μήκος ισοδύναμου απλού εκκρεμούς που θα είχε περίοδο ίση με αυτή του φυσικού εκκρεμούς, τότε η Εξ. (2.6) γίνεται

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} \tag{2.9}$$

2.3 Μέθοδος

Για διάφορες θέσεις του άξονα P πάνω σε μια δεδομένη ως προς το σώμα ευθεία AB, η οποία περνά από το κέντρο μάζας του (Σχ. 2.1A), η περίοδος των ταλαντώσεων μεταβάλλεται με την απόσταση, L , σύμφωνα με την Εξ. (2.6), όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1B. Η καμπύλη $T(L)$ αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς το κέντρο μάζας, για το οποίο $L = 0$ και $T = \infty$. Ένας κλάδος προκύπτει για θετικές τιμές του L (σημείο P μεταξύ C και A στο Σχ. 2.1 A) και ο άλλος για αρνητικές (σημείο P μεταξύ C και B στο Σχ. 2.1A). Ας σημειωθεί ότι για αρνητικές τιμές του L πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απόλυτη τιμή στην Εξ. (2.6) γιατί, για να υπάρξουν ταλαντώσεις, πρέπει το κέντρο μάζας να είναι χαμηλότερα από τον άξονα P.

Για κάθε έναν από τους δύο κλάδους της καμπύλης $T(L)$ υπάρχει ένα ελάχιστο στην T (στις αποστάσεις $L = \pm K_c$). Για μια ορισμένη περίοδο (π.χ. T_0 στο Σχ. 2.1B) αντιστοιχούν τέσσερις τιμές της L (θέσεις του άξονα). Για την T_0 του Σχ. 2.1Β αυτά τα μήκη είναι τα *ΖΕ, ΖΔ,* $-ZE'$ και $-Z\Delta'$, τα οποία είναι ρίζες της Εξ. (2.8).

Από τις ιδιότητες των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει ότι

$$L_0 = (\mathrm{Z E}) + (\mathrm{Z\Delta}) = (\mathrm{ZE'}) + (\mathrm{Z\Delta'}) = (\mathrm{\Delta' E}) = (\mathrm{E'\Delta}) \tag{2.10}$$

$$K^2_c = (\mathrm{ZE})\,(\mathrm{Z\Delta}) = (\mathrm{ZE'})\,(\mathrm{Z\Delta'}) \tag{2.11}$$

Η μέτρηση της περιόδου, T, για διάφορες τιμές του L, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό, από μια καμπύλη όπως αυτή του Σχ. 2.1Β, των ισοδύναμων μηκών L_0 απλού εκκρεμούς για κάθε περίοδο, T_0, από τα οποία προσδιορίζεται η τιμή του g μέσω της Εξ. (2.9). Στην πράξη, η γραφική αυτή μέθοδος δεν είναι αρκετά ακριβής και γι' αυτό θα χρησιμοποιηθεί μια τροποποιημένη μέθοδος ανάλυσης των μετρήσεων $T(L)$ για την εύρεση του g.

Για τον ακριβέστερο προσδιορισμό του g από την Εξ. (2.6), η σχέση των L και T θα γραμμικοποιηθεί ως εξής:

$$\frac{LT^2}{4\pi^2} = \frac{K_c^2}{g} + \frac{1}{g}L^2 \tag{2.12}$$

που είναι της μορφής $y = a + bx$, όπου

$$x = L^2, \quad y = \frac{LT^2}{4\pi^2}, \quad a = \frac{K_C^2}{g}, \quad b = \frac{1}{g} \tag{2.13α,β,γ,δ}$$

Αν σχεδιαστεί η τιμή της μεταβλητής y, όπως προκύπτει από τις μετρήσεις, συναρτήσει του x, θα βρεθεί μια ευθεία με κλίση $1/g$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $y = a$, από το οποίο, σε συνδυασμό με την τιμή του g που προκύπτει από την κλίση, μπορεί να προσδιοριστεί η K_c. Η μέθοδος αυτή προσφέρεται για εύκολη ανάλυση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

2.4. Πειραματική διάταξη

Το φυσικό εκκρεμές που θα χρησιμοποιηθεί είναι μια κυλινδρική ράβδος από ορείχαλκο. Μια χαραγή στο μέσο της ράβδου σημειώνει τη θέση του κέντρου μάζας της. Η απόσταση του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας του εκκρεμούς θα μετριέται από αυτή τη χαραγή. Ένας μεταλλικός δακτύλιος, που μπορεί να μετακινηθεί και να στερεωθεί σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου με το σφίξιμο μιας βίδας, έχει στο κάτω μέρος του μια ακμή που αποτελεί και τον άξονα στήριξης της ράβδου πάνω σε μία ακίνητη βάση. Η ευθεία επαφής της βάσης με την ακμή είναι ο άξονας περιστροφής του εκκρεμούς. Η απόσταση του άξονα αυτού από το κέντρο μάζας της ράβδου είναι η απόσταση, L. Για τη μέτρηση των αποστάσεων, L, χρειάζεται ένα υποδεκάμετρο, ενώ για τη μέτρηση των περιόδων των ταλαντώσεων χρειάζεται ένα ψηφιακό χρονόμετρο χειρός.

Βιβλιογραφία

1. Μαθήματα Φυσικής Berkeley. Τόμος Ι: Μηχανική. (Αθήνα, 1978). Κεφ. 7,8.
2. M. Alonso και E.J.Finn. Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική. Τόμος Ι: Μηχανική και Θερμοδυναμική (Αθήνα, 1981). Κεφ. 10,12.

3. R.A. Serway. Physics for Scientists and Engineers. Τόμος I: Μηχανική. (Αθήνα, 1900). Κεφ. 13.
4. H.D. Young. Πανεπιστημιακή Φυσική. Τόμος Α: Μηχανική – Θερμοδυναμική. (Αθήνα, 1994). Κεφ. 13.
5. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος I, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010).

2.5. Πειραματική Διαδικασία

2.5.1. Παρατηρήσεις

(α) Για μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση των περιόδων ταλάντωσης, θα μετριέται ο ολικός χρόνος για τουλάχιστον 10 πλήρεις ταλαντώσεις και θα διαιρείται δια του αριθμού των ταλαντώσεων. Ως αρχή της ταλάντωσης θα θεωρείται η στιγμή μιας μέγιστης απόκλισης και όχι όταν αφήνεται ελεύθερο το εκκρεμές. Χρειάζεται μεγάλη προσοχή στην ακριβή καταμέτρηση του αριθμού των ταλαντώσεων, γιατί αυτή είναι η πιο πιθανή πηγή μεγάλου σφάλματος.

(β) Για την εκτίμηση του πλάτους ταλάντωσης αναφέρεται ενδεικτικά ότι μια ράβδος μήκους 1,00 m σχηματίζει γωνία 5° με την κατακόρυφη, όταν το ένα της άκρο απέχει απόσταση περίπου 9 cm από την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το άλλο της άκρο. Για 10° η απόσταση αυτή είναι 17 cm, για 20° είναι 34 cm και για 30° είναι περίπου 50 cm.

2.5.2. Εκτέλεση

1. Μετρήστε το μήκος, *H*, και την ακτίνα, *a*, της ράβδου και εκτιμήστε τα σφάλματα στις δύο μετρήσεις.
2. Στερεώστε το δακτύλιο σε απόσταση από το κέντρο της ράβδου ίση με το 1/20 περίπου του ολικού της μήκους. Τοποθετήστε τη ράβδο στη βάση της, ώστε να μπορεί να εκτελεί ταλαντώσεις.
3. Μετρήστε τον ολικό χρόνο για ένα αριθμό ταλαντώσεων για αρχικό πλάτος 5^0 και ακολούθως για αρχικό πλάτος 20^0. Σημειώστε και τα σφάλματα σε αυτές τις χρονομετρήσεις
4. Μετρήστε τις περιόδους ταλάντωσης του εκκρεμούς για πλάτη μικρότερα των 5°, για 10 διαφορετικές θέσεις του άξονα περιστροφής, αρχίζοντας από ένα σημείο περίπου 4,0 cm από το κέντρο μάζας και τελειώνοντας σχεδόν στο άκρο της ράβδου. Καταχωρήστε τα αποτελέσματα σε έναν Πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω. Σημειώστε τις τιμές του πίνακα με κατάλληλο αριθμό σημαντικών ψηφίων.

Α/Α	L(m)	N	t (s)	T (s)	$x = L^2$ (m^2)	$y = \frac{LT^2}{4\pi^2}$ (ms^2/rad^2)

Στον πίνακα οι στήλες είναι:

Α/Α: ο αύξων αριθμός της μέτρησης

L: η απόσταση του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας της ράβδου
N: ο ολικός αριθμός των ταλαντώσεων
t: ο ολικός χρόνος των *N* ταλαντώσεων
T = *t/N*: η περίοδος της μιας ταλάντωσης.

Σημείωση 1. Όταν συμπληρώνουμε έναν πίνακα με τιμές, τις τιμές αυτές *δεν τις συνοδεύουμε* με το αντίστοιχο σφάλμα, καθότι την πληροφορία αυτή την αντλούμε από τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων με τον οποίο εγγράφονται οι τιμές.
Σημείωση 2. Όταν οι τιμές κάποιας στήλης **έχουν ίδιο σφάλμα**, το σφάλμα αυτό μπορούμε να το σημειώσουμε στην κορυφή της στήλης, κάτω από το αντίστοιχο σύμβολο των τιμών. Για παράδειγμα, ± 1 mm, κάτω από το σύμβολο *L*(m) ή ± 0,005 s, κάτω από το *T* (s) κ.ο.κ.

2.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Υπολογίστε το σφάλμα της μίας ταλάντωσης στις μετρήσεις, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το σφάλμα του ψηφιακού χρονομέτρου χειρός είναι πολύ μικρό, της τάξης 10^{-4} – 10^{-6} % (!) και, επομένως, το σφάλμα στη χρονομέτρηση των N ταλαντώσεων οφείλεται κυρίως στην αδράνεια και τα αντανακλαστικά του ερευνητή, όταν αυτός ενεργοποιεί τις εντολές Start και Stop. Το σφάλμα αυτό διαφέρει σε διάφορους ανθρώπους, ωστόσο είναι ευρέως αποδεκτό ότι δεν υπερβαίνει τα 0,1 s. Επομένως $\delta T=\delta t/N$, όπου δt = 0,1 s.

2. Υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης για πλάτος 5° και για 20°. Υπάρχει διαφορά που να είναι μεγαλύτερη από τα σφάλματα δT στις δύο περιόδους; Σε ποιους λόγους μπορεί να οφείλεται η ασυμφωνία (αν υπάρχει);

3. Από τις τιμές του πίνακα, σχεδιάστε τη μεταβολή της περιόδου, *T* , συναρτήσει του *L*. Από τις Εξ. (2.10) υπολογίστε για 3 διαφορετικές τιμές της περιόδου, *T*, τα αντίστοιχα μήκη του απλού εκκρεμούς, L_0, και από την Εξ. (2.9) την επιτάχυνση της βαρύτητας, *g*, για κάθε τιμή του *T*. Βρείτε τη μέση τιμή και το σφάλμα σε αυτή την τιμή του ***g***. Από τη Εξ. (2.11), υπολογίστε επίσης την ακτίνα αδράνειας, K_c.

4. Από τις μετρήσεις της περιόδου, *T*, ως συνάρτησης του *L*, υπολογίστε τα μεγέθη *x* και *y* στον Πίνακα. Σχεδιάστε την καμπύλη του *y* ως συνάρτηση του *x*. Είναι η σχέση γραμμική όπως προβλέπει η Εξ. (2.12); Ελέγξτε αν κάποιο σημείο αποκλίνει πολύ από την ευθεία *y*(*x*) και αν γι' αυτό πρέπει να απορριφθεί. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία (*x,y*) που είναι αποδεκτά και προσδιορίστε τις τιμές των $a \pm \delta a$ και $b \pm \delta b$. Από τις τιμές αυτές και τις Εξ. (2.13), προσδιορίστε τα μεγέθη $g \pm \delta g$ και $K_c \pm \delta K_c$.

5. Συγκρίνετε τις τιμές των *g* και K_c από το βήμα 3 με αυτές του βήματος 4. Ποιες είναι πιο αξιόπιστες; Συγκρίνετε την τιμή $g \pm \delta g$ του βήματος 4 με την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην Αθήνα, *g*= 9,800 m/s^2, η οποία είναι μετρημένη με σφάλμα μικρότερο από 0,001 m/s^2 (Σχολή Τοπογράφων, ΕΜΠ). Συμφωνούν οι δύο τιμές μέσα στα όρια του σφάλματος δg; Ποιες είναι οι κυριότερες πηγές σφάλματος στο αποτέλεσμά σας για την επιτάχυνση της βαρύτητας;

6. Για κύλινδρο μήκους *H* και ακτίνας *a*, βρίσκεται θεωρητικά ότι

$$K_c = \sqrt{H^2/12 + a^2/4}$$

Από τα σφάλματα δH και δa, υπολογίστε και το σφάλμα της παραπάνω σχέσης.

7. Συμφωνεί το αποτέλεσμα σας με αυτή την τιμή, όπως την υπολογίζετε από τις διαστάσεις της ράβδου;